

На правах рукописи

КАРПОВ Денис Иванович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНИЦИИРОВАНИЯ  
И РОСТА РАЗРЯДНЫХ СТРУКТУР  
В ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

Специальность: 01.04.07 – «Физика конденсированного  
состояния»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Томск – 2003 г.

**Работа выполнена** в НИИ высоких напряжений при Томском политехническом университете и Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

**Научные руководители:** кандидат физико-математических наук,  
доцент **КУПЕРШТОХ Александр Леонидович**  
  
доктор физико-математических наук,  
профессор **ЛОПАТИН Владимир Васильевич**

**Официальные оппоненты:**  
  
доктор физико-математических наук,  
профессор **КЛИМКИН Виктор Федорович**  
  
доктор физико-математических наук,  
профессор **ВАЙСБУРД Давид Израйлевич**

**Ведущая организация**  
**Институт электрофизики Уральского отделения РАН,**  
620016, г. Екатеринбург, ул. Амундсена, 106.

**Защита диссертации состоится 25 ноября 2003 г. в 15<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 212.269.02 при Томском политехническом университете по адресу 634050, г. Томск, проспект Ленина, 30**

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского политехнического университета

Автореферат разослан            октября 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук

Коровкин М. В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Явление электрического разряда в жидкостях исследуется на протяжении более чем ста лет. Несмотря на это, до сих пор нет адекватного теоретического описания всей последовательности многочисленных физических явлений, сопровождающих пробой диэлектриков. Еще в 1973 г. В. Я. Ушаков отмечал, что «в литературе в качестве равнозначных рассматривались более 15 различных теорий пробоя жидкостей, основанных на противоречивых исходных физических идеях». Однако, благодаря исследованиям групп Комелькова В.С., Liao T.W., Anderson J.G., Lewis T.J., Ушакова В.Я., Вершинина Ю.Н., Lesaint O. и других выявлены основные процессы, которые приводят к замыканию межэлектродного промежутка плазменным каналом.

Многочисленные экспериментальные исследования, проведенные в последние три-четыре десятилетия в России и за рубежом, показали, что начало процессов ионизации в самой жидкости или в парогазовых пузырьках не является достаточным условием пробоя жидкого диэлектрика. Пробой возникает вслед за развитием в диэлектрике и замыканием разрядного промежутка разрядной структурой. Рост разрядных структур, образованных разветвленными плазменными каналами, носит нерегулярный, стохастический характер и сопровождается множеством взаимосвязанных электрических, гидродинамических, оптических и других явлений, что осложняет изучение этого явления. Тем не менее, в последние десятилетия экспериментаторы достигли значительных успехов в изучении формы, динамики, электрических характеристик разрядных каналов при различных условиях эксперимента (геометрии электродов, полярности, форме и длительности импульса напряжения, состоянии поверхности электродов, внешнем давлении и др.).

Однако, теоретического описания инициирования и развития разряда, которое учитывало бы стохастические закономерности этих процессов, сложную форму разрядных структур в пространстве, перераспределение электрических полей в разрядном промежутке, вызванного поляризацией, переносом заряда и развитием разрядных структур, и другие явления, не существует.

В то же время, исследование поведения конденсированных диэлектриков в сильных электрических полях и процесс развития электрического разряда представляет значительный интерес не только для теории, но и для практического использования. Построение теоретических моделей развития разряда в жидкостях приобретает все большую актуальность в связи с необходимостью разработки новых более эффективных и экологически приемлемых изоляционных материалов. В последние годы рядом исследователей (Niemeyer L., Лопатин В.В., Куперштох А.Л., Dissado L.A. и др.) разрабатывается интегральный подход к описанию развития разрядных структур в зависимости от локального выделения энергии в жидкости или напряженности локального электрического поля на головках развивающихся разрядных каналов. Создание и последующее использование таких моделей, адекватно и с единой позиции описывающих предпробойные явления, позволит избежать значительных материальных расходов и сэкономить время, затрачиваемое на проведение физических экспериментов.

В связи с этим, тематика настоящей диссертационной работы, направленная, на создание новой, более совершенной стохастической модели развития разряд-

ных структур в жидких диэлектриках, представляется актуальной.

**Цель работы** – разработка подхода и создание стохастической электродинамической модели роста проводящих разрядных каналов, а также численное моделирование развития разрядных структур в жидких диэлектриках.

**Методы исследования.** Для восстановления зависимостей плотности вероятности инициирования разряда от электрического поля  $\mu(E)$  использовались статистические методы обработки результатов измерений времен запаздывания и напряжений пробоя, а также компьютерное моделирование напряжений пробоя. Для решения интегрального уравнения, выражающего связь между значениями  $\mu(E)$  и средними статистическими временами запаздывания пробоя, использовался метод регуляризации некорректных задач. Для расчета гидродинамических течений от расширяющегося в жидкости цилиндрического канала разряда использовался численный метод Неймана–Рихтмайера. Для самосогласованного расчета электрического поля в разрядном промежутке и переноса заряда вдоль каналов разрядных структур на каждом шаге по времени использовался неявный по времени консервативный конечно-разностный метод.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивалась, прежде всего, качественным и количественным соответствием результатов компьютерного моделирования разрядных структур с данными оптической съемки, измерениями электрических и пространственно-временных характеристик разрядных структур при импульсном электрическом разряде в жидкостях. Достоверность также подтверждается использованием апробированных аналитических и численных методов решения уравнений модели, многочисленными тестовыми расчетами, совпадением результатов восстановления  $\mu(E)$ , полученных альтернативными методами обработки экспериментальных данных.

#### **На защиту выносятся:**

1. Методика расчета электрической прочности диэлектриков для любой геометрии электродов и форм напряжения по измеренным распределениям вероятностей времен запаздывания или напряжений пробоя для какой-либо геометрии электродов, а также методика моделирования мест инициирования разряда на поверхности электрода и напряжений пробоя при малых расстояниях между полусферическими электродами.
2. Гидродинамическая модель развивающегося разрядного канала, которая описывает его расширение со скоростями 30 — 300 м/с при джоулевом энерговыделении.
3. Геометрические, полевые и токовые характеристики разрядных каналов, полученные по разработанной модели развития разряда, в которой согласованно описывается рост ветвящихся каналов с учетом изменения их электропроводности и рассчитывается динамика распределения электрического поля в жидкости. Падение напряжения в нитевидных (“filamentary”) разрядных каналах в миллиметровых промежутках изменяется от 20 до 60 кВ/см при увеличении приложенного напряжения. Удельная электропроводность в развивающихся разрядных каналах составляет  $10^{-2} \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$  для медленных кустообразных (“bush-like”) разрядных структур и  $(1 - 10^{-1}) \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$  для быстрых древовидных (“tree-like”) структур.

**Научная новизна работы** заключается в развитии интегрального подхода, позволяющего детально описывать формирование разрядных структур в жидкостях. В рамках этого подхода совместное использование уравнений электродинамики и стохастического критерия роста разрядных структур позволило адекватно моделировать наблюдаемые в экспериментах формы структур, их полевые и токовые характеристики и динамику роста. Предложена приближенная модель, описывающая расширение отдельных участков развивающихся каналов и изменение их электропроводности.

**Практическая значимость работы.** Разработана методика прогнозирования электрической прочности н-гексана, перфтордибутилового эфира и трансформаторного масла для произвольных электродов и любой формы напряжения по восстановленной плотности вероятности статистических времен запаздывания пробоа или прочности, измеренных в каких-либо условиях.

**Апробация работы.** Материалы, вошедшие в диссертацию, докладывались автором и обсуждались на международных и региональных научных конференциях, международных школах-семинарах: региональной научно-практической конференции «Естественные науки» (г. Томск, 1994 г.), 2-ой Областной научно-практической конференции молодежи и студентов «Современные техника и технологии» (г. Томск, 1997 г.), XXXVI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 1998 г.), VI Международной научной конференции «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей» (г. Санкт-Петербург, 2000 г.), X Международной научной школе-семинаре «Физика импульсных разрядов в конденсированных средах» (г. Николаев, 2001 г.), IV Международной научной школе-семинаре «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (г. Николаев, 2001 г.), 6 российско-корейском международном симпозиуме по науке и технологии KORUS 2002 (г. Новосибирск, 2002 г.), 14 Международной конференции по диэлектрическим жидкостям ICDL`2002 (г. Грац, Австрия, 2002 г.), а также на семинарах Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, НИИ высоких напряжений при Томском политехническом университете.

Значительная часть работы выполнялась при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 97-02-18416, 1998-1999 гг., № 03-02-16474, 2003 г.), Сибирского отделения РАН (Интеграционные проекты № 2, 1998-1999 гг. и № 47, 2000-2002 гг.), Международной Соросовской программы Образования в Области Точных Наук (ISSEP) (гранты s96-3130 и a97-145). Результаты работы были отмечены среди основных достижений СО РАН в 1999 и 2001 гг.

**Публикация результатов работы.** По теме диссертации опубликовано 25 работ: 4 статьи, 13 докладов в трудах международных научных конференций и 8 тезисов докладов в трудах научных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения с общим объемом 151 страницы, содержит 52 рисунка, 6 таблиц. Список цитируемой литературы включает 166 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

### Стохастические закономерности инициирования электрического разряда в жидких диэлектриках.

Проведен анализ методов описания статистических закономерностей пробоя в жидкостях. Показано, что часто используемые Вейбулловские распределения описывают отдельно зависимости вероятностей пробоя от формы, длительности, амплитуды приложенного напряжения, площади электродов. Однако, они не дают общей формулы, позволяющей одновременно учесть зависимость вероятности пробоя от этих факторов, т.е. не позволяют предсказать изменение электрической прочности диэлектрика при изменении экспериментальных условий.

Использован стохастический подход, согласно которому инициирование разряда с поверхности электрода можно описать с помощью функции  $\mu(E)$  – плотности вероятности инициирования разрядной структуры с участка электрода малой площади за короткий промежуток времени под действием локального электрического поля  $E$  (А.Л. Куперштох, 1993). Считая инициирование разряда Пуассоновским случайным процессом, вероятность отсутствия инициирования:

$$P_{-}(t) = \exp\left(-\int_0^t \int_S \mu(E) ds\right) dt. \quad (1)$$

Интегрирование во внутреннем интеграле выполняется по поверхностям электродов с учетом распределения напряженности поля  $E$  на этих поверхностях.

В том случае, когда время инициирования разрядной структуры значительно больше времени ее формирования (это может быть, например, для узких зазоров между полусферическими электродами), распределение вероятностей отсутствия пробоя мало отличается от экспоненциального (1) (В. Ф. Климкин, 2002) и можно использовать измерения времен запаздывания и напряжений пробоя для восстановления зависимости  $\mu(E)$ . Для постоянного напряжения между электродами время запаздывания пробоя выражается из (1):

$$\langle t \rangle = 1 / \int_S \mu(E) ds. \quad (2)$$

Анализ полученного аналитического решения задачи о распределении электрического поля между полусферическими электродами радиуса  $R$  при расстоянии между ними  $d$  показал, что для узких зазоров ( $d/2R < 0.1$ ) напряженность поля на поверхности электрода с достаточной точностью описывается формулой

$$E \approx \frac{E_0}{1 + (1 - \cos \theta) / \beta}, \quad \text{где } \beta = d/2R, \quad (3)$$

где  $\theta$  – полярный угол на сфере. Для  $\beta = 0.02$  отличие (3) от точного решения  $\approx 2\%$ . Используя (3) выражение (2) можно представить в виде:

$$\langle t \rangle^{-1} \approx \pi d R E_0 \int_0^{E_0} \frac{\mu(E)}{E^2} dE. \quad (4)$$

Используя (4), по данным измерений статистических времен запаздывания пробоя на постоянном напряжении, выполненных В. Ф. Климкиным, восстановлены значения  $\mu(E)$  для н-гексана в диапазоне значений  $E_0$  от 1 до 3.5 МВ/см. Для опреде-

ления  $\mu(E)$  использовался метод регуляризации, который позволил свести задачу к минимизации функционала:

$$F[\mu(E)] = \sum_{i=1}^N \left( \pi d R E_0^i \int_0^{E_0^i} \frac{\mu(E)}{E^2} dE - \frac{1}{\langle t_i \rangle} \right)^2 + \alpha \int_0^{E_{\max}} \frac{d^2 \mu(E)}{dE^2} dE,$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации,  $E_{\max}$  – верхняя граница диапазона значений электрического поля во всей совокупности экспериментов. Восстановленная таким методом  $\mu(E)$  хорошо аппроксимируется степенной зависимостью вида

$$\mu(E) = A (E/E_1)^n, \quad (5)$$

где  $A = 9.4 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ ,  $n = 4.65$ ,  $E_1 = 1 \text{ МВ/см}$  (рис. 1, кривая 1).

Для восстановления  $\mu(E)$  по данным о пробое при синусоидальном напряжении линейно возрастающей амплитуды использовались гистограммы напряжений пробоя и значения напряжений пробоя, соответствующие фиксированной вероятности. Используя (6), из (1) при вероятности пробоя  $P_- = 0.37$  можно получить

$$\begin{array}{ll} \text{для плоских электродов} & \text{для полусферических электродов} \\ \frac{\mu(E_0^*)}{\pi(n+1)} \int_0^\pi \sin^n z dz = \frac{\sqrt{2} k_e}{S d E_0^*}, & \frac{\mu(E_0^*)}{(n^2-1)} \int_0^\pi \sin^n z dz = \frac{\sqrt{2} k_e}{R d^2 E_0^*} \end{array} \quad (6)$$

Здесь  $E_0^*$  – значение  $E_0$ , соответствующее напряжению пробоя при  $P_- = 0.37$ ,  $k_e$  – скорость нарастания эффективного значения напряжения,  $S$  – площадь плоских электродов. Для расчета значений  $\mu(E)$  по гистограммам напряжений пробоя использовались формулы

$$\begin{array}{ll} \text{для плоских электродов} & \text{для полусферических электродов} \\ \mu(E_i) = \frac{\sqrt{2} k_e \pi (n+1)}{S d \Delta E_l \int_0^\pi \sin^n z dz} \ln \left( \frac{N_-^i}{N_-^{i+l}} \right), & \mu(E_i) = \frac{\sqrt{2} k_e (n^2-1)}{R d^2 \Delta E_l \int_0^\pi \sin^n z dz} \ln \left( \frac{N_-^i}{N_-^{i+l}} \right) \end{array} \quad (7)$$

Здесь  $N_-^i$  – число пробоев в серии экспериментов, произошедших позже  $i$ -го полупериода напряжения,  $\Delta E_l = \Delta V_l / d$ ,  $\Delta V_l$  – увеличение напряжения на разрядном промежутке за  $l$  полупериодов напряжения. Формулы (6) и (7) применимы в диапазоне напряженности поля, в котором справедлива аппроксимация (5).

По экспериментальным данным Вебера и Индикотта о напряжениях пробоя трансформаторного масла между плоскими электродами методом гистограмм восстановлены значения  $\mu(E)$  в диапазоне напряженности электрического поля 0.2 – 0.4 МВ/см. Для аппроксимации (6) получены  $A = 9.0 \cdot 10^4 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ ,  $n = 12.1$ , при  $E_1 = 1 \text{ МВ/см}$  (рис. 1, кривая 2).

Проведены эксперименты по пробую перфтордибутилового эфира (ПФДБЭ) между полусферическими электродами из латуни и нержавеющей стали при подаче синусоидального напряжения линейно увеличивающейся амплитуды.

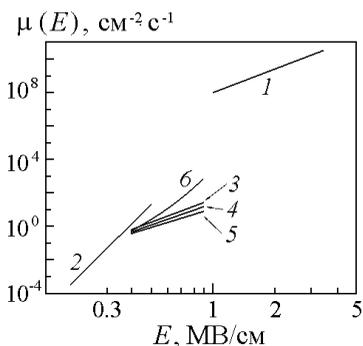


Рис. 1. Восстановленные из экспериментов зависимости  $\mu(E)$ : 1 – для н-гексана по данным В.Ф. Климкина, 2 – для трансформаторного масла по данным Вебера и Индикотта, для ПФДБЭ при степенной аппроксимации методом фиксированной вероятности (3), методом гистограмм (4, 5) и при аппроксимации (8) (кривая 6).

5).

В ряде случаев данные эксперимента лучше описывать более резкой, чем степенная, зависимостью от  $E$ . Поэтому, использовалась также аппроксимация

$$\mu(E) = A \left( \frac{E}{E_1} \right)^2 \exp\left( \frac{E}{g} \right), E_1 = 1 \text{ MV/cm. (8)}$$

Для ПФДБЭ методом компьютерного моделирования были получены значения  $A = 0.02 \text{ cm}^{-2} \text{ c}^{-1}$ ,  $g = 0.09 \text{ MV/cm}$  (рис. 1, кривая 6).

Восстановленные зависимости  $\mu(E)$  позволяют рассчитать вероятности инициирования разряда для электродов произвольной формы и произвольного напряжения. Также, используя полученные зависимости  $\mu(E)$  впервые проведено компьютерное моделирование серий пробоев в жидких диэлектриках (рис. 2). Результаты моделирования согласуются с экспериментальными данными.

Рис. 2. Серия напряжений пробоев в ПФДБЭ при  $R = 40 \text{ мм}$ ,  $d = 1.7 \text{ мм}$ , полученная компьютерным моделированием.

## Основные положения стохастической электродинамической модели роста разрядных структур.

Проведенный анализ закономерностей формирования разряда в разных диэлектрических жидкостях при различных экспериментальных условиях показывает, что вероятность роста разрядных каналов в каждый момент времени определяется текущим распределением электрического поля в разрядном промежутке. Таким образом, свойства разрядных каналов (их форму, скорость роста, ток и паде-

ние напряжения в каналах, гидродинамические характеристики, и другие) можно рассчитать, решая самосогласованную задачу роста проводящей структуры с учетом перераспределения электрического поля и зарядов в разрядном промежутке.

Каналы разряда образуются, если локальная напряженность поля в диэлектрике превышает критическое значение  $E_{кр}$ , которое характеризует «локальную электрическую прочность» диэлектрика. Разрядная структура представляется системой цилиндрических проводящих элементов – участков разрядных каналов. Так же как в пионерской работе Нимейера, Пьетронеро и Висмана (1984) предполагается, что вероятность роста вершины разрядного канала в жидкости при фиксированных внешних условиях (давлении, температуре, и т.д.) определяется только локальным электрическим полем перед вершиной. Для описания «квазипорогового» характера фазового перехода диэлектрик–разрядный канал использовался флуктуационный критерий роста разрядной структуры, согласно которому новый проводящий элемент на одном из участков периметра разрядной структуры возникает за один шаг по времени, если

$$E_i > E_{кр} - \delta_i , \quad (9)$$

где  $E_i$  – проекция напряженности локального электрического поля в диэлектрике на направление, вдоль которого образуется новый элемент  $i$ ,  $\delta_i$  – флуктуации критического поля  $E_{кр}$ , обусловленные неоднородностью локальной структуры жидкости (можно считать, что  $\delta_i$  учитывают также флуктуации и локального поля  $E_i$ ). Функция распределения для флуктуаций может быть получена на основании точного кинетического расчета, однако на сегодняшний день эта задача представляется чрезвычайно сложной. Другой путь заключается в выборе модельной функции, отвечающей сложившимся представлениям о развитии разряда в жидкостях и зависящей от ряда параметров, которые можно найти из сопоставления результатов моделирования с физическими экспериментами. В экспериментах наблюдается резкая зависимость вероятности пробоя от напряженности поля в промежутке, поэтому можно считать, что заметные флуктуации  $E_{кр}$  имеют место только в узком диапазоне  $E$ . В соответствии с (9), при экспоненциальном распределении флуктуаций вероятность возникновения нового элемента разрядной структуры за интервал времени  $\tau$  имеет вид

$$p(E) = A \cdot \exp(E/g) , \quad (10)$$

где  $A = \exp(-E_{кр}/g)$ , а ширина распределения  $g$  представляет собой характерный масштаб флуктуаций поля в жидкости, зависящий от строения, свойств и состояния жидкости. Для любых критериев роста с «физическим» временем, в том числе и для (9), вероятность образования нового элемента при неизменной напряженности поля  $E$  зависит от времени  $t$  в соответствие с формулой  $p(t) = 1 - \exp(-r(E)t)$ , где  $r(E)$  – плотность вероятности образования нового элемента за малый интервал времени.

Используя (10), можно показать, что скорость роста канала при напряженности поля перед его вершиной  $E$  пропорциональна вероятности роста

$$v(E) = v_0 \exp(E/g) , \quad v_0 = h \cdot \exp(-E_{кр}/g)/\tau , \quad (11)$$

где  $h$  – шаг сетки. Тогда,  $v_0$  (а, следовательно, и  $E_{кр}$  при фиксированном шаге сетки

ки) и  $g$  можно определить, сравнивая значения скорости роста вершины разрядного канала (11) с экспериментальными данными. Таким образом, (11) устанавливает соответствие между непрерывной физической величиной – скоростью роста – и ее аналогом на дискретной сетке. Однако, из-за отсутствия экспериментальных данных о зависимости  $v(E)$  для одиночных разрядных каналов в настоящей работе  $g$  и  $u_0$  (соответственно, и  $E_{кр}$ ) выбирались путем сравнения средних скоростей роста структур, полученных при моделировании, со средними скоростями роста структур в экспериментах при разных напряжениях.

Изменение распределения электрического поля в разрядном промежутке, заряда в разрядной структуре и рост структуры происходят самосогласованно. Свойства диэлектрика описываются статической относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Для расчета потенциала электрического поля  $\varphi$  в разрядном промежутке и плотности зарядов в структуре  $\rho$  на каждом шаге по времени использовались уравнения электростатики:

$$\text{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad E = -\nabla\varphi \quad (12)$$

где  $\vec{D}$  – электрическая индукция.

Для расчета динамики зарядов в структуре использовались уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (13)$$

где  $\vec{j}$  – плотность электрического тока в каналах разрядной структуры,  $\sigma$  – удельная электропроводность. Расчет состава плазмы в развивающихся каналах разрядной структуры на сегодняшний день невозможен, поэтому для описания изменения  $\sigma$  каналов со временем использовались модельные законы. Сначала  $\sigma$  каналов считалась одинаковой и постоянной для всех их элементов. Это искусственное предположение существенно упрощает понимание результатов моделирования. Для описания изменения во времени электропроводности элемента канала в настоящей работе предполагалось, что:

$$\sigma = \chi \cdot w_{\text{вн}}, \quad (14)$$

где  $w_{\text{вн}}$  – внутренняя энергия единицы объема плазмы канала,  $\chi$  – параметр.

Для хороших диэлектриков собственная проводимость мала по сравнению с  $\sigma$  каналов, поэтому в настоящей модели считалось, что  $\sigma$  диэлектрика равна 0.

Для совместного решения (12) и (13) на трехмерной сетке на каждом шаге по времени использовался специально разработанный неявный по времени конечно-разностный метод

$$L_{i,j,k}(\varphi^{n+1}) \epsilon h^3 + 4\pi\tau s \text{Div}(\sigma_m \Delta \varphi_m^{n+1} / l_m) = -4\pi Q_{i,j,k}^n, \\ Q_{i,j,k}^{n+1} = Q_{i,j,k}^n + \tau s \sum_{m=1}^M \sigma_m \Delta \varphi_m^{n+1} / l_m,$$

где  $L_{i,j,k}(\varphi) = \frac{1}{6h^2} (\varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i,j,k-1} - 6\varphi_{i,j,k})$  – конечно-разностный оператор Лапласа,  $n$  – номер временного шага,

$Div(I_m) = \sum_{m=1}^M I_m$  – сумма токов  $I_m$ , вытекающих из некоторой вершины проводящей структуры,  $m$  – индекс, нумерующий связи узла с сеточными координатами  $(i, j, k)$  с его ближайшими соседями,  $M$  – число соседних узлов разрядной структуры,  $\Delta\varphi_m$  – разность потенциалов вдоль звена,  $l_m$  – длина элемента проводящей структуры,  $s$  – его поперечное сечение, а  $\sigma_m$  – удельная электропроводность.

Многочисленные экспериментальные данные указывают на гидродинамическое расширение развивающихся каналов разряда. Точное описание динамики расширения каналов требует расчета течений, возникающих при развитии сложной нерегулярной трехмерной структуры. На сегодняшний день не существует даже численных методов решения такой задачи. В настоящей работе сделаны следующие предположения, предельно упрощающие задачу о расширении канала разрядной структуры: 1) каждый канал состоит из цилиндрических элементов фиксированной длины  $l$  и изменяющегося со временем радиуса  $R_k$ , 2) расширение каждого элемента рассматривается независимо от других элементов, 3)  $R_k \ll l$ , то есть, элемент приближенно считается частью бесконечного цилиндрического канала, 4) для каждого элемента канала все физические величины имеют одинаковые значения по всему объему элемента, 5) граница канала непроницаема для вещества с точки зрения внешней гидродинамической задачи. Этот подход позволяет включить в стохастическую модель роста разрядных структур расширение разрядных каналов вследствие джоулева нагрева.

Проведен численный анализ решений задачи о расширении бесконечного непроницаемого цилиндрического канала в жидкости при малой мощности энерговыделения в канале. Использовалось уравнение состояния для воды в форме Тета, среднее по сечению давление в канале считалось пропорциональным удельной внутренней энергии канала. В качестве граничного условия на стенке канала использовалось уравнение баланса энергии в канале, записанное в пренебрежении теплопроводностью и излучением:

$$\frac{N(t)}{l} = p_k \frac{d s}{d t} + \frac{1}{\gamma_* - 1} \frac{d}{d t} (p_k s), \quad (15)$$

где  $p_k$  – давление в канале,  $s = \pi R_k^2$  – площадь поперечного сечения элемента,  $N(t)$  – мгновенная выделяемая в элементе мощность,  $\gamma_*$  – эффективный показатель адиабаты для плазмы канала ( $\gamma_* = 1.26$  для плазмы канала разряда в воде).

Проведенный численный анализ позволил получить приближенное решение задачи о расширении элемента канала разрядной структуры. Если выделение энергии в разрядном канале происходит постепенно, то скачков давления в нем нет, и изменение скорости расширения границы канала  $u_k$  происходит плавно. Тогда, в каждый момент времени значения  $u_k$ ,  $p_k$  слабо отличаются от соответствующих значений для стационарного течения. Используя в качестве стационарного автомодельное решение (И. З. Окунь, 1968), получено соотношение:

$$p_k = p_0 + 1.35 \rho_0 c_0^{0.3} u_k^{1.7} + \eta \rho_0 R_k u_k, \quad (16)$$

где  $\eta$  – постоянный коэффициент, который подбирался путем вариации, сравнивая получаемые результаты с точным решением полной нестационарной гидро-

намической задачи,  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$  – давление, плотность и скорость звука в невозмущенной жидкости. Показано, что формула (16) лучше описывает зависимость  $p_k(u_k)$ , чем аналогичная формула, полученная в приближении линейной акустики (К.А. Наугольный, Н.А. Рой, 1971) в диапазоне скоростей расширения от 30 до 300 м/с. Максимальное отклонение давления, рассчитанного по (16), от точного, для всех исследованных случаев не превышает 30%.

Используя кинематическую связь между скоростью стенки канала и его радиусом и выразив из (16) и (17) производные скорости и давления, получена замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_k = C_1 \frac{p_k}{R_k} - C_2 \frac{u_k^{1.7}}{R_k}, \quad \dot{p}_k = -C_3 \frac{p_k}{R_k} u_k + C_4 N(t), \quad R_k = u_k, \quad (17)$$

где коэффициенты  $C_1 = 1/(\kappa \rho_0)$ ,  $C_2 = 1.35 c_0^{0.3}/\kappa$ ,  $C_3 = 2\gamma_*$ ,  $C_4 = (\gamma_* - 1)/\pi l$ . Система (17) позволяет описать расширение элементов каналов разрядной структуры в процессе ее роста.

Используя уравнение (14) совместно с (15), получено:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \chi \cdot \sigma \cdot E^2 - 2(\sigma + \chi \cdot p_k) \frac{u_k}{R_k}. \quad (18)$$

Эта формула представляет собой модификацию модели изменяющейся электропроводности развивающегося разрядного канала, основанной на использовании формулы Ромпе-Вайцеля (В. В. Лопатин, М. Д. Носков, В. Р. Кухта, 1995). В частном случае, когда давление в канале пропорционально  $w_{\text{вн}}$ , можно записать  $\sigma = \chi p_k / (\gamma_* - 1)$ . Таким образом, в настоящей работе для описания развития разрядных структур в жидких диэлектриках самосогласованно решалась система уравнений (10), (12)–(13), (17).

### **Моделирование развития разрядных структур при импульсном разряде в жидкостях.**

Для верификации модели проведено детальное сравнение динамики роста разрядных каналов и их характеристик с результатами экспериментов по импульсному пробую жидких диэлектриков. Расстояние между острым и плоским электродом было 4 мм. Шаг сетки был 100 мкм. Начальными условиями для уравнений (10), (12)–(14) служило распределение электрического потенциала между плоскостью с выдвинутым острием, на которых задавалось постоянное значение потенциала  $V$ , и противоположным плоским электродом с нулевым потенциалом (рис. 3). При образовании нового элемента канала задавался начальный радиус канала и начальное давление в нем  $p_n = \alpha E^2$ , где  $\alpha$  – постоянный коэффициент ( $\alpha = 5.53 \cdot 10^{-5}$  в настоящей работе). На каждом шаге роста в каждом элементе рассчитывалась выделившаяся мощность  $N(t) = \int \vec{E} \pi R_k^2 l$ .

Ограничивая рост разрядной структуры только одним направлением, исследовались характеристики отдельного разрядного канала в отсутствие влияния соседних ветвей структуры. Удельная электропроводность канала была постоянна и равна  $\sigma = 0.033 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ . Напряженность электрического поля перед вершиной одиночного линейного канала растет по мере его продвижения вглубь разрядного

промежутка, в результате чего скорость роста также увеличивается. Падение напряжения на единицу длины канала максимально вблизи его вершины и уменьшается к основанию. Показано, что расчеты гидродинамических характеристик (давление, радиус, скорость расширения) элементов проводящих структур, выполненные с использованием (17), хорошо согласуются с расчетами точной задачи о расширении бесконечного канала, если зависимости  $N(t)$  одинаковы. При  $V = 30$  кВ напряженность поля вдоль отдельных элементов структуры падала за время  $\sim 30$  нс от  $300 - 400$  кВ/см до  $\sim 100$  кВ/см и затем медленно уменьшается до постоянного значения около  $20$  кВ/см.

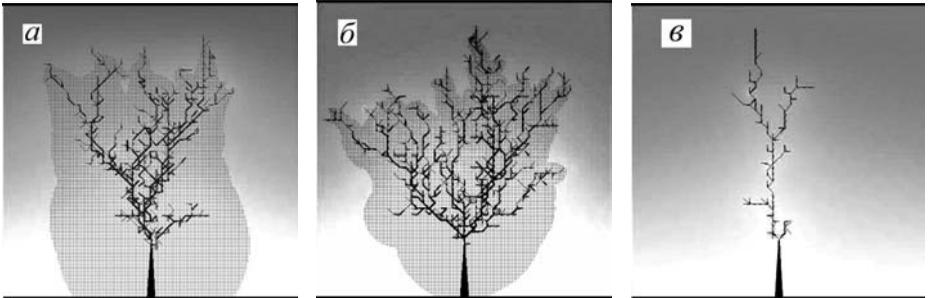


Рис. 3. Разрядные структуры при постоянной удельной электропроводности. (а)  $V = 24$  кВ, (б)  $V = 30$  кВ.  $\sigma = 0.033 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ . (в)  $V = 30$  кВ,  $\sigma = 5.5 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ .  $u_0 = 1.3 \cdot 10^2 \text{ см/с}$ ,  $g = 45 \text{ кВ/см}$ .

Для выяснения роли электропроводности каналов в формогенезе разрядных структур проведено моделирование роста ветвящихся разрядных каналов при постоянной удельной электропроводности. При малых значениях  $\sigma \sim 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$  наблюдался рост медленных, нитевидных разрядных структур. С увеличением напряжения между электродами от  $24$  до  $30$  кВ скорость роста увеличивалась линейно от  $1.7$  до  $\approx 3$  км/с, при фиксированных других параметрах. При этом, разрядная структура становилась более плотной (рис. 3, а, б).

Взаимное влияние ветвей структуры приводит к тому, что максимальная напряженность электрического поля перед кончиками разрядной структуры примерно постоянна во времени (рис. 4, а). Вследствие этого скорость роста ветвящейся структуры также примерно постоянна (рис. 4, б). Максимальная напряженность электрического поля на кончиках разрядной структуры выше, если приложено более высокое напряжение  $V$ . Величина тока проводимости в структуре  $i \sim 1$  мА (рис. 4, в). Результаты моделирования согласуются с данными о развитии нитевидных разрядных структур в жидких углеводородах (J. C. Devins et al, P. Gourneuy et al, и др.).

При больших  $\sigma$  форма разрядной структуры резко меняется (рис. 3, в), рост происходит с ускорением со средней скоростью  $\sim 100$  км/см, напоминая развитие разрядных структур в длинных промежутках при больших напряжениях.

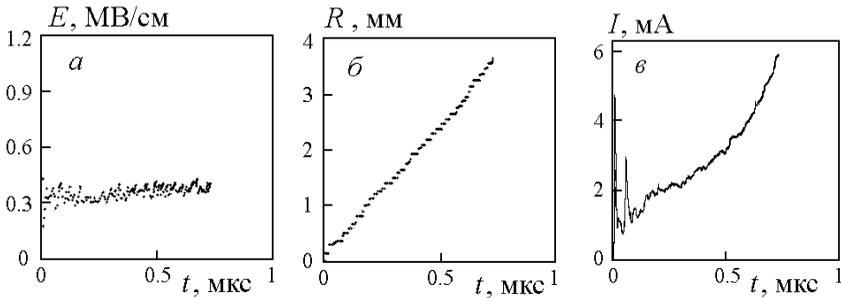


Рис. 4. Временные характеристики разрядной структуры при  $V = 30$  кВ.  $u_0 = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\sigma = 0.033$  Ом $^{-1}$ см $^{-1}$ . (а) размер разрядной структуры, (б) максимальная напряженность электрического поля перед кончиками разрядной структуры, (в) ток проводимости в разрядной структуре.

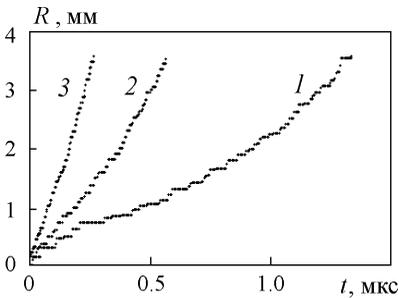


Рис. 5. Зависимости размера разрядной структуры от времени.  $V = 24$  (а), 30 (б) и 36 кВ (в).  $u_0 = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 5 \cdot 10^{-3}$  см $^2$ В $^{-2}$ с $^{-1}$ .

Проведено моделирование роста разрядных структур с изменяющейся во времени  $\sigma$ . На рис. 5 показано изменение размера структуры (расстояния от острого электрода до наиболее удаленной вершины структуры) со временем при разных напряжениях на разрядном промежутке. При относительно низком напряжении (кривая 1) скорость роста уменьшается в средней части промежутка по сравнению со скоростью роста вблизи электрода. При более высоких напряжениях скорость распространения мало изменяется по мере роста структур (2,3).

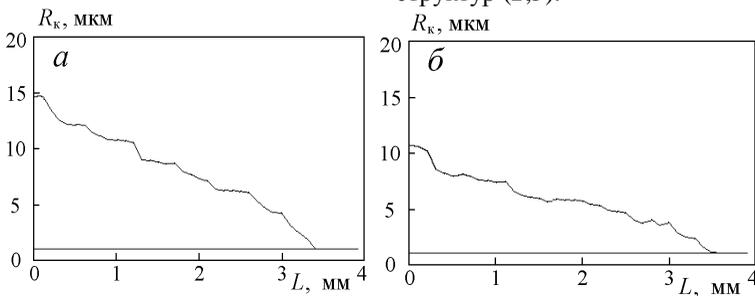


Рис. 6. Изменение радиуса разрядного канала вдоль наиболее длинной ветви разрядной структуры.  $V = 24$  (а) и 36 кВ (б).  $u_0 = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 5 \cdot 10^{-3}$  см $^2$ В $^{-2}$ с $^{-1}$ .

Поперечный радиус разрядного канала уменьшается с увеличением напряжения между электродами (рис. 6), вследствие уменьшения времени развития разрядной структуры. Средние характеристики каналов разрядной структуры зависят от приложенного напряжения (рис. 7). Средняя удельная электропроводность ка-

налов в диапазоне напряжений 21 – 36 кВ изменялась от  $\approx 10^{-3}$  до  $\approx 10^{-1}$  Ом $^{-1}$  см $^{-1}$ . Падение напряжения на единицу длины канала изменялось со временем, оставаясь примерно постоянным вдоль канала (среднее значение  $E = 25 - 60$  кВ/см, в зависимости от приложенного напряжения). Линейная плотность электрического заряда максимальна вблизи головки канала, в остальной части канала она значительно меньше и может менять знак на противоположный (рис. 7).

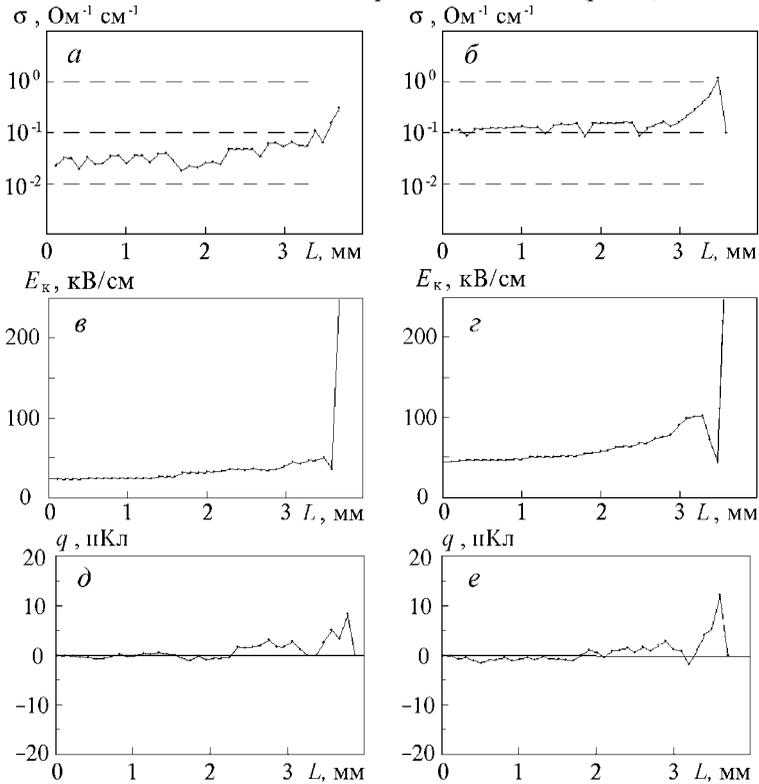


Рис. 7. Распределения удельной электропроводности (*a, б*), напряженности электрического поля (*в, г*), заряда (*д, е*) вдоль наиболее длинного канала разрядной структуры при  $V = 24$  (слева) и 36 кВ (справа).  $u_0 = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 6 \cdot 10^{-3}$  см $^2$ В $^{-2}$ с $^{-1}$ .

Модель роста разрядных структур позволяет описать структуры различных типов. На рис. 8, *a, б* показано развитие кустообразных разрядных структур во времени (скорость роста  $\sim 1$  км/с), моделирование которых проводилось при относительно низкой критической напряженности поля. Удельная электропроводность структур низкая  $\sigma \sim 5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}$  Ом $^{-1}$  см $^{-1}$ . Для сравнения показана последовательность развития разрядной структуры в воде с аналогичными характеристиками разрядных каналов.

На рис. 9, *a–г* показано развитие филаментарной разрядной структуры в форме дерева, полученное моделированием. На рис. 9, *д* показана типичная филаментар-

ная разрядная структура в виде дерева в кремнийорганическом масле. Характеристики каналов, полученные моделированием, соответствуют характеристикам реальных разрядных каналов.

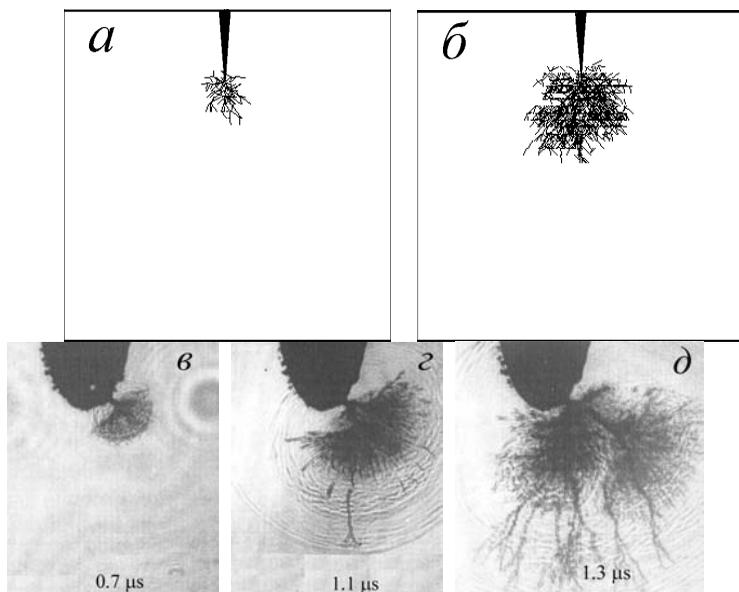


Рис. 8. Развитие медленных кустообразных разрядных структур. Моделирование при  $V = 24$  кВ,  $t = 0.17$  (а) и  $0.27$  мкс (б).  $u_0 = 3.4 \cdot 10^3$  см/с,  $g = 60$  кВ/см,  $\chi = 2.2 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>. Картины развития разряда в воде (В.В. Лопатин, В.Р. Кухта) при  $V = 30$  кВ, радиус острия 230 мкм (в–д).

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ РАБОТЫ

Восстановленные зависимости  $\mu(E)$  для н-гексана, перфтордibuтилового эфира, трансформаторного масла позволяют рассчитывать вероятности инициирования разряда в диэлектрике при любой конфигурации электродов, произвольной форме и амплитуде напряжения. Таким образом, можно прогнозировать прочность диэлектрика для заданных условий эксперимента. Показана возможность компьютерного моделирования инициирования разряда в жидкостях на основании полученных зависимостей  $\mu(E)$ .

Качественным и количественным сопоставлением результатов моделирования со всем объемом имеющихся экспериментальных данных доказано, что совместное использование уравнений электродинамики, предложенной модели гидродинамического расширения каналов и стохастического критерия роста разрядных структур позволяет адекватно описать формы и динамику развития разрядных структур в жидкостях. В отличие от ранее существовавших моделей, настоящая модель описывает явление развития разрядных структур от момента подачи на разрядный промежуток напряжения до момента замыкания промежутка проводящим каналом.

Разработанный приближенный метод расчета давления, радиуса и скорости

гидродинамического расширения элемента развивающегося разрядного канала позволил впервые использовать в моделях ветвящихся разрядных структур удельную электропроводность каналов, вместо интегральной электропроводности, использовавшейся ранее.

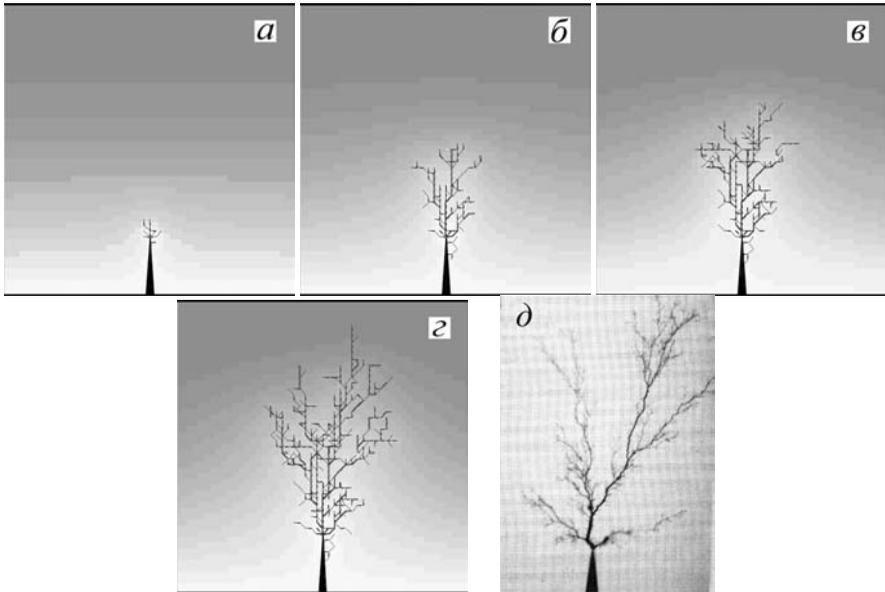


Рис. 9. Развитие филаментарных разрядных структур в форме деревьев. Моделирование при  $V = 30$  кВ,  $t = 0.024$  (а),  $0.24$  (б),  $0.36$  (в) и  $0.49$  мкс (г).  $\nu_0 = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>. Разрядная структура в кремнийорганическом масле (Chadband W.G.) при  $V = 22.75$  кВ,  $d = 3$  мм.

Компьютерное моделирование развития разрядных структур в жидкостях показало, что развитие ветвящейся разрядной структуры существенно отличается от распространения линейного канала, которое рассматривается некоторыми авторами как модельная задача при исследовании электрического разряда. При моделировании роста разрядных структур с постоянной удельной электропроводностью наблюдались два режима: при малых значениях  $\sigma$  развивались медленные, интенсивно ветвящиеся структуры, а при высокой  $\sigma$  развивались быстрые, слабоветвящиеся структуры. Получены значения падения напряжения на единицу длины разрядного канала и значения удельной электропроводности каналов для разрядных структур разных типов. Полученные значения согласуются с оценками, которые ранее выполнялись на основе анализа экспериментальных данных.

Дальнейшее развитие модели может происходить в нескольких направлениях: детализация описания процессов в разрядных каналах, уточнение вида функции вероятности роста структуры как на основе сравнения с экспериментальными данными, так и из расчетов кинетических процессов на кончиках разрядных каналов, включение в модель поляризационных и других физических явлений в диэлектрике.

## Основные результаты диссертационной работы опубликованы в следующих работах:

1. Карпов Д. И., Лопатин В. В., Носков М. Д. Влияние высокопроводящих барьеров на развитие дендритов в диэлектрике // *Электричество*.– 1995.– № 7.– С. 59–61.
2. Lopatin V.V., Noskov M.D., Karpov D.I. The effect of the barriers with high conductivity and dielectric permittivity on the dendrite development in dielectric // 9<sup>th</sup> Symposium on High Voltage Engineering Solid and liquid dielectrics and insulators, Graz, Austria, August 28 – September 1, 1995: Proceedings.– S.I.: IEEE, 1995.– P. 1075 (1–3).
3. Карпов Д.И., Носков М.Д., Плешков О.И. Стохастическое моделирование предпробойных процессов в слабопроводящих жидкостях // «Современные проблемы электрогидродинамики и электрофизики жидких диэлектриков», С.-Петербург, 24-28 июня, 1996: Доклады IV Международной конференции – М.: BBB, 1996. – С.77–84.
4. Noskov M., Karpov D., Lopatin V., Pleshkov O. The simulation of the discharge channel propagation in liquids // 12<sup>th</sup> International Conference on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquids (ICDL), Roma, Italy, July 15–19, 1996: Proceedings. – Milan: ELLEPI, 1996. – P.263–266.
5. Карпов Д.И. Рост стримеров при пробое конденсированных диэлектриков в моделях с «физическим» временем // «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 1998: Материалы XXXVI научной студенческой конференции. Физика.– Новосибирск: Новосибирский ун-т, 1998.– С. 40–41.
6. Kupershtokh A.L., Karpov D.I. Analysis of the streamer growth models with “physical” time // 2<sup>nd</sup> Russian-Korean International Symposium on Science and Technology "KORUS'98", Tomsk, August 30 – September 5, 1998: Abstracts.– Tomsk: Tomsk Polytechnical University, 1998. – P. 66.
7. Karpov D.I., Kupershtokh A.L. Models of streamer growth with “physical” time and fractal characteristics of streamer structures // 1998 IEEE International Symposium on Electrical Insulation, Arlington, Virginia, USA, June 7–10, 1998: Conference Record.– Vol. 2.– S.I.: IEEE, 1998.– P.607–610.
8. Kupershtokh A.L., Karpov D.I. Stochastic Features of Initiation of Liquid Dielectric Breakdown at Small Area of Positive Electrode // 13<sup>th</sup> International Conference on Dielectric Liquids (ICDL), Nara, Japan, July 20-25, 1999: Proceedings. – S.I.: IEEE, 1999. – P.203–206.
9. Карпов Д.И., Плешков О.И., Носков М.Д. Фрактальная модель развития разряда в диэлектриках // *Химическая технология и автоматизация предприятий ядерного топливного цикла: Сб. научных статей*.– Северск, 1999. – С.114–118.
10. Куперштох А.Л., Карпов Д.И. Моделирование электрического пробоя жидкостей в трехмерных моделях с «физическим» временем // «Физика импульсных разрядов в конденсированных средах», Николаев, Украина, 6–10 сентября, 1999: Материалы IX Научной школы.– Николаев, 1999.– С. 21–22.
11. Карпов Д.И., Куперштох А.Л. Стохастические закономерности зарождения пробоя в жидких диэлектриках // «Физика импульсных разрядов в конденсированных средах», Николаев, Украина, 6–10 сентября, 1999: Материалы IX Научной школы.– Николаев:, 1999.– С. 19–20.
12. Kupershtokh A.L., Palchikov E.I., Karpov D.I., Ershov A.P. Probability density function of electrical breakdown initiation in dielectric liquids under AC and DC voltage // 2<sup>nd</sup> International workshop "Electrical conduction, convection and breakdown in fluids", Grenoble, France, May 4–5, 2000.– Grenoble, 2000.– P. 91–94.
13. Kupershtokh A.L., Palchikov E.I., Karpov D.I., Ershov A.P. Stochastic regularities of electrical breakdown initiation in dielectric liquids under AC voltage // VI Международная научная конференция «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей», С-Петербург, 26–30 июня, 2000: Сборник докладов.– С-Петербург, 2000.–

С.175–178.

14. Куперштох А.Л., Карпов Д.И. Стохастическое моделирование зарождения пробоя в перфтордибутиловом эфире // «Физика импульсных разрядов в конденсированных средах», Николаев, Украина, 20–26 августа, 2001: Материалы X Международной Научной школы-семинара.– Николаев: «Атолл», 2001.– С.7–9.
15. Куперштох А.Л., Карпов Д.И., Вителлас И., Агорис Д.П., Хараламбакос В.П. Динамическая электрическая прочность трансформаторного масла // «Физика импульсных разрядов в конденсированных средах», Николаев, Украина, 20–26 августа, 2001: Материалы X Международной Научной школы-семинара.– 2001. – Николаев: «Атолл», 2001.– С.9–11.
16. Куперштох А.Л., Карпов Д.И. Моделирование расширения канала стримера на предпробойной стадии электрического разряда // «Импульсные процессы в механике сплошных сред», Николаев, Украина, 20–26 августа, 2001: Материалы IV Международной Научной школы-семинара.– Николаев: «Атолл», 2001.– С. 11–13.
17. Куперштох А.Л., Карпов Д.И. Стохастическая модель роста стримеров в жидких диэлектриках с учетом расширения стримерных каналов // «Импульсные процессы в механике сплошных сред», Николаев, Украина, 20–26 августа, 2001: Материалы IV Международной Научной школы-семинара.– Николаев: «Атолл», 2001. – С. 13–15.
18. Kupershtokh A.L., Vitellas I., Agoris D.P., Karpov D.I., Charalambakos V.P. Stochastic regularities of electrical breakdown initiation in transformer oil // IEEE Industry Applications Society Thirty Sixth Annual Meeting, Chicago, Illinois, USA, September 30 – October 4, 2001: Proceedings.– P.2729–2736.
19. Simulation of breakdown in air using cellular automata with streamer to leader transition / A. L.Kupershtokh, V. Charalambakos, D. Agoris, D. I. Karpov // J. Phys. D: Appl. Phys.– 2001.– No. 34.– P. 936–946.
20. Динамическая электрическая прочность перфтордибутилового эфира / А. Л. Куперштох, Е. И. Пальчиков, Д. И. Карпов и др. // «Инновационные технологии – 2001», Красноярск, 20–22 июня, 2001: Материалы международного научного семинара.– Т. 1.– Красноярск: Изд-во НИФТИ, 2001.– С. 134–138.
21. Karpov D. I. Stochastic model of discharge development in liquids before breakdown // Proceedings of the 6<sup>th</sup> Russian-Korean International Symposium on Science and Technology «KORUS-2002», Novosibirsk, June 24–30, 2002.– Vol. 2.– Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 2002.– P. 265–269.
22. Karpov D. I., Kupershtokh A. L., Palchikov E. I. Dynamic electric strength of liquid perfluorodibutyl ether // 6<sup>th</sup> Russian-Korean International Symposium on Science and Technology «KORUS-2002», Novosibirsk, June 24–30, 2002.– Vol. 1.– Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2002.– P. 418–421.
23. Kupershtokh A.L., Karpov D.I. Stochastic model of streamer growth in dielectric liquids with hydrodynamic expansion of streamer channels // 14<sup>th</sup> International Conference on Dielectric Liquids (ICDL), Graz, Austria, July 7–12, 2002: Proceedings. – S.l.: IEEE, – 2002. – P.111–114.
24. Kupershtokh A.L., Palchikov E.I., Karpov D.I., Vitellas I., Agoris D.P., Charalambakos V.P. Stochastic model of breakdown initiation in dielectric liquids under AC voltage // 14<sup>th</sup> International Conference on Dielectric Liquids (ICDL), Graz, Austria, July 7–12: Proceedings. – S.l.: IEEE, 2002. – P. 115–118.
25. Stochastic model of breakdown initiation in dielectric liquids / A. L. Kupershtokh, E. I. Palchikov, D. I. Karpov et al. // J. Phys. D: Appl. Phys.– 2002.– Vol. 35, No. 23.– P. 3106–3121.

---

Подписано в печать 8.10. 2003 г.  
Формат бумаги 60×84 1/16.  
Тираж 100 экз.

Заказ № 94.  
1 п.л.  
Бесплатно.

---

Ротап rint Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН  
630090, г. Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15.