

УДК 532.64+536.42+532.2

ПЕРФОРАЦИЯ ТОНКИХ ЖИДКИХ ПЛЕНОК ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

А. Л. Куперштох, Д. А. Медведев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: skn@hydro.nsc.ru, dmedv@hydro.nsc.ru

Разработана нестационарная электрогидродинамическая модель поведения диэлектрической пленки жидкости на поверхности электрода в окружающем газе. Показано, что под действием неоднородного электрического поля возможна перфорация пленки с образованием новых контактных линий. Неоднородность поля создавалась с помощью круглой изолирующей вставки в центре нижнего электрода. Процесс перфорации определяется напряженностью электрического поля, толщиной пленки, радиусом непроводящей вставки и величиной контактного угла смачивания между жидкостью и твердой подложкой.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, динамика многофазных сред, жидкие диэлектрики, электрическое поле, компьютерное моделирование, параллельные расчеты на графических ускорителях.

DOI: 10.15372/PMTF20220602

Введение. Эффективное охлаждение горячих поверхностей очень важно в микрофлюидике, а также в микроэлектронных устройствах. Одним из способов охлаждения является создание тонких пленок или множества капель испаряющейся жидкости, помещенных на твердую поверхность с трехфазными контактными линиями [1, 2]. В работах [3, 4] теоретически и экспериментально показано, что для капель на поверхности подложки процесс теплоотдачи тесно связан с интенсификацией испарения жидкости вблизи контактных линий. Таким образом, для повышения эффективности охлаждения перспективным является создание новых контактных линий путем перфорации жидких пленок.

Множество работ — экспериментальных, теоретических и с использованием компьютерного моделирования — посвящено исследованию поведения капель [5–13], пузырьков [14, 15] и жидких пленок [13, 16] под действием электрического поля. Электрическое поле использовалось также для манипулирования каплями [7, 13]. Воздействие электрического поля на диэлектрические капли может усиливать теплоотдачу от твердой подложки [8]. Однако численные исследования перфорации диэлектрических пленок в электрическом поле практически отсутствуют. В таких компьютерных моделях должны учитываться поверхностное натяжение, электрические и гравитационные силы.

В работе [13] показана принципиальная возможность разрыва пленок жидкости с помощью воздействия неоднородного электрического поля, а также численно исследован процесс создания контактных линий путем перфорации тонких пленок диэлектрической жидкости на поверхности электрода с учетом свойств смачиваемой поверхности. Неоднородное

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (№ 22-29-01055).

поле создавалось на границах изолирующего диска, вставленного заподлицо в отверстие в плоском электроде. Нижний плоский электрод был электрически заземлен. При подаче высокого напряжения на верхний плоский электрод диэлектрическая жидкость втягивается в области более сильного электрического поля на краях вставки. При этом в зависимости от геометрии и напряженности поля может произойти разрыв пленки жидкости и как следствие появление новых контактных линий. В настоящей работе проведено трехмерное компьютерное моделирование этого процесса. Безразмерными параметрами, определяющими поведение пленок, являются число Бонда Bo и электрическое число Бонда Bo_E .

Для трехмерного моделирования нестационарной двухфазной гидродинамики использовался метод решеточных уравнений Больцмана (LBE, LBM) [17–19], в котором учитываются поверхностное натяжение на границе раздела жидкость — пар, гравитационные и электростатические силы, а также взаимодействие жидкости с твердой подложкой. Электрические и гидродинамические уравнения трехмерной задачи решаются совместно. Распределение напряженности электрического поля в области между плоскими электродами рассчитывалось численно на каждом временном шаге путем решения уравнения Пуассона для потенциала электрического поля.

Для параллельного программирования на многоядерных графических процессорах GPU использовалась технология CUDA (compute unified device architecture).

Метод решеточных уравнений Больцмана. В рамках метода решеточных уравнений Больцмана течения жидкости рассматриваются как динамика ансамбля псевдо-частиц (одночастичных функций распределения f_k), которые могут двигаться по узлам регулярной пространственной решетки. Скорости псевдо-частиц \mathbf{c}_k могут иметь ограниченный набор значений. В 19-скоростной модели D3Q19 [20], используемой в настоящей работе, эти значения равны 0, $h/\Delta t$ и $\sqrt{2}h/\Delta t$ (h — шаг решетки; Δt — шаг по времени). Соответствующие векторы решетки равны $\mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k \Delta t$. Эволюция одночастичных функций распределения f_k описывается уравнением

$$f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = f_k(\mathbf{x}, t) + \Omega_k\{f_k\} + \Delta f_k.$$

Оператор столкновений Ω_k выбран в форме оператора столкновений Бхатнагара — Гросса — Крука (релаксация функций распределения к локальному равновесию) [20]

$$\Omega_k(f_k(\mathbf{x}, t)) = \frac{f_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}) - f_k(\mathbf{x}, t)}{\tau}.$$

Безразмерное время релаксации τ определяет кинематическую вязкость жидкости $\nu = (\tau - 1/2)\theta \Delta t$, где $\theta = (h/\Delta t)^2/3$ — кинетическая температура LBE-псевдо-частиц. Для равновесных функций распределения $f_k^{eq}(\rho, \mathbf{u})$ использовалось разложение распределения Максвелла по степеням массовой скорости жидкости \mathbf{u} до второго порядка [21]

$$f_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = \rho w_k \left(1 + \frac{(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2\theta} \right).$$

Плотность ρ и скорость жидкости \mathbf{u} вычисляются как первые два момента функций распределения

$$\rho = \sum_{k=0}^{18} f_k, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{18} \mathbf{c}_k f_k.$$

Весовые коэффициенты для трехмерной 19-скоростной модели D3Q19 равны $w_0 = 1/3$, $w_{1-6} = 1/18$, $w_{7-18} = 1/36$ [20].

Для вычисления изменений функций распределения Δf_k за счет действия объемных сил (внутренних, гравитационных и электростатических) использовался метод точной разности (EDM) [19, 22]

$$\Delta f_k = f_k^{eq}(\rho, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - f_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}),$$

где $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{F} \Delta t / \rho$ — изменение скорости за один шаг по времени.

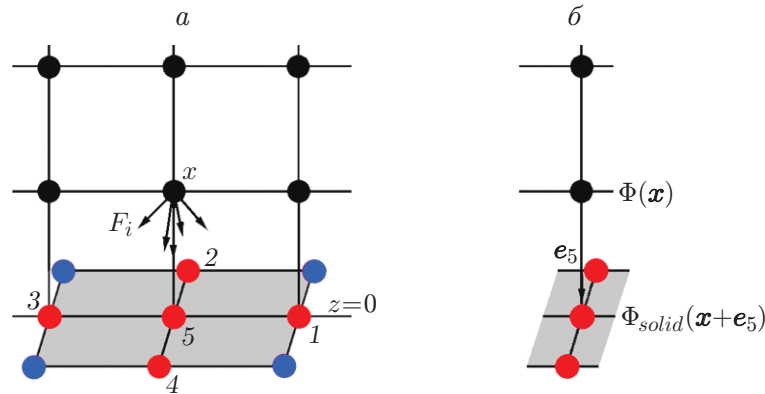


Рис. 1. Силы взаимодействия жидкости с твердой поверхностью (а) и значения функции $\Phi_{solid}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_5) = \Phi(\mathbf{x})$ на твердой поверхности (б):
1–5 — номера узлов

Для моделирования фазовых переходов в методе LBE вводятся внутренние силы между веществом в соседних узлах жидкости. Суммарная сила, действующая на узел, выражается через градиент псевдопотенциала $U = P(\rho, T) - \rho\theta$ [23]

$$\mathbf{F}_{in}(\mathbf{x}) = -\nabla U \quad (1)$$

($P(\rho, T)$ — уравнение состояния жидкости; T — температура). Ранее было предложено ввести специальную функцию $\Phi = \sqrt{-U}$. Используя эту функцию, формулу (1) можно переписать для полной силы в математически эквивалентном виде [18, 24]

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 2A \nabla(\Phi^2) + (1 - 2A)2\Phi \nabla\Phi. \quad (2)$$

Здесь A — свободный параметр, который выбирается таким образом, чтобы кривая сосуществования фаз жидкость — пар максимально соответствовала заданному уравнению состояния жидкости. В настоящей работе использовалось уравнение состояния Ван-дер-Ваальса в приведенных переменных, для которого оптимальным является значение $A = -0,152$ [18, 24]. Уравнение (2) позволяет записать аппроксимацию градиента псевдопотенциала в комбинированной конечно-разностной форме с улучшенной изотропией [18, 24]. При этом на границах раздела фаз обеспечивается поверхностное натяжение, которое при значении приведенной температуры $T/T_{кр} = 0,6$ равно $\sigma = 5,1$ единиц LBM ($T_{кр}$ — критическая температура).

Следует отметить, что во втором порядке разложения Чепмена — Энскога из уравнений LBE получаются макроскопические уравнения гидродинамики [22, 25], т. е. известные уравнения неразрывности и Навье — Стокса. Это может служить обоснованием метода LBE.

Геометрия и граничные условия. Расчет выполнялся в прямоугольной области с размерами L_x, L_y, L_z . В направлениях x и y использовались периодические граничные условия. Для задания граничных условий непротекания и непроскальзывания на нижней и верхней твердых границах $z = 0, z = L_z$ в методе LBE использовалось правило “отскока” (“bounce-back”) [26].

Для моделирования смачиваемости электродов использовалась модель, в которой вводятся силы взаимодействия между узлом \mathbf{x} жидкости и ближайшими пятью узлами на твердой поверхности (рис. 1, а) [15]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = B\Phi(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^5 w(\mathbf{e}_j) \Phi_{solid}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j.$$

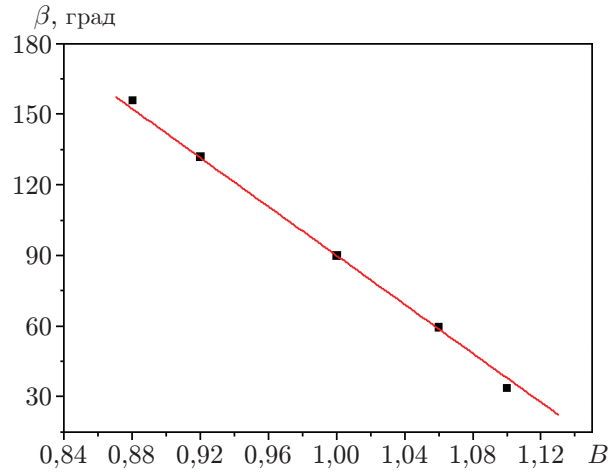


Рис. 2. Зависимость величины контактного угла β от параметра B при $T/T_{кр} = 0,6$

Функция Φ_{solid} в каждом узле твердой поверхности принимает те же значения, что и в расположенных непосредственно над ними узлах жидкости \mathbf{x} (рис. 1, б), т. е. $\Phi_{solid}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_5) = \Phi(\mathbf{x})$. Смачиваемость твердой поверхности определяется параметром B [15]. В диапазоне углов $\beta = 60 \div 130^\circ$ зависимость величины статического контактного угла смачивания от параметра B является приблизительно линейной: $\beta = 90^\circ - 520^\circ (B - 1)$ (рис. 2). При $B = 1$ величина статического угла смачивания равна $\beta = 90^\circ$ (нейтральная смачиваемость). Значения $B > 1$ соответствуют смачиваемой поверхности (при $B = 1,06$ краевой угол равен $\beta \approx 60^\circ$), а $B < 1$ — случаю плохого смачивания (при $B = 0,92$ $\beta \approx 130^\circ$).

Вычисление электрических сил. Электростатическая сила, действующая на диэлектрическую жидкость, определяется формулой Гельмгольца [27]

$$\mathbf{F} = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left[E^2 \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \right],$$

где E — напряженность локального электрического поля; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; ε — диэлектрическая проницаемость флюида. Для неполярных диэлектрических жидкостей зависимость $\varepsilon(\rho)$ вычисляется с помощью формулы Клаузиуса — Моссотти

$$\varepsilon(\rho) = 1 + \frac{3\alpha\rho}{1 - \alpha\rho}.$$

Таким образом, при развитии процесса деформирования диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\rho)$ флюида изменяется во времени и пространстве. Параметр $\alpha = 0,215$ был определен таким образом, чтобы значение диэлектрической проницаемости жидкости было равно $\varepsilon_l = 4$ при используемом при моделировании значении приведенной плотности жидкого диэлектрика $\tilde{\rho}_l = 2,31$. (Значение $\varepsilon \approx 1$ соответствует диэлектрической проницаемости пара.)

Распределение потенциала электрического поля φ между электродами при изменении формы пленки рассчитывалось на каждом шаге по времени путем решения уравнения Пуассона

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon \nabla \varphi) = 0. \tag{3}$$

При этом учитывалось изменение распределения диэлектрической проницаемости в пространстве и времени. В направлениях x и y использовались периодические граничные условия для потенциала. На электроды подавался импульс постоянного напряжения V .

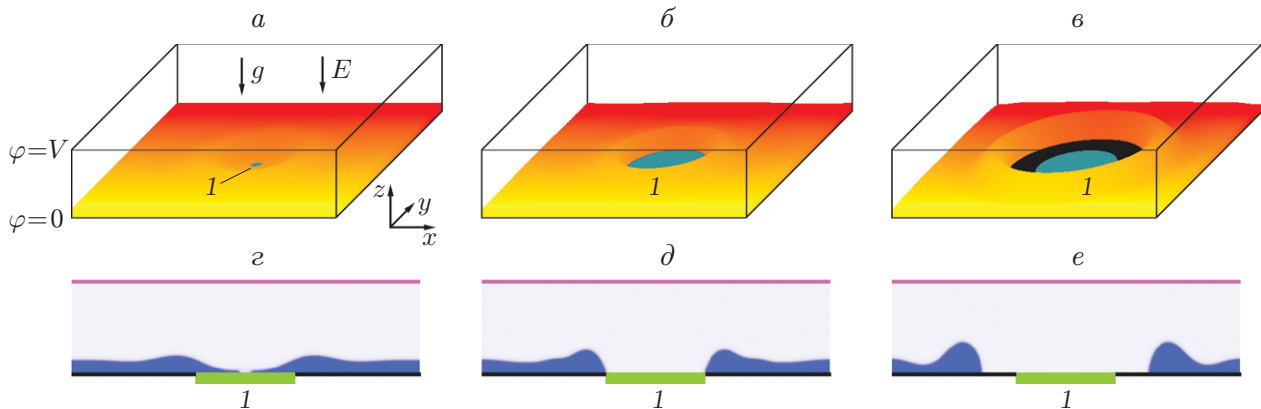


Рис. 3. Процесс перфорации пленки жидкого диэлектрика после включения электрического поля (а–в) и распределение плотности жидкости в центральном вертикальном сечении (г–е) при $\beta = 90^\circ$, $\delta = 20$, $R_0 = 80$, $\varepsilon_l = 4$, $Bo = 0,018$, $Bo_E = 1,18$, $Bo_E^* = 18,9$ (расчетная сетка $560 \times 560 \times 144$) в различные моменты времени:

а, г — $t = 3900$ единиц LBM, б, д — $t = 5600$ единиц LBM, в, е — $t = 8400$ единиц LBM; 1 — круглая токонепроводящая вставка в нижнем электроде

При этом потенциал верхнего электрода равен $\varphi(x, y, L_z) = V$ (рис. 3). Нижний электрод электрически заземлен: $\varphi(x, y, 0) = 0$. На поверхности непроводящей вставки в нижнем электроде использовались граничные условия $\partial\varphi/\partial z = 0$. Уравнение (3) решалось на каждом шаге по времени с помощью метода простых итераций. Затем по формуле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ рассчитывалась напряженность электрического поля.

Для того чтобы обеспечить заданную начальную напряженность электрического поля E_0 над поверхностью пленки, приложенное напряжение вычислялось следующим образом:

$$V = E_0(L_z - \delta(1 - 1/\varepsilon_l))$$

(δ — толщина пленки).

Результаты компьютерного моделирования. Параллельные вычисления выполнялись с использованием всех ядер графического процессора (GPU) Titan-V (внутренняя память 12 Гб, 5120 ядер). Для описанного выше трехмерного LBM-моделирования динамики диэлектрических пленок во внутренней памяти GPU можно разместить трехмерные решетки размером до $560 \times 560 \times 144$ (приблизительно $45 \cdot 10^6$ узлов). Производительность расчетов в настоящей работе составляла более $130 \cdot 10^6$ узлов в секунду (million node updates per second (MNUPS)).

На рис. 3 показан процесс перфорации тонкой пленки с диэлектрической проницаемостью ε_l после включения напряжения между горизонтальными электродами. Неоднородность поля создавалась с помощью круглой изолирующей вставки 1 радиусом R_0 , расположенной в центре нижнего электрода.

После подачи высокого напряжения диэлектрическая жидкость втягивается в области повышенного электрического поля вблизи краев вставки. При этом в зависимости от толщины пленки может произойти ее разрыв и как следствие появление новой контактной линии (см. рис. 3, а, г). Далее жидкость продолжает двигаться не только за счет действия электростатических сил, но и по инерции (см. рис. 3, в, е).

Безразмерным параметром, определяющим поведение капель жидкости в чисто гравитационном поле, является число Бонда $Bo = \rho g R^2 / \sigma$, где R — характерный размер

Таблица 1

Время до начала разрыва пленки жидкости при постоянной толщине этой пленки		
R_0	Bo_E^*	t
20	1,71	11 400
30	3,84	6700
40	6,82	4400
60	15,30	3200
80	27,30	3400
100	42,60	4000
150	96,00	5700

Таблица 2

Время до начала разрыва пленки жидкости при постоянном радиусе вставки $R_0 = 40$			
δ	Bo_E	Bo_E^*	t
20	1,71	6,82	4400
30	2,56	4,55	5800
40	3,41	3,41	7500
50	4,27	2,73	9400
60	5,12	2,27	11 000

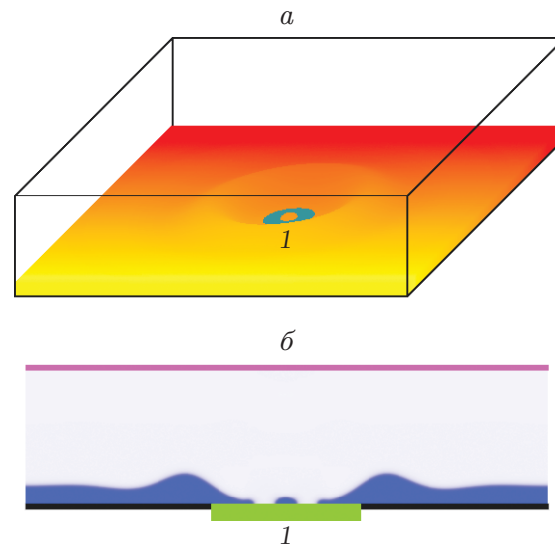


Рис. 4. Процесс перфорации пленки с образованием капли (а) и распределение плотности жидкости в центральном вертикальном сечении (б) при $t = 3400$ единиц LBM, $\delta = 20$, $R_0 = 80$, $\epsilon_l = 4$, $Bo = 0,018$, $Bo_E^* = 27,3$ (расчетная сетка $560 \times 560 \times 144$):

I — круглая токонепроводящая вставка в нижнем электроде

капли. Очевидно, что степень деформации каплей диэлектрической жидкости увеличивается с увеличением электрического поля. Обычно используется электрическое число Бонда $Bo_E = \epsilon_0(\epsilon_l - 1)E_0^2 R / (\epsilon_l \sigma)$. Вместе с тем для процесса перфорации диэлектрических пленок использование аналогичного определения $Bo_E = \epsilon_0(\epsilon_l - 1)E_0^2 \delta / (\epsilon_l \sigma)$ приводит к противоречиям. Однако результаты расчетов показали, что при значениях параметров $\delta = 20$, $\epsilon_l = 4$, $\sigma = 5,1$, $\tau = 0,58$, $B = 1$, $\beta = 90^\circ$, т. е. при постоянном значении $Bo_E = 1,71$, время начала перфорации (в единицах LBM) сильно зависит от радиуса непроводящей вставки R_0 в нижнем электроде (табл. 1).

При $R_0 \leq 60$ время до начала разрыва пленки уменьшается с увеличением радиуса вставки. При $R_0 \geq 80$ перфорация пленки происходит позднее, чем при $R_0 = 60$ (см. табл. 1). Это может быть обусловлено тем, что разрыв пленки начинается не в центре вставки, а вдоль некоторой окружности (рис. 4), т. е. меняется механизм разрыва, и процесс перфорации замедляется. При этом над центром вставки остается капля жидкости, т. е. происходит более сложный гидродинамический процесс.

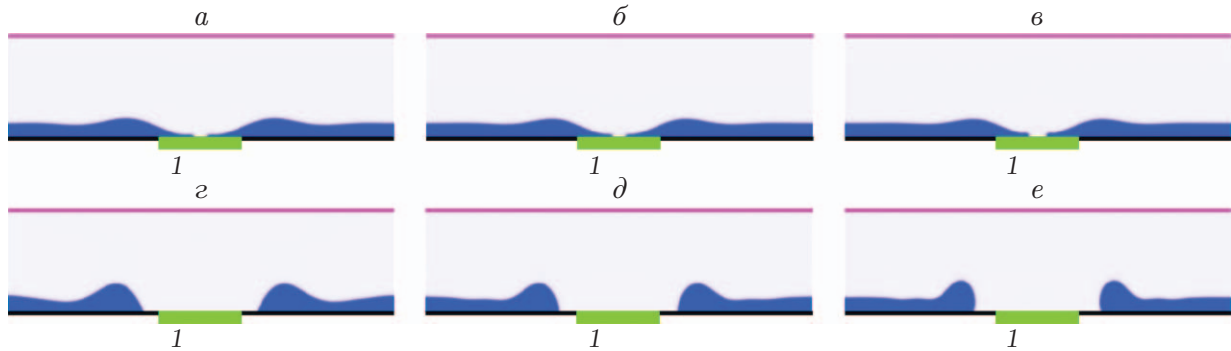


Рис. 5. Распределение плотности жидкости в центральном сечении при $\delta = 20$, $R_0 = 60$, $\varepsilon_l = 4$, $\text{Bo} = 0,018$, $\text{Bo}_E^* = 12,9$, различных значениях контактного угла и в различные моменты времени:

a, z — $\beta = 60^\circ$, $б, д$ — $\beta = 90^\circ$, $в, е$ — $\beta = 130^\circ$; a — $t = 4800$ единиц LBM, $б$ — $t = 3500$ единиц LBM, $в$ — $t = 3200$ единиц LBM, z — $t = 8200$ единиц LBM, $д$ — $t = 5800$ единиц LBM, $е$ — $t = 5000$ единиц LBM; 1 — круглая токонепроводящая вставка в нижнем электроде

Также была проведена серия расчетов для постоянного радиуса изоляционной вставки $R_0 = 40$. При увеличении толщины пленки δ время до ее разрыва t увеличивалось (табл. 2), электрическое число Бонда Bo_E также увеличивалось, но должно было уменьшаться. Поэтому в рассматриваемом случае предлагается использовать модифицированное определение электрического числа Бонда, зависящее от толщины пленки δ и от радиуса изоляционной вставки R_0 :

$$\text{Bo}_E^* = \varepsilon_0(\varepsilon_l - 1)E_0^2 R_0^2 / (\delta \varepsilon_l \sigma).$$

Такое определение позволяет дать адекватную качественную оценку процесса перфорации пленок жидкого диэлектрика, по крайней мере в случае разрыва пленки в центре вставки без образования капли.

При реалистичных значениях физических параметров $\delta = 2$ мм, $R_0 = 8$ мм, $\varepsilon_l = 7$, $\sigma = 0,073$ Н/м и напряженности электрического поля $E_0 = 10$ кВ/см модифицированное электрическое число Бонда равно $\text{Bo}_E^* = 3,33$.

На рис. 5 показано влияние смачиваемости поверхности на процесс перфорации пленки. Время до момента разрыва пленки при $\beta = 60; 90; 130^\circ$ составило 4800, 3500, 3200 единиц LBM. При уменьшении смачиваемости поверхности время до начала перфорации уменьшается.

Заключение. С помощью трехмерного моделирования с использованием метода решеточных уравнений Больцмана показано перфорирование пленок диэлектрической жидкости на твердой поверхности электрода, содержащего круглую непроводящую вставку. При постоянном значении напряженности электрического поля время перфорации увеличивается с увеличением толщины пленки и существенно зависит от радиуса вставки. В случае умеренных значений радиуса вставки для качественной оценки времени перфорации можно использовать модифицированное электрическое число Бонда, в котором учитываются оба фактора. В случае больших радиусов вставки в процессе перфорации наблюдается образование капли над центром вставки. При этом время до начала перфорации увеличивается, а зависимость времени от радиуса вставки принципиально меняется. На поверхностях с меньшей смачиваемостью (с большим контактным углом) процесс перфорации развивается быстрее, чем на нейтрально или сильно смачиваемых поверхностях.

Таким образом, показана возможность перфорации диэлектрических пленок жидкости с помощью импульсного электрического поля. Очевидно, что в пленке можно создать не одно отверстие, а несколько. При этом образуются новые контактные линии, что будет способствовать увеличению теплоотдачи с подложки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Potash M., Wayner P. C.** Evaporation from a two-dimensional extended meniscus // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1972. V. 15, N 10. P. 1851–1863.
2. **Wayner P. C.** A dimensionless number for the contact line evaporative heat sink // J. Heat Transfer. 1989. V. 111, N 3. P. 813–815.
3. **Karchevsky A. L., Marchuk I. V., Kabov O. A.** Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line // Appl. Math. Modell. 2016. V. 40, N 2. P. 1029–1037.
4. **Ajaev V. S., Kabov O. A.** Heat and mass transfer near contact lines on heated surfaces // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 108. P. 918–932.
5. **Taylor G.** Desintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci. 1964. V. 280, N 1382. P. 383–397.
6. **Imano A. M., Beroual A.** Deformation of water droplets on solid surface in electric field // J. Colloid Interface Sci. 2006. V. 298, N 2. P. 869–879.
7. **Liu Y., Oh K., Bai J. G., et al.** Manipulation of nanoparticles and biomolecules by electric field and surface tension // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2008. V. 197, N 25–28. P. 2156–2172.
8. **Vancauwenberghe V., Di Marco P., Brutin D.** Wetting and evaporation of a sessile drop under an external electrical field: A review // Colloids Surfaces. A. Physicochem. Engng Aspects. 2013. V. 432. P. 50–56.
9. **Corson L. T., Tsakonas C., Duffy B. R., et al.** Deformation of a nearly hemispherical conducting drop due to an electric field: Theory and experiment // Phys. Fluids. 2014. V. 26, N 12. 122106.
10. **Corson L. T., Mottram N. J., Duffy B. R., Wilson S. K.** Dynamic response of a thin sessile drop of conductive liquid to an abruptly applied or removed electric field // Phys. Rev. E. 2016. V. 94, N 4. 043112.
11. **Gibbons M. J., Howe C. M., Di Marco P., Robinson A. J.** Local heat transfer to an evaporating sessile droplet in an electric field // J. Phys. Conf. Ser. 2016. V. 745, N 3. 032066.
12. **Akbari M., Mortazavi S.** Three-dimensional numerical simulation of deformation of a single drop under uniform electric field // J. Appl. Fluid Mech. 2017. V. 10, N 2. P. 693–702.
13. **Medvedev D. A., Kupershtokh A. L.** Electric control of dielectric droplets and films // Phys. Fluids. 2021. V. 33, N 12. 122103.
14. **Wang Y., Sun D., Zhang A., Yu B.** Numerical simulation of bubble dynamics in the gravitational and uniform electric fields // Numer. Heat Transfer. Pt A. Applications. 2017. V. 71, N 10. P. 1034–1051.
15. **Kupershtokh A. L., Medvedev D. A.** Dynamics of bubbles in liquid dielectrics under the action of an electric field: lattice Boltzmann method // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1359. 012116.
16. **Zubarev N.** Self-similar solutions for conic cusps formation at the surface of dielectric liquids in electric field // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. 055301(R).
17. **Shan X., Chen H.** Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components // Phys. Rev. E. 1993. V. 47, N 3. P. 1815–1819.
18. **Kupershtokh A. L., Medvedev D. A., Karpov D. I.** On equations of state in a lattice Boltzmann method // Comput. Math. Appl. 2009. V. 58, N 5. P. 965–974.

19. **Kupershtokh A. L.** Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59, N 7. P. 2236–2245.
20. **Qian Y. H., d’Humières D., Lallemand P.** Lattice BGK models for Navier — Stokes equation // Europhys. Lett. 1992. V. 17, N 6. P. 479–484.
21. **Koelman J. M. V. A.** A simple lattice Boltzmann scheme for Navier — Stokes fluid flow // Europhys. Lett. 1991. V. 15, N 6. P. 603–607.
22. **Куперштох А. Л.** Учет действия объемных сил в решеточных уравнениях Больцмана // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика и информатика. 2004. Т. 4, № 2. С. 75–96.
23. **Qian Y. H., Chen S.** Finite size effect in lattice-BGK models // Intern. J. Modern Phys. C. 1997. V. 8, N 4. P. 763–771.
24. **Куперштох А. Л.** Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость — пар методом решеточных уравнений Больцмана // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика и информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 29–42.
25. **Chen S., Doolen G. D.** Lattice Boltzmann method for fluid flow // Annual Rev. Fluid Mech. 1998. V. 30. P. 329–364.
26. **Hardy J., de Pazzis O., Pomeau Y.** Molecular dynamics of a classical lattice gas: transport properties and time correlation functions // Phys. Rev. A. 1976. V. 13, N 5. P. 1949–1961.
27. **Ландау Л. Д.** Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1982.

*Поступила в редакцию 15/VI 2022 г.,
после доработки — 15/VI 2022 г.
Принята к публикации 25/VII 2022 г.*
