

Глава 4. Описание канала разряда в стохастической модели роста разрядных структур

4.1. Выбор закона электропроводности канала

Процессы в разрядных каналах играют столь же важную роль в развитии пробоя в жидких диэлектриках, как и при искровом разряде в длинных газовых промежутках. Известно (например, [52, 58] и др.), что в некоторых случаях рост нитевидных (“filamentary”) разрядных структур прекращается до пересечения ими зазора между электродами без последующего пробоя (незавершенный разряд). Этот факт указывает на неполную релаксацию заряда в разрядной структуре, что приводит к уменьшению потенциала на ее кончиках. В ряде работ [30, 36, 37, 58] сделаны оценки среднего падения потенциала вдоль каналов стримера. По длине каналов филаментарной разрядной структуры в пентане в миллиметровых зазорах сделаны оценки падения напряжения в каналах: для давления 100 кПа это 70 кВ/см [58]. Столь высокие значения свидетельствуют о достаточно низкой по сравнению с хорошими проводниками удельной электропроводности разрядных каналов в жидкости.

Регистрируемое свечение, высокая электропроводность каналов разряда по отношению к окружающей жидкости свидетельствуют о том, что в канале вещество ионизовано. Однако, в отличие от газов, в которых длина свободного пробега частиц достаточно велика и возможен кинетический расчет параметров плазмы [101], при описании кинетики частиц в жидкостях возникают принципиальные трудности. Как отмечалось в главе 1, в настоящее время в качестве наиболее вероятных рассматриваются две модели развития разрядных структур в жидких диэлектриках – за счет ионизации атомов и молекул непосредственно в жидкости и через «пузырьковый» механизм. В работах [30, 80, 82] показано, что ионизационный механизм может реализовываться скорее в области очень высоких напряжений для быстрых (наносекундных) разрядов и при повышенных давлениях, второй – при меньших напряжениях. В некотором диапазоне напряжений оба механизма могут существовать одновременно и конкурировать.

вать. В ряде работ [103-106] для описания разрядных процессов жидкостях с высокой подвижностью заряженных частиц использовался подход, аналогичный применяемому в газах. Полученные в этих работах результаты дают только качественное представление о кинетике ионизации и рекомбинации, поскольку, как отмечалось, например, авторами работы [103], информация о кинетических коэффициентах в жидкостях в полях $E > 100$ кВ/см является весьма приближенной и неполной. В условиях, когда разряд развивается медленнее (например, за микросекунды), необходимо учитывать джоулев нагрев и гидродинамическое расширение каналов. В таких условиях описание процессов диссоциации, ионизации, рекомбинации и т.п. методами кинетики на сегодняшний день невозможно хотя бы потому, что неизвестны параметры вещества в канале – давление, плотность, температура. По этим причинам расчет проводимости и других характеристик плазмы в разрядных каналах также невозможен. Поэтому, в настоящей работе использовались наиболее простые модели электропроводности, справедливые только в первом приближении.

Наиболее простой является модель постоянной электропроводности. Основное достоинство этой модели – возможность легко проследить влияние значений электропроводности разрядной структуры на результаты моделирования. Однако, из экспериментальных данных можно сделать вывод, что электропроводность разрядных каналов существенно меняется во время развития разряда. Тем не менее, в частном случае, когда электропроводность относительно высока, релаксация заряда в разрядных каналах происходит достаточно быстро, и структуру, за исключением ее кончиков, во все моменты времени можно считать эквипотенциальной. Тогда изменение электропроводности в каждом участке канала не играет заметной роли.

Для более детального описания каналов разрядной структуры можно использовать приближение постоянной удельной электропроводности. В каждом участке канала происходит выделение энергии, которое можно рассчитать по напряженности поля в канале и плотности протекающего в нем электрического тока. В результате джоулева нагрева повышается давление в канале и происхо-

дит его расширение. Для расчета токов, протекающих через канал в последующие моменты времени, необходимо знать, как меняется площадь сечения его участков со временем, т.е. кинематику расширения каждого участка разрядного канала. Характерной особенностью задачи о расчете гидродинамических течений, сопровождающих рост разрядных структур, является сочетание чрезвычайно сложной, нерегулярной границы между проводящей фазой и диэлектриком со значительной разницей в пространственных масштабах явлений (расстояние между электродами превышает диаметр плазменного канала более чем в 100 раз). Вследствие этой особенности применение существующих численных методов невозможно. Для приближенного описания расширения участков разрядных каналов были использованы следующие предположения.

- Каждый канал представляется в виде набора цилиндрических элементов длины l и радиуса R_k .
- Гидродинамическое расширение каждого элемента рассматривается независимо от других элементов.
- При описании расширения каналов стримеров считается, что радиус цилиндрических сегментов, из которых состоит разрядная структура, $R_k \ll l$, то есть, сегмент можно приближенно считать частью бесконечного цилиндрического канала. Такое допущение согласуется с экспериментальными данными. Например, для филаментарных структур и структур в форме слабоветвящихся деревьев расстояние между местами разветвлений ~ 100 мкм [79], в то время как начальный радиус канала 1–5 мкм.
- Для характеристики элемента канала использовались значения физических величин, усредненные по объему элемента. В частности, такие величины, как давление, электропроводность и электрическое поле одинаковы по сечению элемента канала (в разных элементах они могут отличаться).
- Состояние элемента канала в каждый момент времени определялось удельной электропроводностью σ , напряженностью электрического поля вдоль элемента E_k , текущим давлением в элементе p_k , радиусом R_k и скоростью расширения элемента канала u_k .

- При расширении канала его граница считалась непроницаемой для вещества.

Этот подход позволяет включить в стохастическую модель роста разрядных структур расширение разрядных каналов за счет энерговыделения в них.

При моделировании роста разрядных структур с учетом расширения разрядных каналов использовались два закона для удельной электропроводности канала. В первом случае расчеты проводились при постоянной удельной электропроводности каждого элемента разрядной структуры. Во втором случае считалось, что удельная электропроводность каждого элемента пропорциональна объемной плотности энергии в канале.

4.2. Баланс энергии в разрядном канале

Энергия, поступающая в элемент канала разрядной структуры, в основном расходуется на увеличение внутренней энергии плазмы канала $W_{\text{вн}}$ и на расширение канала $W_{\text{р}}$

$$W = W_{\text{вн}} + W_{\text{р}}.$$

В главе 1 приводились экспериментальные данные о том, что в разрядных каналах плотность вещества существенно ниже плотности окружающей канал жидкости. Поэтому считалось, что внутренняя энергия плазмы $W_{\text{вн}}$ складывается, в основном, из энергии диссоциации, энергии частичной ионизации и кинетической энергии частиц плазмы.

Уравнение состояния вещества в канале с учетом ионизации будет иметь довольно сложный вид. Однако, так же как авторы работ [114, 142] будем считать, что удельную внутреннюю энергию $w_{\text{вн}}$ можно довольно грубо аппроксимировать участками с простой степенной зависимостью вида:

$$w_{\text{вн}} = A\rho^a T^b, \quad (4.1)$$

пригодной в пределах каждого участка, где A , a и b – постоянные. Уравнение состояния такого вида позволяет выразить связь между удельной энергией газа, его плотностью и давлением в виде, формально идентичном соответствующим выражениям для идеального газа. Действительно, из выражений для свободной

энергии $F = -T \int \frac{w_{\text{ВН}}}{T^2} dT$ и давления $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \rho^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T$ используя (4.1),

получим:

$$p = (\gamma_* - 1) w_{\text{ВН}} \rho, \quad \text{или} \quad p = (\gamma_* - 1) W_{\text{ВН}} / V, \quad (4.2)$$

где γ_* является эффективным показателем адиабаты, V – объем элемента канала.

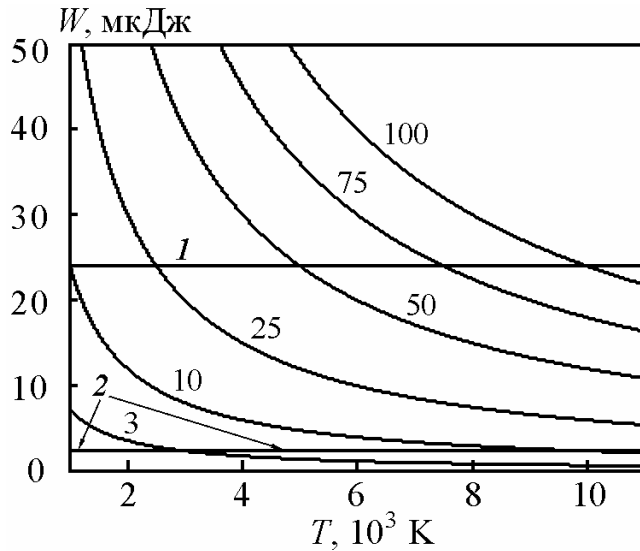


Рис. 4.1. Энергия полной диссоциации н-пентана в элементе разрядного канала в зависимости от температуры в канале и давления. 1 и 2 – значения энергии, выделяющейся в канале за время 1 мкс и 0.1 мкс, соответственно. Числа над кривыми указывают значения давления в атмосферах.

Экспериментальные данные дают достаточно приблизительное представление о значениях этих величин. На рис. 4.1 показаны кривые энергии полной диссоциации N молекул н-пентана в участке разрядного канала длиной 100 мкм и радиусом 10 мкм при разных давлениях в канале. При вычислении считалось, что в канале справедливо уравнение состояния идеального газа $N = PV/k_B T$, где k_B – постоянная Больцмана, а также использовалась энергия диссоциации из [144]. Горизонтальные прямые показывают значения средней выделившейся в каналах джоулевой энергии через 0.1 и 1 мкс после начала разряда (соответствует условиям эксперимента в [58]). Зная давление, температуру и радиус элемента канала в каждый момент времени, можно оценить по поряд-

В [143] отмечается, что эффективный показатель адиабаты слабо меняется при переходе от одного газа к другому, если применять аппроксимацию (4.2) в широком диапазоне температур и плотностей.

Оценка значения показателя адиабаты может быть получена, если известны термодинамические параметры канала – число частиц в единице объема, давление, темпе-

ку величины количество частиц в нем. Информацию о давлении и радиусе канала в каждый момент времени можно получить из решения задачи о расширении каждого элемента канала при известном джоулевом энерговыделении. В следующих параграфах рассматривается задача о расширении элемента разрядного канала.

4.3. Расширение элемента канала разрядной структуры

Рассмотрим задачу о расширении бесконечного непроницаемого цилиндрического канала. Предположение о непроницаемости стенок канала не означает, что при рассмотрении процессов в канале можно пренебречь потоком вещества со стенок внутрь канала. Однако, с точки зрения внешней гидродинамической задачи учет потока практически не влияет на результаты расчета смещения границы канала при его расширении. Действительно, аналогично тому, как это было сделано в [145], сопоставим объемы испарившейся жидкости и канала. Основная доля выделившейся энергии идет на диссоциацию молекул. Считая, что вся выделившаяся в канале энергия W идет на диссоциацию молекул жидкости, испарившийся объем $V_{\text{и}}$ можно оценить из очевидного соотношения

$$V_{\text{и}} = \frac{W M}{N_A D \rho},$$

где D – энергия диссоциации молекулы, M – молярная масса, ρ –

плотность жидкости, N_A – постоянная Авогадро.

Энергию W можно оценить следующим образом. Например, для н-пентана C_5H_{12} по данным экспериментов [58] максимальный диаметр канала был 30 мкм. Предполагая, что структура состоит из одного канала длиной $l \sim 1$ см (характерный размер структуры), получим оценку для объема канала $V = \pi R_k^2 \cdot l \approx 7 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3$. Энергия диссоциации на одну молекулу н-пентана ≈ 66 эВ [144]. Однако, по данным спектроскопии [146-148], в разрядных каналах образуется множество различных молекул и радикалов, таких как H , C_2 , H_2 , CH_4 , C_2H_6 , и других, что указывает на неполную диссоциацию молекул. Для оценки будем считать, что молекула н-пентана в канале диссоциирует на радикалы C_2H_5 и C_3H_7 . Для этого требуется энергия $D = 3.55$ эВ (для образования других радика-

лов требуется заметно большая энергия) [144]. На образование канала затрачивается энергия электрического поля, запасенная в объеме диэлектрика V_n , преобразовавшемся затем в канал $W_n = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 V_n/2$, и энергия, поступающая в канал после его образования. Напряженность поля, в котором происходит образование канала, составляет $\sim 10^9$ В/м [55]. Считая, что начальный радиус канала ~ 5 мкм, получим оценку энергии в объеме V_n в 40 мкДж. Согласно данным эксперимента, в разрядной структуре при напряжении между электродами 24 кВ протекает ток ~ 1 мА [49, 58]. Тогда за время ~ 1 мкс в структуре выделяется энергия 24 мкДж. Учитывая плотность пентана 626 кг/м³, получаем оценку объема испарившейся жидкости $V_{\text{исп}} < 2 \cdot 10^{-14}$ м³, что много меньше объема канала. Для воды, для которой энергия диссоциации молекулы на атомы равна ≈ 10 эВ [145], объем испарившейся жидкости при том же энерговыделении $\sim 5 \cdot 10^{-16}$ м³.

Расширение длинного цилиндра в жидкости было подробно исследовано при изучении канала электрической искры на стадии завершения пробоя [149а, 149-151]. Так, в [151] было получено автомодельное решение, которое имеет место при линейной зависимости мощности энерговыделения от времени. Скорость движения стенки канала в этом случае постоянна. Зависимость давления P_k на стенку канала от скорости ее движения u_k в воде для автомодельного расширения хорошо описывалась приближенной формулой:

$$p_k - p_0 = 1.35 \rho_0 u_k^2 \left(\frac{c_0}{u_k} \right)^{0.3}, \quad (0.05 c_0 \leq u_k \leq c_0). \quad (4.3)$$

Здесь c_0 , p_0 , ρ_0 – скорость звука, давление и плотность в невозмущенной жидкости. Отсюда следует, что избыточное давление $p_k - p_0$ для автомодельного течения определяется только скоростью движения стенки канала. В работе [145] зависимость давления на поршень от скорости его расширения получена в приближении линейной акустики:

$$p_k = p_0 + \rho_0 u_k^2 \left[\ln \left(\frac{2c_0 t}{R_k} \right) - \frac{1}{2} \right] + \rho_0 R_k \dot{u}_k \ln \left(\frac{2c_0 t}{R_k} \right). \quad (4.4)$$

Для анализа корректности использованных приближений в [152, 153] по-

ставленная задача решалась с использованием численных методов. В этих работах также исследовалась структура неустановившихся течений.

Известные оценки по данным экспериментов дают значения скорости движения стенки канала разрядной структуры $u_k \sim 100$ м/с (глава 1), то есть процесс расширения канала является относительно медленным. Этот вывод также подтверждает малая амплитуда ударных волн. Выделение энергии, особенно на начальной стадии расширения каналов разрядной структуры, существенно зависит от их проводимости, которая определяется изменяющимися во времени значением напряженности электрического поля в канале и параметрами плазмы. Поэтому поставленную задачу нужно решать как нестационарную.

Задача цилиндрически симметрична. Использовалась система уравнений для движения невязкой жидкости, которая в переменных Лагранжа имеет вид:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\tilde{V}_0 \left(\frac{R(r, t)}{r} \right) \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \tilde{V} = \tilde{V}_0 \frac{R}{r} \frac{\partial R}{\partial r}, \quad (4.5)$$

где $\tilde{V} = 1/\rho$ – удельный объем, \tilde{V}_0 – удельный объем при нормальных условиях, ρ – плотность жидкости, u и p обозначают скорость и давление, r – радиальная координата элемента жидкости в начальный момент времени (Лагранжева координата), $R = R(r, t)$ – Эйлера координата в момент времени t . Система замыкается уравнением состояния жидкости. Для большого числа жидкостей в достаточно широком диапазоне давлений применимо уравнение состояния в форме Тета [154, 155]:

$$p - p_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left[(\rho/\rho_0)^n - 1 \right], \quad (4.6)$$

где p_0 , ρ_0 , c_0 – давление, плотность и скорость звука в среде при обычных условиях. Например, для воды при давлениях $p < 3$ ГПа $n = 7.15$ [151], для n -пентана $n = 11.3$, для циклогексана $n = 10.7$ [156].

Для решения поставленной задачи использовался численный метод Неймана – Рихтмайера, подробно описанный в [157]. В конечных разностях система (4.5) – (4.6) имеет вид:

$$\frac{R_j^{k+1} - R_j^k}{\Delta t} = u_j^{k+1}, \quad \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = -\tilde{V}_0 \left(\frac{R_j^k}{r_j} \right) \frac{p_{j+1/2}^k - p_{j-1/2}^k}{\Delta r}, \quad (4.7)$$

$$\tilde{V}_{j+1/2}^{k+1} = \tilde{V}_0 \frac{(R_{j+1}^{k+1})^2 - (R_j^{k+1})^2}{(r_{j+1})^2 - (r_j)^2}, \quad p_{j+1/2}^{k+1} = p_0 + \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left[\left(\frac{\tilde{V}_0}{\tilde{V}_{j+1/2}^{k+1}} \right)^n - 1 \right],$$

где k – текущий шаг по времени, индекс j нумерует узлы пространственной сетки.

Известно, что система (4.5) – (4.6) в задаче о расширении цилиндрического поршня может иметь решения в виде расходящейся от оси симметрии ударной волны. Для сквозного расчета течений, в том числе с ударными волнами, использовался метод искусственной вязкости. Согласно основной идее метода в уравнения движения и энергии добавляется член, отвечающий за диссипацию. В результате этого скачок заменяется относительно гладким изменением значений u , p , \tilde{V} на протяжении небольшого числа интервалов сетки. Использовалось следующее выражение для искусственной вязкости:

$$q = \begin{cases} \frac{2a^2}{\tilde{V}_{j+1/2}^k + \tilde{V}_{j+1/2}^{k-1}} (u_{j+1}^k - u_j^k)^2, & \text{если } (u_{j+1}^k - u_j^k) < 0, \\ 0, & \text{если } (u_{j+1}^k - u_j^k) \geq 0, \end{cases}$$

где $a = 3$ – толщина скачка.

С учетом искусственной вязкости второе уравнение в (4.7) приобретает вид:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = -\tilde{V}_0 \left(\frac{R_j^k}{r_j} \right) \left(\frac{(p_{j+1/2}^k - p_{j-1/2}^k) + (q_{j+1/2}^k - q_{j-1/2}^k)}{\Delta r} \right),$$

При решении задачи расширения бесконечного непроницаемого цилиндрического поршня в жидкости считалось, что в начальный момент времени среда покоится, т.е. $u = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$. Число узлов сетки выбиралось достаточно большим, чтобы в течение времени наблюдения за решением ударная волна не успевала достичь внешней границы области моделирования. В качестве граничных условий на внутренней границе использовалось уравнение баланса

энергии для элемента канала. Считая, что состояние вещества в канале описывается уравнением (4.2), запишем:

$$\frac{N(t)}{l} = p_{\text{к}} \frac{d s}{d t} + \frac{1}{\gamma_* - 1} \frac{d}{d t} (p_{\text{к}} s), \quad (4.8)$$

где l – длина канала, $s = \pi R_{\text{к}}^2$ – площадь его поперечного сечения, $R_{\text{к}}$ – радиус канала, $N = N(t)$ – мгновенная выделяемая мощность. Отсюда получим разностное уравнение для определения давления на стенку канала в следующий момент времени:

$$p_{\text{к}}^{k+1} = \frac{(\gamma_* - 1)N(t) R_{\text{к}}^k \Delta t^{k+1} + R_{\text{к}}^k p^k}{2\gamma_* u_{\text{к}}^k \Delta t^{k+1} + R_{\text{к}}^k},$$

где $u_{\text{к}}$ – скорость расширения канала, равная скорости движения жидкости у границы. В начальный момент времени в качестве радиуса внутренней границы области моделирования берется начальный радиус канала стримера. Так как начальный радиус известен из экспериментов лишь приблизительно (см. главу 1), расчеты проводились для ряда начальных значений $R_{\text{к}}$ от 0.25 до 2.5 мкм.

Расчеты проводились с использованием уравнения состояния (4.6) для воды. Для увеличения скорости вычислений использовалось ранее применявшееся в [152] разложение в ряд выражения (4.6) по параметру $z = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ (схема Горнера):

$$p = p_0 + \rho_0 c_0^2 z (1 + z (3.07500 + z (5.27875 + z (5.47640 + 3.45000 z))))).$$

которое имеет точность $\varepsilon = 0.00001$. Значение эффективного показателя адиабаты было $\gamma_* = 1.26$ [143, 145].

На сегодняшний день эксперименты не позволяют судить о зависимости мощности, выделяющейся в каждом разрядном канале, от времени $N(t)$. Для определения $N(t)$ необходимо регистрировать ток и падение напряжения в каждом элементе канала, что затруднительно в силу стохастического характера роста разрядной структуры, ее сложной формы, малых размеров канала, малых временных масштабов и других причин. Поэтому, при расчете течений сделаны правдоподобные предположения о ходе зависимости $N(t)$ в разрядном канале.

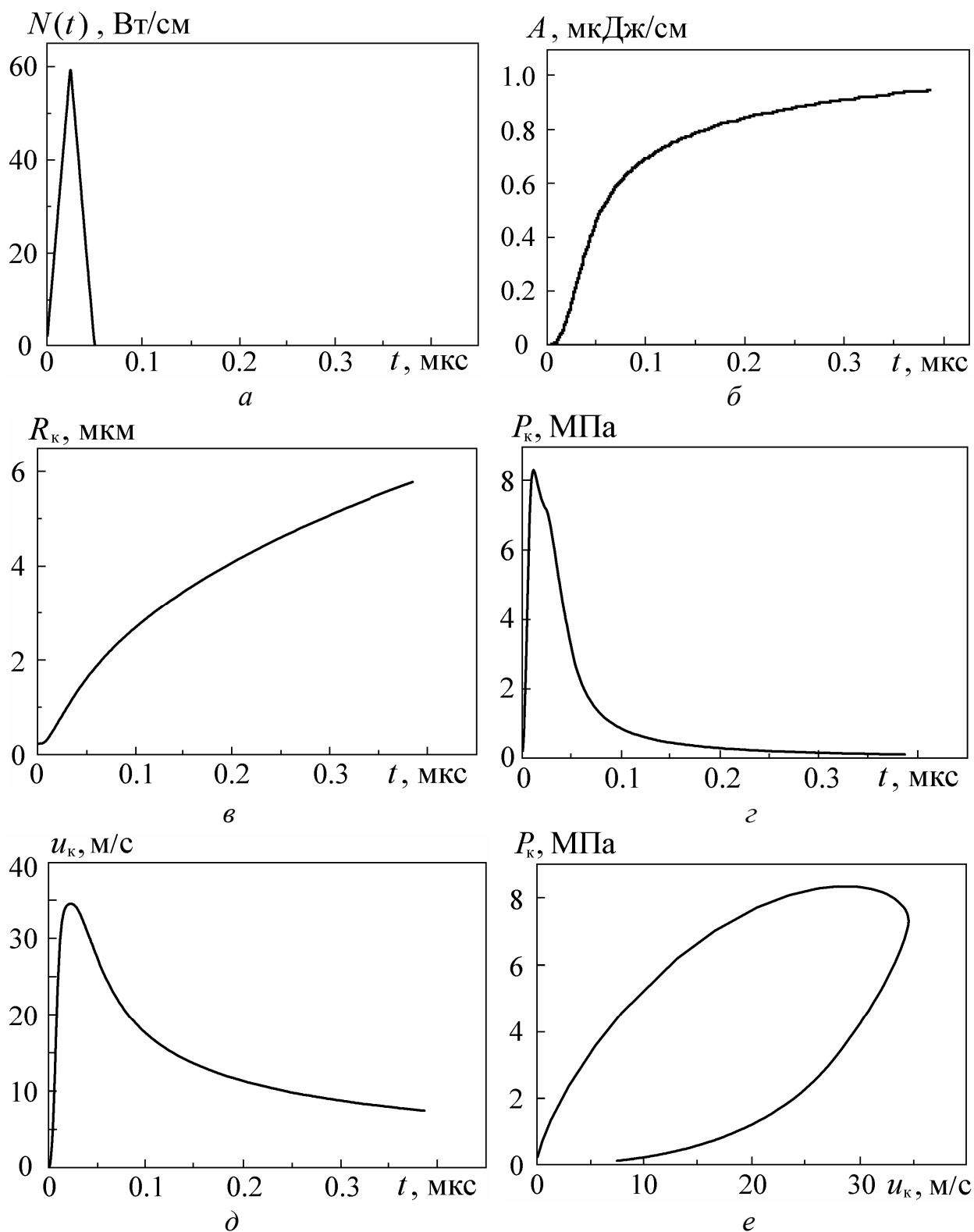


Рис. 4.2. Результаты расчета расширения бесконечного цилиндрического канала. Использовалась аппроксимация кривой мощности треугольником (а). Зависимости от времени работы, совершаемой каналом (б), радиуса канала (в), давления на стенку (г) и скорости расширения канала (д). Диаграмма давление–скорость расширения канала (е). Начальный радиус канала $R_k = 0.25$ мкм.

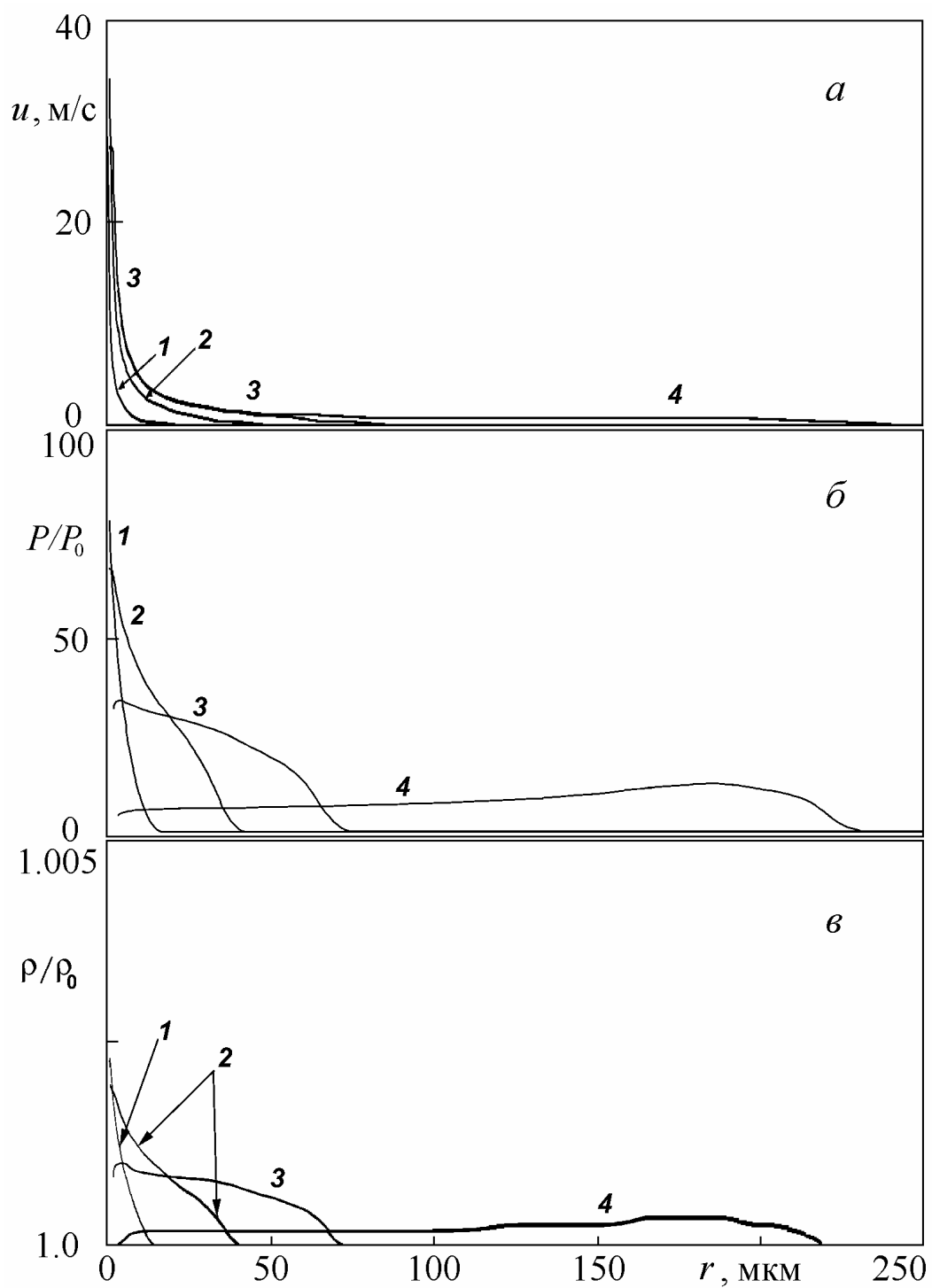


Рис. 4.3. Профили скорости (*a*), давления (*б*) и плотности (*в*) в волне от расширяющегося в жидкости цилиндра. $t = 12$ (1), 30 (2), 51 (3) и 160 нс (4). Условия те же, что и на рис. 4.2.

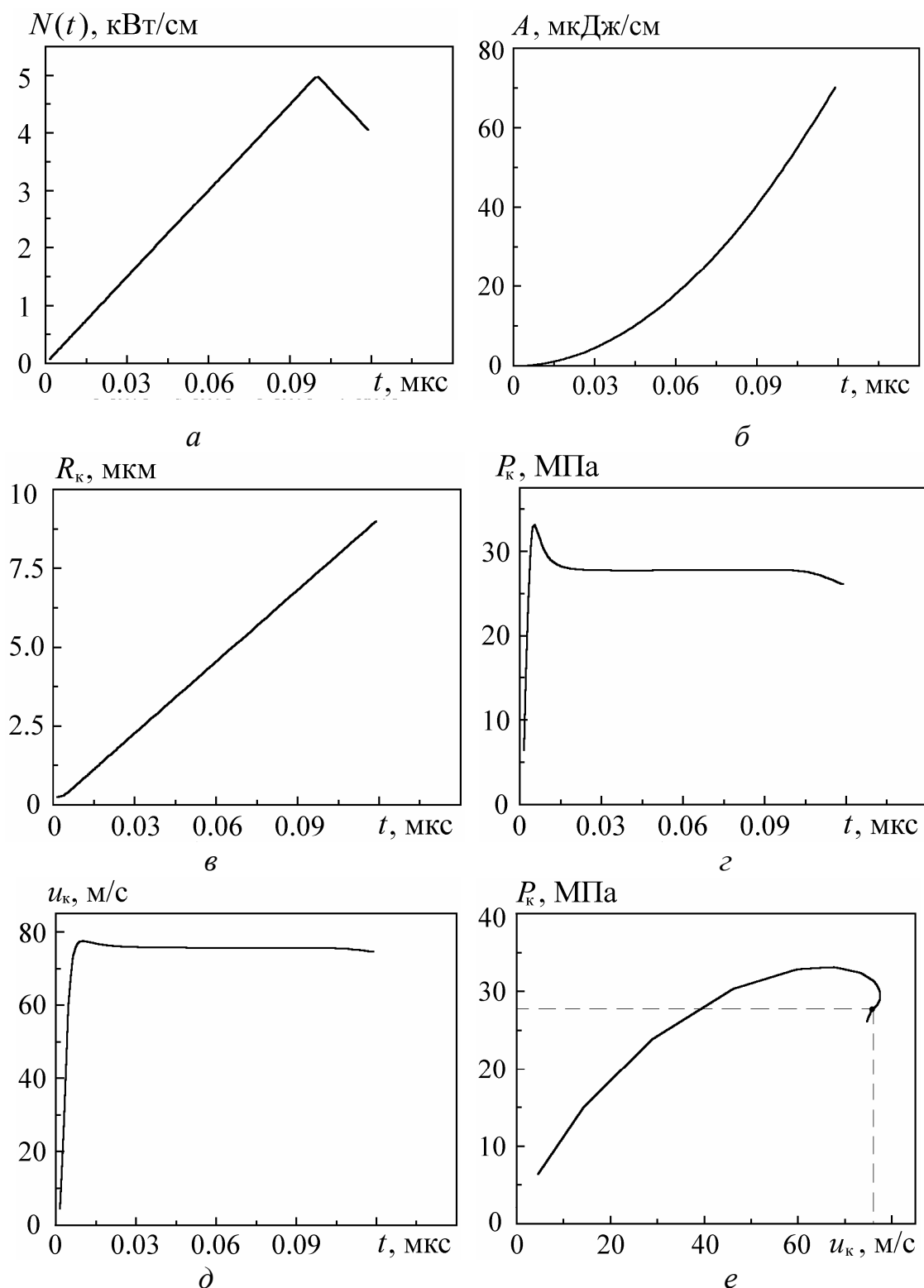


Рис. 4.4. Результаты расчета расширения бесконечного цилиндрического канала. Использовалась аппроксимация кривой мощности треугольником (*a*). Зависимости от времени работы, совершаемой каналом (*б*), радиуса канала (*в*), давления на стенку (*г*) и скорости расширения канала (*д*). Диаграмма давление–скорость расширения канала (*е*), пунктиром показана точка, соответствующая автомодельному режиму расширения. Начальный радиус канала $R_k = 0.25 \text{ мкм}$.

В экспериментах регистрируются пульсации тока, которые связывают с рядом последовательных пробоев вещества в разрядных каналах. Каждый импульс тока сопровождается выделением энергии в каналах. При расчете течений в настоящей работе зависимость мощности от времени $N(t)$, соответствующая одному импульсу тока, аппроксимировалась функциями разного вида. На рис. 4.2–4.4 приводятся результаты расчета в том случае, когда используется приближение $N(t)$ функцией в виде равнобедренного треугольника. На рис. 4.2 представлены величины, характеризующие движение стенки канала при выделяющейся в канале за один импульс энергии 1.5 мкДж/см. На рис. 4.3 представлены соответствующие этому течению профили скорости, давления и плотности жидкости в разные моменты времени. На рис. 4.4 представлены характеристики расширяющегося канала для случая более мощного энерговыделения. За время 0.2 мкс в канале выделяется энергия 500 мкДж/см. В этом случае до окончания нарастания мощности успевает установиться автомодельный режим расширения.

Расчет гидродинамических течений в трехмерном случае для каждого элемента канала структуры, состоящей из большого числа таких каналов, в настоящее время не может быть реализован, поскольку требует больших вычислительных мощностей. Один из путей, позволяющих одновременно описывать расширение всех элементов каналов разрядной структуры, заключается в упрощении уравнений модели. Последнее оказалось возможным за счет сужения диапазона применимости используемой аппроксимации.

4.4. Аппроксимация задачи о расширении элемента разрядного канала системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Формулы (4.3) и (4.4) дают связь между давлением в длинном цилиндрическом канале и скоростью движения его стенки $p_k(u_k)$ для автомодельных течений и для течений, к которым применимо акустическое приближение. Расширение участка разрядного канала является существенно нестационарной задачей, как отмечалось выше, поэтому автомодельное решение неприменимо.

Существенным недостатком акустического приближения является использование модели несжимаемой жидкости, которая, вообще говоря, неприменима для течений с ударными волнами.

Если выделение энергии в разрядном канале происходит постепенно, скачков давления в нем нет, и изменение скорости расширения границы канала стримера u_k происходит плавно. Анализ численного решения нестационарной задачи о расширении бесконечного цилиндрического канала [153] показал, что автомодельный режим для слоя жидкости вблизи стенки канала устанавливается значительно быстрее, чем для всего остального течения, поэтому при плавном энерговыделении в каждый момент времени текущие значения скорости расширения u_k и давления p_k мало отличаются от автомодельных значений. В работе [16] была предложена аппроксимация задачи о расширении участка разрядного канала, которая совпадает с (4.3) для автомодельных течений сжимаемой жидкости, а также отчасти учитывает нестационарность движения. При этом, по объему вычислений полученное приближение сопоставимо с акустическим. Считая, что в нестационарном случае на квазиавтомодельное решение накладывается возмущение, вызванное ускорением, и, используя формулу (4.3), для давления на границе канала в [16] предложено использовать уравнение:

$$p_k = p_0 + 1.35 \rho_0 c_0^{0.3} u_k^{1.7} + \kappa \rho_0 R_k \dot{u}_k . \quad (4.9)$$

где κ – постоянный коэффициент, который подбирался путем вариации, сравнивая получаемые результаты с численным («точным») решением полной нестационарной гидродинамической задачи. На рис. 4.5–4.7 приводятся диаграммы $p_k(u_k)$ для разных законов энерговыделения. Точное решение показано кривыми 1, решения в приближении системы (4.9) – кривыми 2. Показаны также зависимости, соответствующие решению в акустическом приближении для длинного цилиндра (кривые 3) из работы [145] и автомодельному решению (кривые 4).

Из рис. 4.5–4.7 видно, что при соответствующем выборе коэффициента κ нестационарное уравнение (4.9) лучше аппроксимирует решение задачи о расширении канала стримера, чем формула (4.3) для автомодельного решения или

акустическое приближение (4.4). Для выяснения границ применимости предложенной аппроксимации проводилась количественная оценка точности расчета давлений, полученных из нестационарной зависимости (4.4) и формулы (4.9) по сравнению с точным решением. Для этого рассчитывались отклонения приближенного значения давления $P(t)$ от точного решения $P_T(t)$ в виде

$$I = \left\{ \int_0^T [P(t) - P_T(t)]^2 dt \right\}^{1/2}.$$

В таблице 4.1 показаны значения $I_{ак}$ для акустического приближения (4.4), $I_{кввт}$ для квазиавтомодельной аппроксимации (4.9) при $\kappa = 1.5$. В таблице 4.1 приводится также значение величины $\Delta_1 = I_{ак}/I_{кввт}$. Чем больше значение Δ_1 превышает единицу, тем хуже акустическое приближение по сравнению с (4.9). Кривая мощности в канале аппроксимировалась равнобедренным треугольником с основанием $\tau = 50$ нс и разной высотой. Значения энергии W , поступившей при этом в канал, также приведены в таблице 4.1. Расчеты проводились от момента, в который начинается энерговыделение, до момента времени $t = 100$ нс. Начальный радиус канала был 0.25 мкм. Также, в таблице приводятся значения отношения максимальных отклонений давлений, рассчитанных по (4.4) и (4.9),

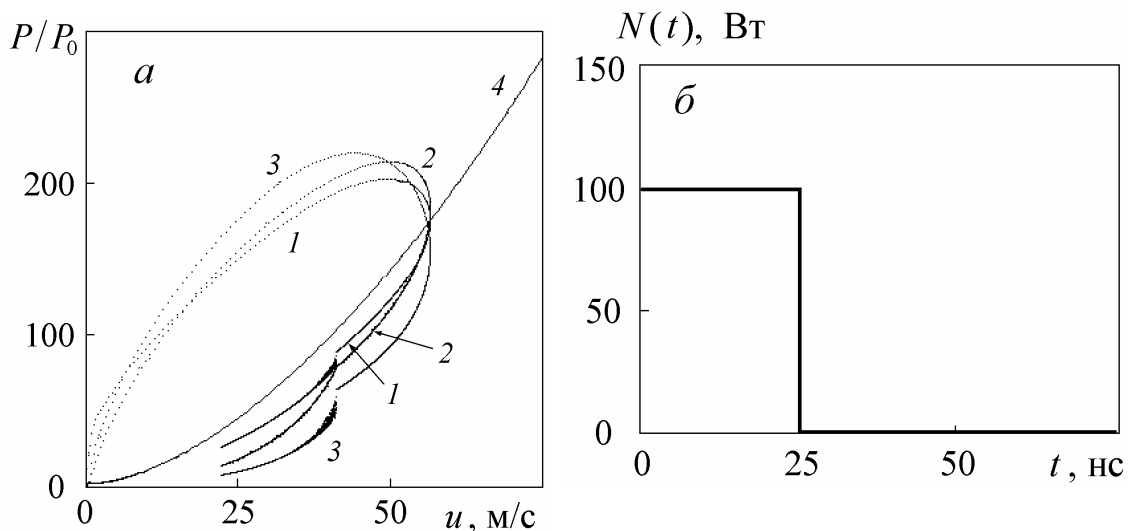


Рис. 4.5. Диаграмма $p_{\kappa}(u_{\kappa})$ (а) при аппроксимации мощности энерговыделения прямоугольным импульсом (б). 1 – точное решение, 2 – аппроксимация формулой (4.9) при $\kappa = 1.5$, 3 – решение в акустическом приближении (4.4), 4 – автомодельное решение (4.3).

от точного решения $\Delta_2 = (P_{ак} - P_T)/(P_{кавт} - P_T)$.

Таблица 4.1.

Сравнение приближенных решений задачи о расширении элемента разрядного канала (4.4) и (4.9) друг с другом и с точным решением при разной подводенной к каналу энергии

u_{max} , м/с	44	67.6	81.3	104	125	181	232
P_{max} , бар	84.7	176	240	362	492	905	1350
W , мкДж/см	2.5	12.5	25	62.5	125	500	1250
$I_{ак}$, Па·с ^{1/2}	$5.1 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^4$	$2.6 \cdot 10^4$	$3.7 \cdot 10^4$	$7.9 \cdot 10^4$	$1.3 \cdot 10^5$
$I_{кавт}$, Па·с ^{1/2}	$2.1 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^3$	$2.8 \cdot 10^3$	$3.3 \cdot 10^3$	$5.3 \cdot 10^3$	$1.7 \cdot 10^4$	$3.6 \cdot 10^4$
Δ_1	2.38	4.31	5.92	7.92	7.07	4.58	3.62
Δ_2	2.36	4.28	6.88	11.25	7.88	2.94	2.05

При аппроксимации мощности треугольной функцией автомодельный режим может установиться только при достаточно большой длительности импульса τ . Поэтому, точность полученного решения (4.9) зависит от τ . В таблице 4.2 приводятся результаты сравнения формул (4.3) и (4.9) с точным решением при разной длительности энерговыделения τ .

Таблица 4.2.

Сравнение приближенных решений задачи о расширении элемента разрядного канала (4.4) и (4.9) друг с другом и с точным решением при разной длительности энерговыделения в канале

τ , нс	35	43	50	100
u_{max} , м/с	114	108	104	86.3
$I_{ак}$, Па·с ^{1/2}	$3.3 \cdot 10^4$	$2.9 \cdot 10^4$	$2.4 \cdot 10^4$	$6.2 \cdot 10^3$
$I_{кавт}$, Па·с ^{1/2}	$4.1 \cdot 10^3$	$3.6 \cdot 10^3$	$3.3 \cdot 10^3$	$1.8 \cdot 10^3$
Δ_1	8.04	7.94	7.14	3.39
Δ_2	10.0	10.56	12.0	8.0

Установление автомодельного режима происходит тем быстрее, чем быстрее система «забывает» начальные условия. Как показано в [158], опреде-

ляющим для этого является полная подведенная к каналу энергия. Поэтому, с увеличением начального радиуса канала при фиксированном количестве поступающей в канал энергии отклонение приближенного решения от точного должно увеличиваться. Для некоторых значений начального радиуса R_0 результаты сравнения приближенного и точного решений приведены в таблице 4.3. Длительность импульса была $\tau = 50$ нс, за это время в канал поступала энергия 125 мкДж/см.

Таблица 4.3.

Сравнение приближенных решений задачи о расширении элемента разрядного канала (4.4) и (4.9) друг с другом и с точным решением при разных значениях начального радиуса канала

R_0 , мкм	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	4.0
u_{\max} , м/с	125	124	123	118	109	99.7	72.5
$I_{\text{ак}}$, Па·с ^{1/2}	$3.7 \cdot 10^4$	$3.9 \cdot 10^4$	$4.0 \cdot 10^4$	$4.0 \cdot 10^4$	$4.0 \cdot 10^4$	$3.9 \cdot 10^4$	$2.9 \cdot 10^4$
$I_{\text{кавт}}$, Па·с ^{1/2}	$5.3 \cdot 10^3$	$5.4 \cdot 10^3$	$7.1 \cdot 10^3$	$9.1 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^4$	$1.2 \cdot 10^4$	$1.4 \cdot 10^4$
Δ_1	7.07	7.19	5.66	4.42	3.65	3.16	2.0
Δ_2	7.88	6.13	5.26	3.85	2.79	2.31	1.65

В исследованных диапазонах давлений и скоростей расширения нестационарная зависимость (4.9) лучше аппроксимирует решение, чем акустическое приближение (4.4).

В сравнении с автомодельным решением (4.3) формула (4.9) дает возможность найти решение нестационарной задачи. Основное преимущество перед акустическим приближением заключается в том, что уравнение (4.9) учитывает сжимаемость жидкости (за счет использования автомодельного решения в качестве стационарного).

Из уравнения (4.9) выразим ускорение стенки канала. Выразив явно производную давления по времени из уравнения баланса энергии в канале (4.8), получим уравнение для изменения давления со временем. Добавив уравнение для связи между скоростью стенки поршня и его радиусом, получаем замкнутую

систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_k = C_1 \frac{p_k}{R_k} - C_2 \frac{u_k^{1.7}}{R_k}, \quad \dot{p}_k = -C_3 \frac{p_k}{R_k} u_k + C_4 N(t), \quad \dot{R}_k = u_k, \quad (4.10)$$

где коэффициенты $C_1 = 1/(\kappa \rho_0)$, $C_2 = 1.35 c_0^{0.3}/\kappa$, $C_3 = 2\gamma_*$, $C_4 = (\gamma_* - 1)/\pi l$.

Таким образом, вместо решения точной системы гидродинамических уравнений в частных производных для расширяющихся каналов разрядной

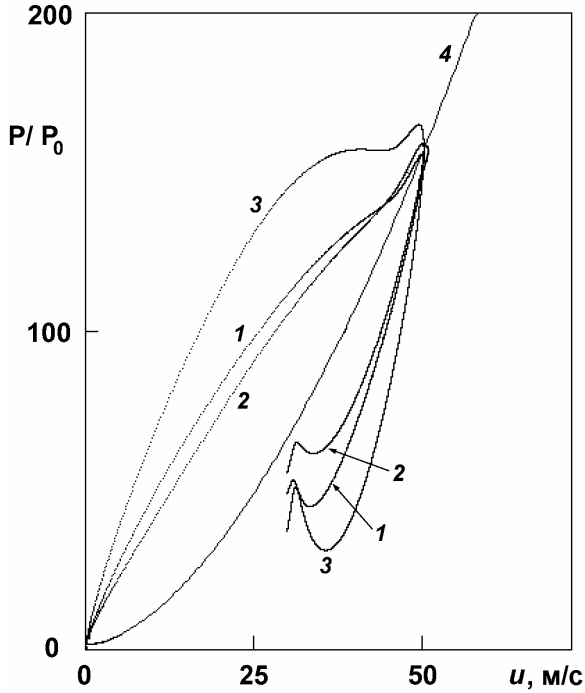


Рис. 4.6. Зависимость $p_k(u_k)$ при $N(t) = N_0 \cdot \sin^2(2\pi t/\tau)$ при $\tau = 0.2$ мкс, $N_0 = 500$ Вт/см. 1 – точное решение, 2 – аппроксимация (4.9) при $\kappa = 1.5$, 3 – акустическое приближение (4.3), 4 – автомодельное решение (4.4).

структуры, что на сегодняшний день не представляется возможным для трехмерного случая, можно приближенно описать расширение каждого отдельного элемента структуры, решая систему (4.10). Этот результат использовался при построении стохастической модели роста разрядных структур в жидких диэлектриках.

При моделировании роста разрядной структуры обыкновенные дифференциальные уравнения (4.10) решались численно для каждого элемента разрядного канала совместно с другими уравнениями модели (уравнения (3.3), (3.5)–(3.7)). Зависимости $N(t) = \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot V$ для каждого элемента на каждом временном шаге получались, используя решение уравнений (3.5) – (3.7). Здесь \vec{j} – плотность тока, \vec{E} – напряженность электрического поля вдоль элемента канала, V – объем элемента. Результаты моделирования роста разрядных структур изложены в следующей главе.

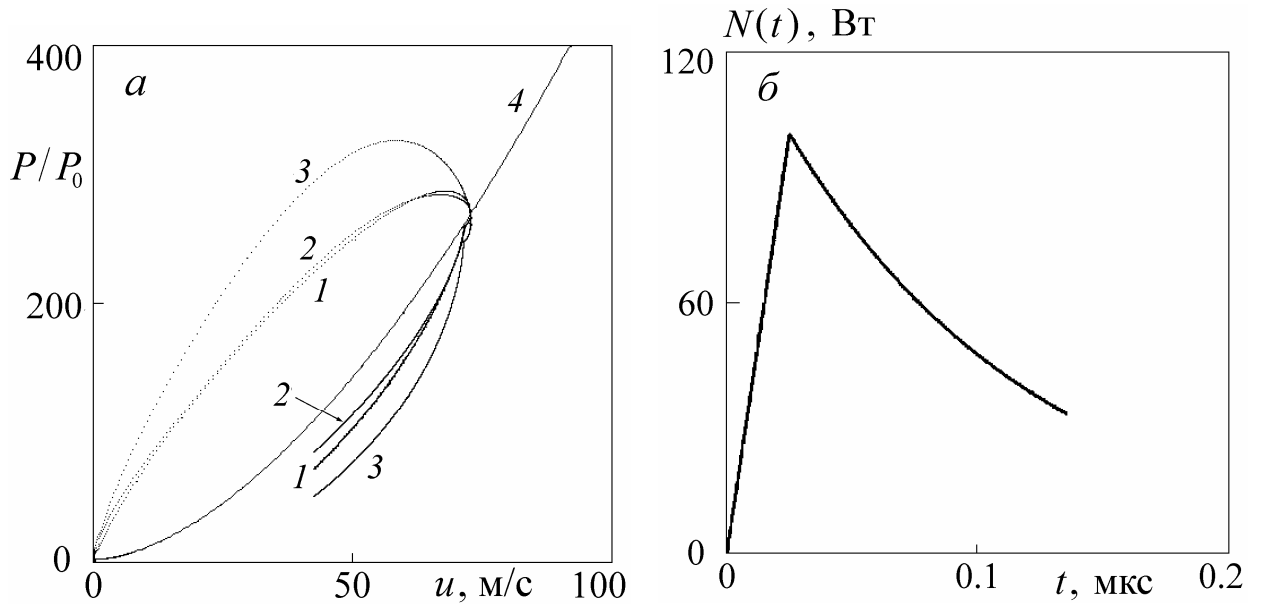


Рис. 4.7. Зависимость давления на стенку цилиндра от скорости его расширения (а) при аппроксимации мощности энерговыделения кривой на рисунке (б). 1 – точное решение, 2 – аппроксимация формулой (4.9) при $\kappa = 1.5$, 3 – решение в акустическом приближении (4.4), 4 – автомодельное решение (4.3).

Выводы. Таким образом, впервые предложена модель, позволяющая приближенно описать расширение каналов разрядной структуры в жидких диэлектриках на стадии продвижения ее к противоположному электроду. Модель позволяет рассчитать изменение радиуса элемента разрядного канала, давления в элементе и скорости его расширения со временем. В результате, открывается возможность ввести в стохастическую модель роста разрядных структур описание проводящих свойств каналов, используя понятие удельной электропроводности.