

**ВЕСТНИК**

ISSN 1684-0259



**КРАСНОЯРСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ**

**2005'4**

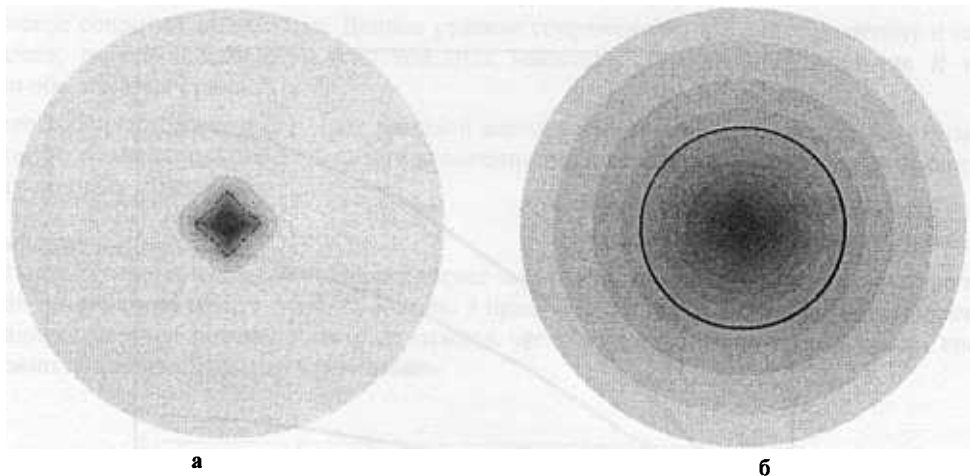


Рис. 6. Распределение температуры в окрестности тепловой трубы с четырьмя ребрами (ширина 10 см) на начальной (а,  $\Delta t = 1$  сут) и промежуточной стадии процесса (б,  $\Delta t = 60$  сут)

Проведенные теоретические исследования показали:

1. Необходимые параметры замораживания грунта могут быть получены при передаче по тепловой трубе ~300 Вт тепловой мощности, при этом обеспечивается замораживание объема грунта с радиусом 1.5 м, т.е. для эффективного замораживания тепловые трубы должны быть размещены с расстоянием между собой 3 м.

2. Минимальное значение внешнего радиуса тепловой трубы, при котором возможно замораживание необходимого объема грунта, составляет  $\approx 5$  см. Такой эффективный радиус может быть получен с помощью применения четырех ребер шириной 10 см и толщиной 2 мм по всей длине подземной части трубы. Радиус самой тепловой трубы при этом может быть 15÷20 мм.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. - М.: Наука, 1989.

#### DYNAMICS OF THE DIRT FREEZING WITH THE HELP HEAT TUBES

E.N. Vasilyev, V.A. Derevyanko, A.V. Makuha

*Problems of the dirt freezing under industrial objects with the help heat tubes are discussed. Thermophysical characteristics of the dirt and heat transfer properties of the power heat tube are determined experimentally. A computing modeling of the dirt freezing process is carried. Influence of heat tube parameters on the dirt freezing dynamics is studied.*

УДК 537.212

#### ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕКТРОДОВ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ<sup>1</sup>

А.Л. Куперштох\*

*Для ряда задач электростатики, а также при исследовании пробоя диэлектриков очень важно знать не только максимальное значение электрического поля на поверхности электродов, но и распределение электрического поля по поверхности электродов. Предложена приближенная формула для распределения электрического поля на поверхности сферических электродов. Эта формула очень полезна и позволяет получить приближенные аналитические решения ряда задач электростатики.*

Во многих задачах электростатики, а также при исследовании пробоя диэлектриков очень важно знать не только максимальное значение электрического поля, но и распределение электрического поля по поверхно-

<sup>1</sup> Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 03-02-16474).

\* © А.Л.Куперштох, Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, Новосибирск (Россия); E-mail: skn@hydro.nsc.ru, 2005.

сти электродов. Численные методы расчета (решение уравнения Лапласа конечно-разностным методом, метод граничных элементов и метод конечных элементов) позволяют рассчитать электрическое поле для большей части конкретных задач прикладного характера [1, 2]. Тем не менее аналитические решения очень полезны для расчета сил, действующих на металлические сферы, а также для моделей, дающих оценку электрической прочности систем, использующих как жидкие, так и газообразные диэлектрики.

Для многих конкретных задач при маленьком расстоянии между сферическими электродами важно правильно учесть распределение электрического поля вдоль поверхности только в ограниченной области около оси симметрии, где напряженность электрического поля достаточно высока.

Одной из таких проблем является расчет силы притяжения, действующей на две сферические металлические частицы, расположенные на малом расстоянии друг от друга [3, 4]. Другим примером является стохастический процесс зарождения электрического пробоя диэлектриков. Действительно, только малая часть площади электрода около оси симметрии, где напряженность электрического поля достаточно высока, вносит основной вклад в вероятность зарождения пробоя [5 - 7]. В [5 - 9] было показано, что в течение интервала времени  $t$  зарождения пробоя не произойдет с вероятностью  $P_-(t) = \exp(-H)$ . Величина

$$H(t) = \int_0^t \left( \int_S \mu(E) ds \right) dt \quad (1)$$

имеет физический смысл безразмерного аналога статистического времени запаздывания и может быть названа интегралом действия поля. Функция  $\mu(E)$ , описывающая процесс макроскопически, зависит от локального электрического поля и является плотностью вероятности зарождения пробоя с маленького элемента площади электрода за короткий интервал времени. В некоторых случаях функция  $\mu(E)$  может быть восстановлена из экспериментальных данных, полученных в серии пробоев конкретного диэлектрика [5 - 7, 9, 10].

### 1. Два параллельных металлических цилиндра

Для двух параллельных металлических цилиндров применим хорошо известный метод изображений [11]. Он позволяет получить точное решение для распределения электрического поля. Рассмотрим два параллельных цилиндра равного радиуса  $R$  с зазором между ними  $d$  (рис. 1). Расстояние между осями будет  $L = 2R + d$ .

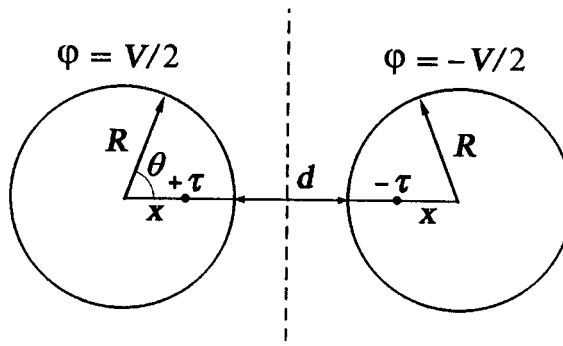


Рис. 1. Метод изображений для двух металлических параллельных цилиндров

Используя метод изображений, можно получить, что поле между цилиндрами эквивалентно полю от двух нитей, расположенных параллельно осям цилиндров и заряженных равномерно по длине зарядами  $+τ$  and  $-τ$  на единицу длины. Разность потенциалов между цилиндрами равна

$$V = 4τ \ln((L - R - x)/(R - x)). \quad (2)$$

Здесь  $x$  расстояние от заряженных нитей до осей цилиндров

$$x = L/2 - \sqrt{(L/2)^2 - R^2} = R(1 + \beta - \sqrt{2\beta + \beta^2}), \quad (3)$$

где  $\beta = d/2R$  – безразмерная величина зазора между электродами. Среднее значение электрического поля  $\langle E_0 \rangle = V/d$  вдоль линии перпендикулярной осям электродов равно

$$\langle E_0 \rangle = \frac{2τ}{\beta R} \ln((L - R - x)/(R - x)). \quad (4)$$

Точное значение электрического поля на поверхности цилиндра

$$E = \frac{2\tau}{R} \frac{\sqrt{2\beta + \beta^2}}{(\beta + 1 - \cos\theta)}. \quad (5)$$

Здесь  $\theta$  – полярный угол, отсчитываемый от точки на поверхности цилиндра, расположенной напротив другого электрода.

Можно написать выражение для напряженности электрического поля на поверхности цилиндра через полярный угол  $\theta$  и параметр  $\beta$ :

$$E = \frac{a(\beta) \langle E_0 \rangle}{1 + (1 - \cos\theta) / \beta}. \quad (6)$$

Эта формула очень простая и удобна для аналитических вычислений. Коэффициент усиления электрического поля в точке  $\theta = 0$  по сравнению со средним полем  $\langle E_0 \rangle$  равен

$$a(\beta) = \frac{\sqrt{2\beta + \beta^2}}{\ln(1 + \beta + \sqrt{2\beta + \beta^2})}. \quad (7)$$

Для маленьких зазоров можно использовать первые три члена в разложении  $a(\beta)$  в ряд по параметру  $\beta$

$$a(\beta) \approx 1 + \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{45}\beta^2. \quad (8)$$

Сравнение результатов, полученных по этой формуле (кривая 2) с точным решением (кривая 1), показано на рис. 2. Распределение электрического поля вдоль поверхности электродов (рис. 3) достаточно хорошо описывается уравнением (6) до значений  $\beta = 2$  с точностью лучшей, чем 3 %, если использовать приближение (8).

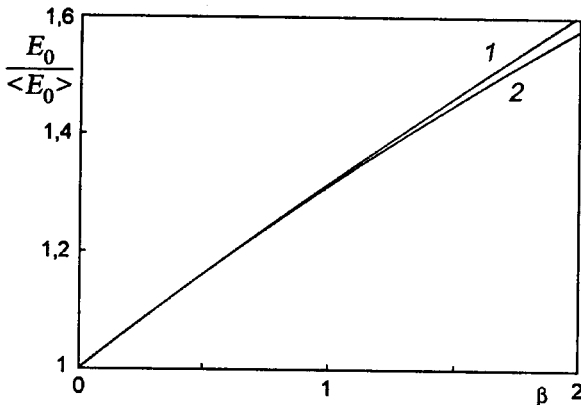


Рис. 2. Коэффициент увеличения электрического поля  $a(\beta)$ : 1 – точное решение; 2 – разложение (8)

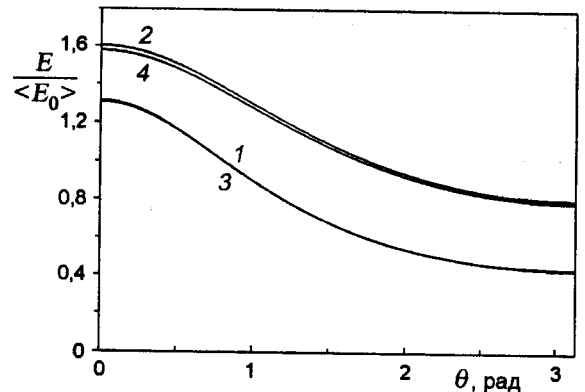


Рис. 3. Распределение электрического поля вдоль поверхности цилиндрического электрода. Кривые 1 и 2 – точное решение, кривые 3 и 4 – формула (6) с использованием приближения (8);  $\beta = 1$  для кривых 1 и 3;  $\beta = 2$  для кривых 2 и 4

### 2. Две металлические сферы равного радиуса

К сожалению, в случае двух сфер метод изображений приводит к бесконечной последовательности точечных зарядов изображений [3, 4]. Для сферических электродов равного радиуса  $R$ , имеющих потенциалы  $+V/2$  и  $-V/2$ , можно вычислить величины зарядов  $q_i$ , расположенных внутри положительно заряженной сферы, и координаты этих зарядов относительно центра сферы  $x_i$ , используя рекуррентные уравнения:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{V}{2} R, \quad x_0 = 0, \\ q_{i+1} &= q_i R / (L - x_i), \\ x_{i+1} &= R^2 / (L - x_i). \end{aligned} \quad (9)$$

Соответствующие отрицательные заряды-изображения расположены внутри отрицательно заряженной сферы.

Электрическое поле на поверхности сферы записывается в виде бесконечного ряда:

$$E = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \left[ \frac{R - x_i \cos \theta}{(R^2 - 2Rx_i \cos \theta + x_i^2)^{3/2}} + \frac{R - (L - x_i) \cos \theta}{(R^2 - 2R(L - x_i) \cos \theta + (L - x_i)^2)^{3/2}} \right]. \quad (10)$$

К сожалению, формулу (10) можно использовать, если учитывать не менее чем 100 членов ряда для  $\beta > 0,005$ , и не менее чем 1000 членов для  $\beta \geq 0,0001$ , так как ряд (10) плохо сходится при малых значениях  $\beta$ .

Другим аналитическим методом является решение уравнения Лапласа в бисферических координатах [12]. Решением в области между электродами (рис. 4) является ряд по полиномам Лежандра:

$$E(\xi, \eta) = \frac{\langle E_0 \rangle d \sqrt{2(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)}}{2R \operatorname{sh} \xi_1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi_1} P_l(\cos \eta)}{\operatorname{sh}((2l+1)\xi_1)} \times \left\{ \operatorname{sh} \left( \left( l + \frac{1}{2} \right) (\xi + \xi_1) \right) \operatorname{sh} \xi + 2(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \left( l + \frac{1}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \left( l + \frac{1}{2} \right) (\xi + \xi_1) \right) \right\}. \quad (11)$$

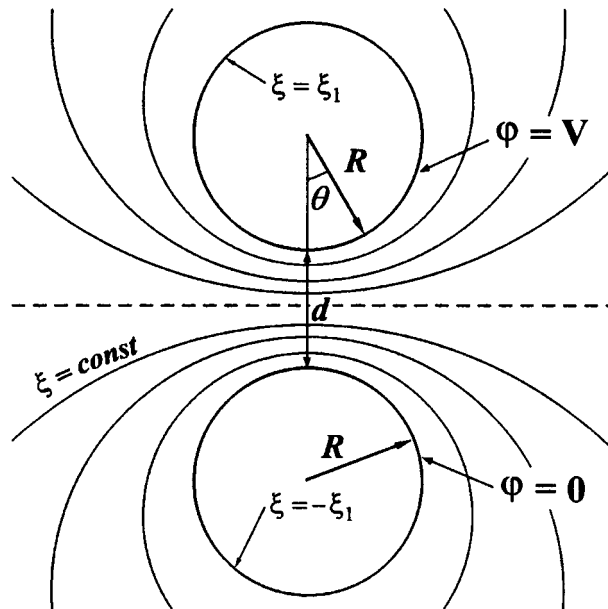


Рис. 4. Конфигурация сферических электродов и поверхностей равного потенциала электрического поля  $\xi = \text{const}$

Аналогично получается формула для случая, когда потенциалы электродов равны  $+V/2$  и  $-V/2$ . Здесь  $\langle E_0 \rangle = V/d$  – среднее значение напряженности электрического поля вдоль оси между электродами,  $\xi$  и  $\eta$  – бисферические координаты (потенциал и напряженность электрического поля не зависят от азимутального угла  $\alpha$  из-за симметрии задачи,  $-\xi_1 < \xi < \xi_1$ ,  $0 < \eta < \pi$ ),  $P_l$  – полиномы Лежандра индекса  $l$ ,  $\xi_1 = \ln(1 + \beta + \sqrt{\beta(2 + \beta)})$ . Связь между бисферической координатой  $\eta$  и полярным углом на сфере  $\theta$ , отсчитываемым от оси симметрии, дается выражением

$$\cos \eta = \frac{1 - (1 + \beta) \cos \theta}{1 + \beta - \cos \theta}. \quad (12)$$

Координата  $z$  вдоль оси симметрии выражается через бисферическую координату  $\xi$  как

$$z = \frac{R \operatorname{sh} \xi_1 \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi + 1}. \quad (13)$$

При малых значениях параметра  $\beta$  ряд (11) сходится несколько лучше. Тем не менее для расчета электрического поля на поверхности электродов необходимо учитывать не менее чем 100 членов ряда для  $\beta \sim 0,001$ .

Для многих конкретных задач в случае малых зазоров распределение электрического поля по поверхности достаточно правильно учесть только в ограниченной области вблизи оси симметрии, где напряженность электрического поля высока. На рис. 5 показано распределение модуля электрического поля между сферическими электродами, полученное методом конечных элементов с использованием компьютерной программы "Орега-3D".

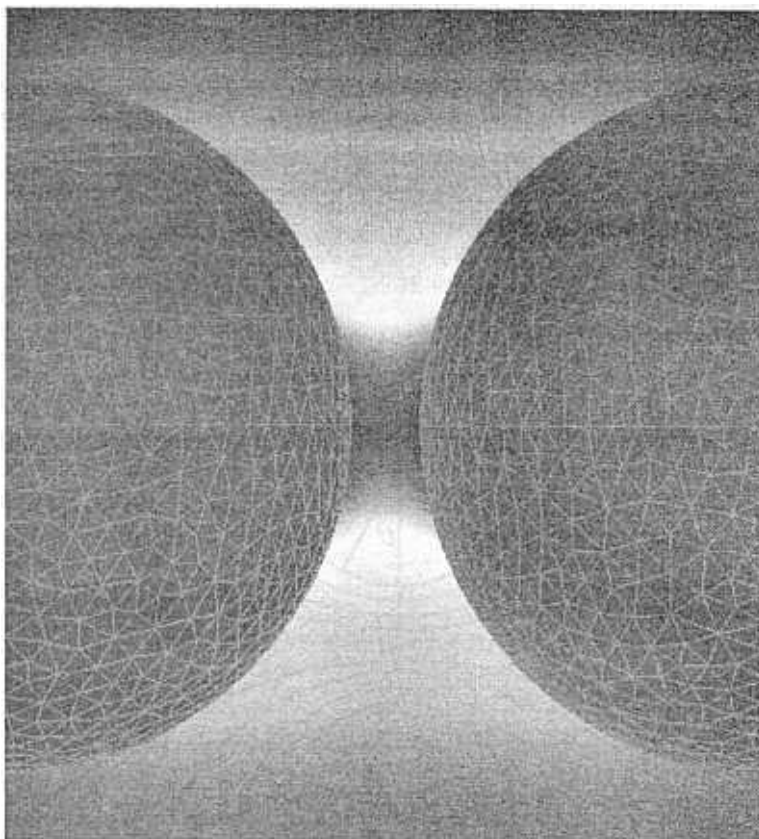


Рис. 5. Распределение модуля электрического поля между сферическими электродами, полученное методом конечных элементов

Использовалась расчетная область, четвертая часть которой с сеткой конечных элементов на поверхности показана на рис. 6. На боковых поверхностях задавалось граничное условие в виде равенства нулю нормальной компоненты электрического поля.

Для малых зазоров ( $\beta < 0,01$ ), формула  $E = V/l$ , которая справедлива для квазиоднородного электрического поля, была использована в [8] для расчета приближенного распределения электрического поля по поверхности сферических электродов (рис. 7)

$$E = \frac{\langle E_0 \rangle}{1 + (1 - \cos \theta) / \beta} \quad (14)$$

Близкое по смыслу приближение было использовано Сахаровым [13] для вычисления силы притяжения между двумя близко расположенными электродами, поверхность которых можно аппроксимировать параболоидом (при этом  $l = d + (x^2 + y^2) / R$ ). Предложенную им формулу можно записать в виде

$$E = \frac{\langle E_0 \rangle}{1 + \sin^2 \theta / (2\beta)} \quad (15)$$

При относительно малых углах обе формулы дают близкие друг к другу результаты, однако приближение (15), в отличие от (14), в принципе нельзя использовать для углов  $\theta > \pi/2$  (рис. 9).

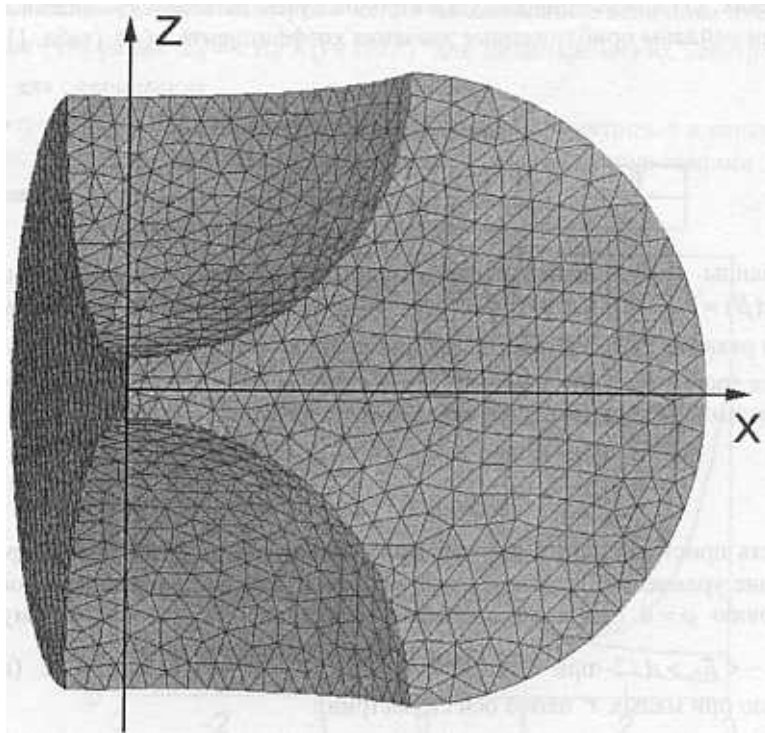


Рис. 6. Четвертая часть расчетной области. Показана сетка конечных элементов на поверхности области

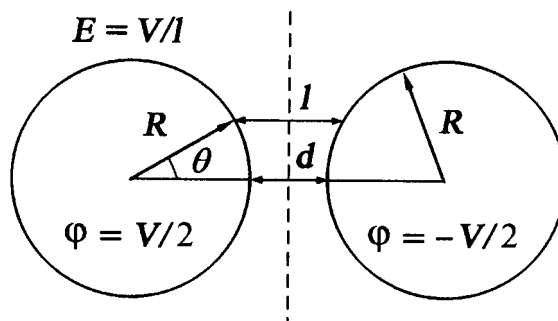


Рис. 7. Две металлические сферы с зазором  $d$  между ними

Несмотря на то, что уравнение (14) плохо описывает распределение электрического поля по поверхности при больших углах  $\theta$ , соответствующая ошибка в некоторых случаях может быть мала. Например, только небольшая часть площади электродов около оси симметрии, где напряженность электрического поля достаточно высока, вносит основной вклад в вероятность зарождения пробоя [5 - 7].

В этой области, для малых зазоров между сферическими электродами, приближенная формула (14) практически совпадает с точным решением, полученным путем решения уравнения Лапласа в бисферических координатах. Например, отклонение от точного решения меньше чем 2 % от максимальной напряженности поля для  $\beta = 0,02$  [5, 7].

В [7, 10] было предложено значительно расширить область применимости формулы (14) для этой центральной области, если учесть коэффициент усиления электрического поля  $a(\beta)$  на полюсе электрода ( $\theta = 0$ ) по сравнению со значением, усредненным вдоль оси  $\langle E_0 \rangle = V/d$  :

$$E = \frac{a(\beta) \langle E_0 \rangle}{1 + (1 - \cos \theta) / \beta} \quad (16)$$

Эта приближенная формула выглядит абсолютно так же, как выражение (6), являющееся точным для цилиндрических электродов.

В численных расчетах [7] для сферических электродов путем решения уравнения Лапласа в бисферических координатах были найдены приближенные значения коэффициента  $a(\beta)$  (табл. 1).

Таблица 1

Коэффициент  $a(\beta)$

$\beta$	0,01	0,05	0,066	0,1	0,2
$a(\beta)$	1,007	1,034	1,044	1,068	1,13

Данные этой таблицы могут быть аппроксимированы с очень хорошей точностью выражением  $a = 1 + 0,666\beta$  (или  $a(\beta) = 1 + 2/3\beta$ ) для  $\beta < 0,1$ . Интересно, что второй член разложения для сферических электродов получился равным  $2/3\beta$ , вместо  $1/3\beta$  для цилиндрических электродов.

Действительно, для сравнения можно решить уравнение Лапласа в области между цилиндрическими, а также между сферическими электродами в случае малых зазоров:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{(D-2)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \tag{17}$$

здесь  $D$  – размерность пространства ( $D = 2$  для цилиндрических, а  $D = 3$  для сферических электродов). Было получено решение уравнения Лапласа в степенном виде в области малых зазоров, которое удовлетворяет граничному условию  $\varphi = 0$  при  $z = 0$  и приближенно удовлетворяет граничному условию на поверхности электрода  $\varphi = -\langle E_0 \rangle d/2$  при  $z = d/2 + R(1 - \sqrt{1 - r^2/R^2}) \approx d/2 + r^2/2R$  (приближение параболической поверхностью при малых  $r$  около оси симметрии):

$$\varphi = -\langle E_0 \rangle z + \frac{2\langle E_0 \rangle (D-1)\beta}{3[1-(D-1)\beta/3]} \left( \frac{z}{4} + \frac{3r^2 z}{(D-1)d^2} - \frac{z^3}{d^2} \right). \tag{18}$$

Распределение электрического поля вдоль оси симметрии ( $r = 0$ ) в этом приближении является параболой

$$E = \langle E_0 \rangle \left[ 1 + \frac{2(D-1)\beta}{3(1-(D-1)\beta/3)} \left( \frac{3z^2}{d^2} - \frac{1}{4} \right) \right], \tag{19}$$

которая при малых  $\beta$  практически совпадает с точным решением, полученным путем решения уравнения Лапласа в бисферических координатах (рис. 8). Видно, что электрическое поле не совсем постоянно вдоль линий напряженности электрического поля даже при малых зазорах, и максимальное значение на поверхности электрода несколько выше, чем усредненное вдоль оси симметрии значение  $\langle E_0 \rangle$ .

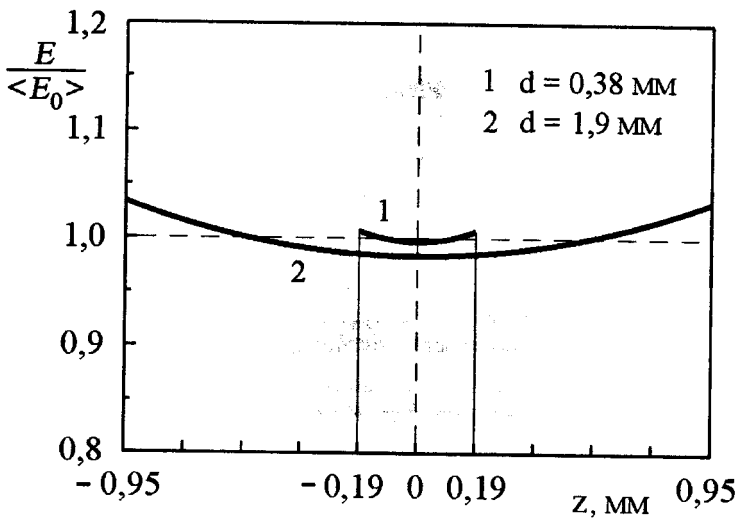


Рис. 8. Распределения напряженности электрического поля вдоль оси симметрии между двумя сферическими электродами, полученные путем решения уравнения Лапласа в бисферических координатах при  $\beta = 0,01$  (кривая 1) и при  $\beta = 0,05$  (кривая 2);  $R = 19$  мм



Действительно, при малых  $\beta$  главный член разложения максимальной величины электрического поля на поверхности электродов (19) равен  $E_0 = \langle E_0 \rangle (1 + 1/3\beta)$  для цилиндрических электродов (сравни с (8)) и  $E_0 = \langle E_0 \rangle (1 + 2/3\beta)$  для сферических.

Распределение электрического поля на поверхности сферических электродов в центральной области около оси симметрии (рис. 9) хорошо описывается формулой (16) при использовании  $a(\beta) = 1 + 2/3\beta$  для  $\beta < 0,2$  (рис. 10, кривая 2).

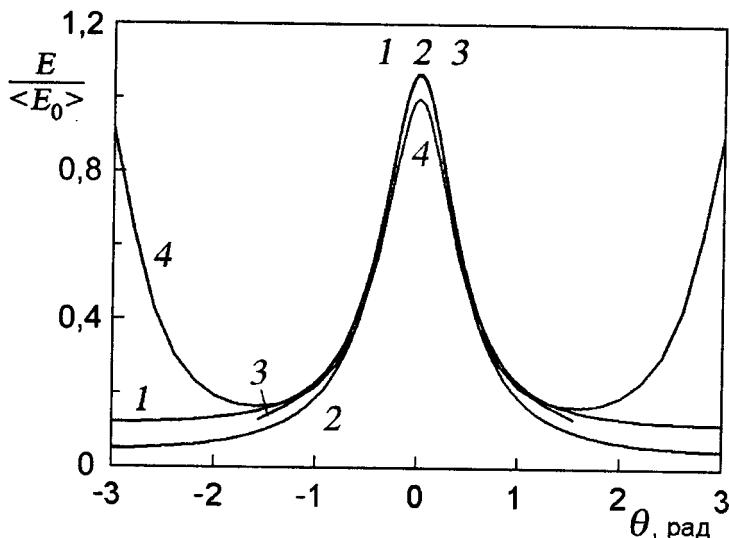


Рис. 9. Распределение электрического поля по поверхности сферических электродов при  $\beta = 0,1$ . Кривая 1 – метод изображений, кривая 2 – выражение (16) с использованием  $a(\beta) = 1 + 2/3\beta$ , кривая 3 – метод конечных элементов, кривая 4 – формула (15)

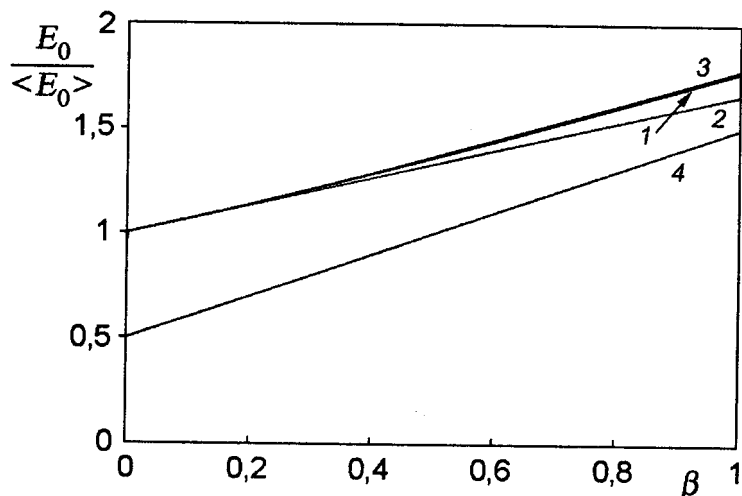


Рис. 10. Коэффициент усиления электрического поля для сферических электродов  $a(\beta)$ . 1 – метод изображений, 2 – разложение  $a(\beta) = 1 + 2/3\beta$ , 3 – выражение (20), 4 – асимптотика  $E_0 = (\beta + 1/2) \langle E_0 \rangle$

В качестве очень хорошей аппроксимации для  $a(\beta)$  в случае сферических электродов при значениях параметра  $\beta > 0,2$  может быть также использовано выражение, приведенное в [14, 15] (рис. 10, кривая 3),

$$a(\beta) = \left( 1 + 2\beta + \sqrt{8 + (1 + 2\beta)^2} \right) / 4. \quad (20)$$

Значения, полученные по этой формуле, практически совпадают с точным решением для всех значений параметра  $\beta$  от 0 до бесконечности (максимальное отклонение  $\Delta \approx 0,6\%$  при  $\beta \approx 0,8$ ). Для малых значений параметра  $\beta$  до  $\beta \approx 2$ , может быть использовано также разложение формулы (20) в ряд по  $\beta$ :

$$a(\beta) = 1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{4}{27}\beta^2 - \frac{8}{243}\beta^3. \quad (21)$$

В этом разложении второй член тоже равен  $2/3\beta$ .

Очевидная асимптотика  $E_0 = (\beta + 1/2) < E_0 >$  при  $\beta \rightarrow \infty$  (разность потенциалов двух шаров с зарядами в центрах) близка к точному решению для  $\beta \geq 10$  (рис. 10, кривая 4). Разложение формулы (20) при  $\beta \rightarrow \infty$  дает эту же асимптотику.

### 3. Прикладные задачи

Выражение для распределения электрического поля в форме (16) очень удобно для аналитических расчетов.

Одной из задач, в которых только небольшая часть поверхности электрода вблизи оси симметрии вносит основной вклад, является задача вычисления сил, действующих на две сферы одинакового радиуса, размещенных на малом расстоянии друг от друга, если задана разность потенциалов между ними  $V$ . Сила притяжения, действующая вдоль оси симметрии, равна

$$F_z = \int_S \frac{E^2}{8\pi} \cos \theta ds, \quad (22)$$

где  $S$  – поверхность электрода.

Другим примером, как уже упоминалось, является задача определения вероятности зарождения пробоя. В [5 - 9] было показано (1), что определяющий параметр - значение интеграла по поверхности электрода:

$$J = \int_S \mu(E) ds. \quad (23)$$

Здесь функция  $\mu(E)$  – плотность вероятности зарождения пробоя за короткий интервал времени на маленьком элементе площади электрода, величина электрического поля вблизи которого равна  $E$  [5 - 8]. Конкретный вид функции  $\mu(E)$  тесно связан с физической природой микроскопических процессов, происходящих на поверхности электродов, и зависит от свойств конкретного диэлектрика. Функция  $\mu(E)$  резко возрастает с увеличением электрического поля. В общем случае эта функция зависит также от материала и шероховатости электродов. В некоторых случаях можно восстановить значения этой функции по данным, полученным в сериях пробоев [5 - 7].

В обоих примерах можно перейти от интегрирования по полярному углу к интегрированию по электрическому полю, используя приближенную формулу (16). В общем случае при интегрировании функции  $f(E)$  по поверхности сферы  $S$  получаем

$$\int_S f(E) ds = \pi d R E_0 \int_{E_1}^{E_0} \frac{f(E)}{E^2} dE. \quad (24)$$

Здесь  $E_0 = a(\beta) < E_0 >$  – максимальное значение электрического поля на полюсе электрода при  $\theta = 0$ ;  $E_1$  – минимальное значение электрического поля  $E_1 = E_0 / (1 + 2/\beta)$  при  $\theta = \pi$ .

#### 3.1. Сила притяжения между сферами

В случае вычисления сил, действующих на сферы, необходимо подставить в (24) функцию

$$f(E) = \frac{E^2}{8\pi} \left( 1 - \beta \left( \frac{E_0}{E} - 1 \right) \right). \quad (25)$$

Отсюда в данной работе получено приближенное аналитическое выражение для силы притяжения путем интегрирования (24) по величине электрического поля от  $E_1$  до  $E_0$ :

$$F_z = \pi d R \left[ (1 + \beta) \left( 1 - \frac{1}{1 + 2/\beta} \right) - \beta \ln \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) \right] \frac{E_0^2}{8\pi}. \quad (26)$$

Другая приближенная формула для  $\beta \ll 1$  была получена в [3]:

$$F_z = \frac{Q^2}{L^2} \frac{4}{\beta [1 + \ln(2/\beta)]^2}. \quad (27)$$

Здесь  $Q$  – абсолютная величина зарядов на сферах;  $L$  – расстояние между их центрами. Эта формула показывает, насколько сила притяжения отличается от простого кулоновского взаимодействия. Отклонения этих формул от решения, полученного методом изображений, показаны на рис. 11 (кривые 1 и 2 соответственно). К сожалению, наш метод (24) не может быть использован для вычисления полного заряда  $Q$  на сфере, так как ошибка формулы (16) в области  $\theta > \pi/2$  достаточно велика. Поэтому в качестве значения  $Q$  в (27) использовалось практически точное значение, полученное методом изображений с учетом 10 000 членов ряда.

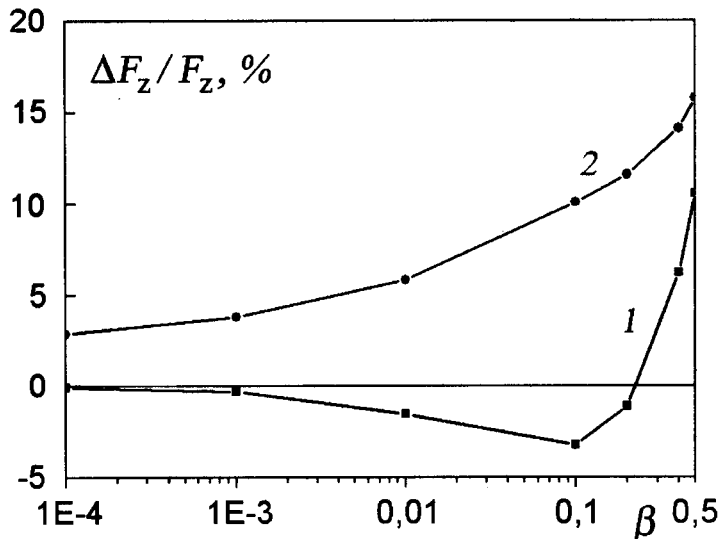


Рис. 11. Относительные отклонения приближенных формул для силы от значений, полученных методом изображений. Кривая 1 – значения, полученные по формуле (26) с использованием  $E_0 = (1 + 2/3\beta) < E_0 >$ , кривая 2 – значения, полученные по формуле (27)

Результаты, полученные с использованием формулы (26), намного лучше, чем результаты, полученные с использованием формулы (27) [3].

Множитель в (26) перед давлением электрического поля  $E_0^2/8\pi$  можно рассматривать как эффективную площадь сферических электродов в случае расчета сил притяжения:

$$S_* = \pi dR \left[ (1 + \beta) \left( 1 - \frac{1}{1 + 2/\beta} \right) - \beta \ln \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) \right]. \quad (28)$$

Для малых  $\beta$  величина эффективной площади  $S_* = \pi dR$  численно равна площади эллипса с главными полуосями  $d$  и  $R$ .

Можно вычислить силу  $f_z$ , действующую на часть сферы, которая ограничена полярным углом  $\theta$ :

$$f_z(\theta) = \pi d R E_0 \int_{E(\theta)}^{E_0} \frac{f(E)}{E^2} dE. \quad (29)$$

Здесь приближенное значение максимального электрического поля принималось равным  $E_0 = (1 + 2/3\beta) < E_0 >$ .

На рис. 12 показано отношение силы  $f_z(\theta)$  к точному значению полной силы  $F_z$ , вычисленной по (22) методом изображений. Вклад части поверхности сферы для полярных углов  $\theta > \theta_*$  равен нулю. Чтобы найти критическое значение  $\theta_*$ , необходимо решить следующее уравнение:

$$x_* = 1 + \beta - (2 + \beta) \exp \left( \frac{1 + \beta}{2 + \beta} - \frac{1 + \beta}{1 + \beta - x_*} \right), \quad (30)$$

где  $x_* = \cos \theta_*$ .

В пределе малых значений  $\beta$ , приближенным решением этого уравнения является  $\theta_* \approx 1,125$ . Поэтому формулу (16) можно использовать для вычисления силы при таких величинах  $\beta$ , при которых эта формула достаточно хорошо описывает распределение электрического поля в диапазоне полярных углов от 0 до  $\theta_*$ .

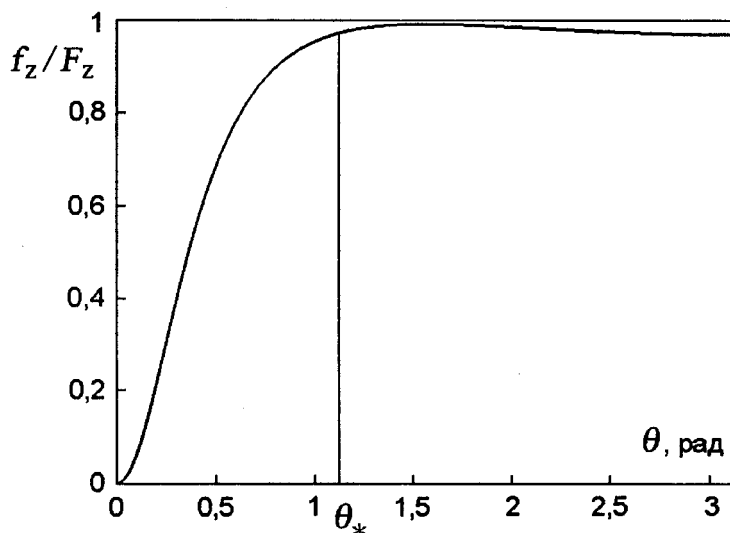


Рис. 12. Отношение силы  $f_z(\theta)$  (29), действующей на часть сферы, которая ограничена полярным углом  $\theta$ , к точному значению полной силы  $F_z$ ;  $\beta = 0,1$

### 3.2. Электрический пробой

Как было указано, только небольшая часть поверхности сферического электрода вблизи оси симметрии вносит основной вклад в процесс зарождения пробоя из-за резкой зависимости функции  $\mu(E)$  от электрического поля.

Действительно, из (23) и (24) можно получить выражение

$$J = \pi d R E_0 \int_{E_1}^{E_0} \frac{\mu(E)}{E^2} dE. \tag{31}$$

Макроскопический подход (1) и (31) позволяет получить зависимость вероятности зарождения пробоя во времени от величины приложенного напряжения, его формы, площади электродов и величины зазора между ними. И напротив, можно восстановить значения функции  $\mu(E)$  из экспериментальных данных.

В общем случае значение эффективной площади сферических электродов, которую можно использовать для описания зарождения пробоя при малых зазорах между электродами, имеет следующий вид [7, 8]

$$S_* = \frac{\pi d R E_0 \int_{E_1}^{E_0} \frac{\mu(E)}{E^2} dE}{\mu(E_0)}. \tag{32}$$

Необходимо заметить, что, в общем случае, значение эффективной площади может зависеть от максимальной величины электрического поля.

Для некоторых конкретных аппроксимаций функции  $\mu(E)$  интеграл в (31) легко вычислить аналитически. Например, в случае степенной аппроксимации  $\mu(E) = A E^n$ , из (31) получаем

$$J = \frac{\pi d R}{n-1} \left( 1 - \frac{1}{(1+2/\beta)^{n-1}} \right) \mu(E_0). \tag{33}$$

В этом случае эффективная площадь не зависит от электрического поля.

На рис. 13 показаны отклонения уравнения (33) от значений, полученных методом изображений (число членов ряда  $m = 1000$ ). Если функция  $\mu(E)$  достаточно резко зависит от электрического поля ( $n \geq 4$ ), точность уравнения (33) лучше, чем 10% при значениях параметра  $\beta < 0,1$ .

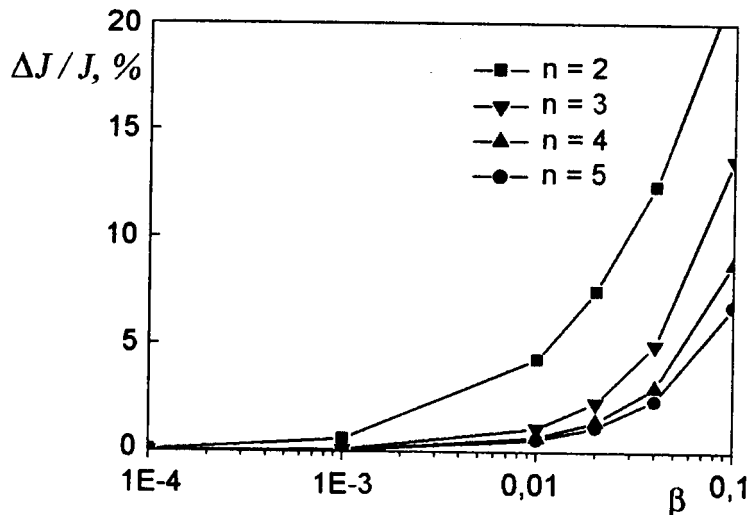


Рис. 13. Относительная ошибка вычисления значений интеграла  $J$  по приближенному выражению (33), по сравнению со значениями, полученными методом изображений ( $m = 1000$ )

Если параметр  $\beta$  достаточно мал и  $n \geq 2$ , значение эффективной площади сферических электродов можно вычислить, принимая нижний предел интегрирования  $E_1$  в (32) равным нулю [7, 10]:

$$S_* = \frac{\pi d R}{n-1}. \quad (34)$$

Получается, что в этом случае значение эффективной площади численно равно площади эллипса с главными полуосями  $d$  и  $R/(n-1)$ .

Наряду с простой степенной зависимостью, другим примером может служить одна из альтернативных аппроксимаций функции  $\mu(E)$  специального вида [7, 10]:

$$\mu = A E^2 \exp(E/g). \quad (35)$$

Здесь  $A$  и  $g$  – параметры аппроксимации. Этот вид функции очень удобен, так как позволяет вычислить интеграл по электрическому полю в (32) аналитически. В этом случае эффективная площадь сферических электродов при узком зазоре между ними зависит от максимальной величины электрического поля  $E_0$ :

$$S_* = \pi R d \frac{g}{E_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_0}{g} \left(1 - \frac{1}{1+2/\beta}\right)\right)\right]. \quad (36)$$

Обычно  $E_0 \gg g$  и  $E_0 \gg E_1$ . В этом случае приближенное значение эффективной площади сферических электродов обратно пропорционально максимальной величине электрического поля  $E_0$ :

$$S_* = \pi R d \frac{g}{E_0}. \quad (37)$$

Таким образом, показано, что приближенная формула (16) достаточно хорошо описывает распределение электрического поля по поверхности сферических электродов и позволяет перейти от интегрирования по поверхности к интегрированию по электрическому полю. Последнее обстоятельство в некоторых случаях очень удобно для аналитических вычислений.

Показано, что эффективная площадь сферических электродов пропорциональна произведению радиуса электродов и длины промежутка. В общем случае эффективная площадь сферических электродов при зарядении пробоя зависит от величины электрического поля.

Очевидно, что предложенный подход может быть легко обобщен на случай двух сферических электродов разного радиуса, включая систему электродов сфера – плоскость.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bamji S.S., Bulinski A.T., Prasad K.M. Electric field calculations with the boundary element method // IEEE Trans. on Electr. Insul. – 1993. – V. 28, – N 3. – P. 420-424.

2. Dascalescu L., Ribardiere P., Duvaud C., Paillot J. M. Electrostatic discharges from charged spheres approaching a ground surface // J. Electrostatics. – 1999. – V. 47. – P. 249-259.
3. Саранин В.А. О взаимодействии двух электрически заряженных проводящих шаров / В.А. Саранин // Успехи физических наук. – 1999. Т. 169, – № 4. – С. 453-458.
4. Щерба Е.А. О взаимодействии двух заряженных проводящих шаров при малых расстояниях между ними / Е.А.Щерба, А.И.Григорьев, В.А.Коромыслов // ЖТФ. – 2002. – Т. 72, – № 1. – С. 15-19.
5. Kupershtokh A.L., Karpov D.I. Stochastic features of initiation of liquid dielectric breakdown at small area of positive electrode // Proc. of the 13th Int. Conf. on Dielectric Liquids, IEEE No. 99CH36213, Nara, Japan, 1999. – P. 203-206.
6. Kupershtokh A.L., Palchikov E.I., Karpov D.I., Ershov A.P. Probability density function of electrical breakdown initiation in dielectric liquids under AC and DC voltage // Proc. of the 2nd Int. Workshop on Electrical Conduction, Convection, and Breakdown in Fluids, Grenoble, France, 2000. – P. 91-94.
7. Kupershtokh A.L., Palchikov E.I., Karpov D.I., Vitellas I., Agoris D.P., Charalambakos V. P. Stochastic model of breakdown initiation in dielectric liquids // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2002. – V. 35, – N 23. – P. 3106-3121.
8. Klimkin V.F., Kupershtokh A.L. Statistical lag time in fluctuation model of liquid dielectric breakdown and experimental results // Proc. of the 11th Int. Conf. on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquids, IEEE No. 93CH3204-5, Baden-Dättwil, Switzerland, 1993. – P. 395-399.
9. Vainer B.G., Kupershtokh A.L. Measurements of statistical lag time of breakdown in thin amorphous layers of SiO<sub>2</sub> // Conf. Record of the 1998 IEEE Int. Symposium on Electrical Insulation, IEEE No. 98CH36239, Arlington, USA, 1998. – P. 169-172.
10. Kupershtokh A.L., Palchikov E.I., Karpov D.I., Vitellas I., Agoris D.P., Charalambakos V. P. Stochastic model of breakdown initiation in dielectric liquids under AC voltage // Proc. of the 14th Int. Conf. on Dielectric Liquids, IEEE No. 02CH37319, Graz, Austria, 2002. – P. 115-118.
11. Физика диэлектриков / А.П.Александров, А.Ф.Вальтер, Б.М.Вул и др. – М.-Л.: Гос. технико-теоретическое изд., 1932. – С. 560.
12. Dean G.R. The potential and electrostatic force in the field of two metal spherical electrodes. Part I and II // Phys. Rev. Ser. I. – 1912. – V. 35, – N 6. – P. 459-469.
13. Сахаров А.Д. Воспоминания. Т. 1 / А.Д. Сахаров. – М.: Права человека, 1996. – С. 912.
14. Dean G. R. The maximum voltage gradient in a spark gap in terms of the radius of curvature of the electrodes // General Electric Review. – 1913. – V. 16, – N 3. – P. 148-150.
15. Peek F. W. Dielectric phenomena in high voltage engineering. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1929. – С. 410.

#### APPROXIMATE METHODS OF CALCULATION OF ELECTRIC FIELD DISTRIBUTION ALONG THE SURFACE OF HEMISPHERICAL ELECTRODES

**A. L. Kupershtokh**

*For many problems of electrostatics and breakdown in dielectrics, it is very important to know not only the maximal value of electric field at the surface of electrodes but also the electric field distribution along the surface of electrodes. The approximate formula for electric-field distribution along the surface of spherical electrodes was proposed. This formula could be very useful and allow one to obtain approximate analytical solutions of various problems of electrostatics.*