

## Глава 5. Моделирование развития разрядных структур при импульсном пробое жидких диэлектриков

В основе стохастической модели роста разрядной структуры лежат простой вероятностный критерий и уравнения классической электродинамики. Несмотря на это, анализ получаемых результатов и сравнение их с экспериментов затруднен в силу стохастичности процесса. Для лучшего понимания результатов, полученных при значениях параметров, соответствующих тому или иному реальному эксперименту, оказалось целесообразным провести вспомогательные расчеты в модельных ситуациях. В следующих двух параграфах приводятся результаты моделирования роста структур разряда в центрально-симметричном поле и расчеты роста линейного канала при геометрии электродов «острие–плоскость». В последних параграфах приводятся результаты моделирования разрядных структур в условиях, близких к реальным экспериментам, в геометрии острие–плоскость с учетом расширения разрядных каналов.

### 5.1. Развитие проводящих структур в центрально-симметричном поле. Фрактальные размерности структур

Модель Нимейера–Пьетронеро–Виссманна (глава 1) впервые позволила описать рост ветвящихся нерегулярных структур электрического разряда. Для описания геометрических характеристик, получающихся при моделировании структур, в ряде работ [68, 108, 109 и др.] использовалось понятие фрактальной размерности. Согласно [159], фрактальная размерность  $D_M$  физического объекта, называемая также массовой размерностью, определяется из соотношения

$$N \propto r^{D_M}, \quad (5.1)$$

где  $N$  – число элементов объекта, содержащихся в сфере радиуса  $r$ . При моделировании роста разрядных структур на сетке в качестве элементов часто выбираются проводящие связи между принадлежащими структуре узлами сетки.

Идеально проводящие структуры, получаемые в модели НПВ [68], называются лапласовскими фракталами, поскольку вероятности роста по периметру структур рассчитываются из решения уравнения Лапласа. Рост лапласовских

фракталов происходит в основном в относительно узкой области на периферии структуры, называемой активной зоной [110]. В работе [110] и др. показано, что активная зона обладает свойствами самоподобия, также как структура в целом.

Реальные разрядные структуры имеют конечную удельную электропроводность  $\sigma$ , вследствие чего для релаксации зарядов в разрядных каналах требуется время и, поэтому, наблюдается падение напряжения вдоль каналов разрядной структуры от основания структуры к кончикам ее ветвей. В [113] было показано, что структуру разряда, полученную в рамках модели Висмана–Целлера [112], нельзя считать фрактальной для значений падения напряжения в каналах структуры  $E_k > 0.010$  при средней напряженности поля в промежутке  $\langle E \rangle = 0.010$ . Однако, в таких случаях геометрические характеристики разряда можно описать, используя разные значения фрактальных размерностей для разных участков проводящей структуры. Так, в работах [7, 120] использовалось понятие дифференциальной фрактальной размерности  $D$ . Для определения  $D$  необходимо найти зависимость пространственной плотности элементов структуры (проводящих связей на сетке)  $n(r)$  от расстояния до центрального электрода  $r$ . В тех диапазонах  $r$ , где зависимость  $n(r)$  степенная, дифференциальная фрактальная размерность определяется из соотношения

$$D = d - \frac{d(\ln n(r))}{d(\ln r)}, \quad (5.2)$$

где  $d$  – топологическая размерность пространства. Для лапласовского фрактала  $D$  совпадает с массовой размерностью, определяемой из (5.1).

С помощью компьютерного моделирования развития разрядных структур в диэлектриках проведено сравнение 3 критериев роста: одноэлементного критерия Биллера [114], и многоэлементных флуктуационного и критерия с масштабируемым стохастическим временем [7]. Использовалась трехмерная реализация модели. Геометрические характеристики получаемых проводящих структур было удобно исследовать и сравнивать между собой при моделировании в сферически симметричном поле. Такая конфигурация поля, строго говоря, не может быть реализована в эксперименте, однако возможно реализовать пробой в

геометрии острие – полусфера, в которой рост структур будет подобен росту в центрально-симметричном случае. В таких условиях определить фрактальную размерность проще всего, используя (5.2).

Для этого случая моделирование проводилось в сферической области. Использовалась кубическая сетка размером  $61 \times 61 \times 61$ . Размер сетки определялся вычислительными возможностями компьютера. Решалась система уравнений (3.3), (3.8) – (3.10), используя разработанную неявную по времени консервативную схему (3.12) – (3.13). Расширение элементов каналов структуры не учитывалось (площадь поперечного сечения элемента  $s$  постоянна и одинакова для всех элементов). Также, постоянной считалась удельная электропроводность  $\sigma$  всех элементов структуры. Таким образом, величина  $\lambda = \sigma s$  была постоянной. Результаты моделирования получены для различных значений прикладываемого напряжения  $V = 5, 10, 15$  и  $30$  (условные единицы) и разных значений  $\lambda = 0.1, 1.0, 10.0$ . Внутренний электрод моделировался центральным узлом сетки с постоянным значением электрического потенциала  $V$ . Потенциал внешнего электрода радиуса  $r_{\text{вн}} = 30$  шагов сетки принимался равным  $0$ . Рост проводящих структур рассматривался до момента времени, когда структура перекрывала 85% межэлектродного промежутка, что соответствует расстоянию 4–5 шагов сетки между кончиками структуры и внешним электродом. Для адекватной аппроксимации электрического поля решением сеточного уравнения Лапласа на более близких расстояниях необходимо использовать сетки с меньшим шагом.

На рис. 5.1 показаны типичные структуры разряда, полученные по многоэлементной флуктуационной модели (а–з) и одноэлементной модели Биллера (д–з) при условии, что функция  $r(E)$  в обоих случаях одинаковая. Использовалась функция вида

$$r(E) = -\frac{1}{\tau} \ln \left( 1 - \exp \left( \frac{E - E_*}{g} \right) \right).$$

Формы структур, полученных с помощью различных критериев роста, подобны (с точностью до статистических вариаций локальной структуры) при одинаковых значениях приложенного напряжения  $V$ . По форме они также напоминают структуры, наблюдаемые в экспериментах [53, 55]. При увеличении напряжения  $V$  проводящая

структура становится более плотной, при условии, что электропроводность  $\lambda$  постоянна (рис. 5.1, *а–в*, *д–ж*). Увеличение  $\lambda$  приводит к уменьшению количества ветвей структуры (рис. 5.1, *г* и 5.1, *з*). При высоких напряжениях  $V \geq 10$  и низкой проводимости  $\lambda \sim 1$  около центрального электрода возникает область, плотно заполненная разрядными каналами. Из этой области формируется несколько отдельных сильно ветвящихся каналов. Подобная динамика наблюдалась, например, в экспериментах по исследованию импульсного разряда в жидких углеводородах [49, 63].

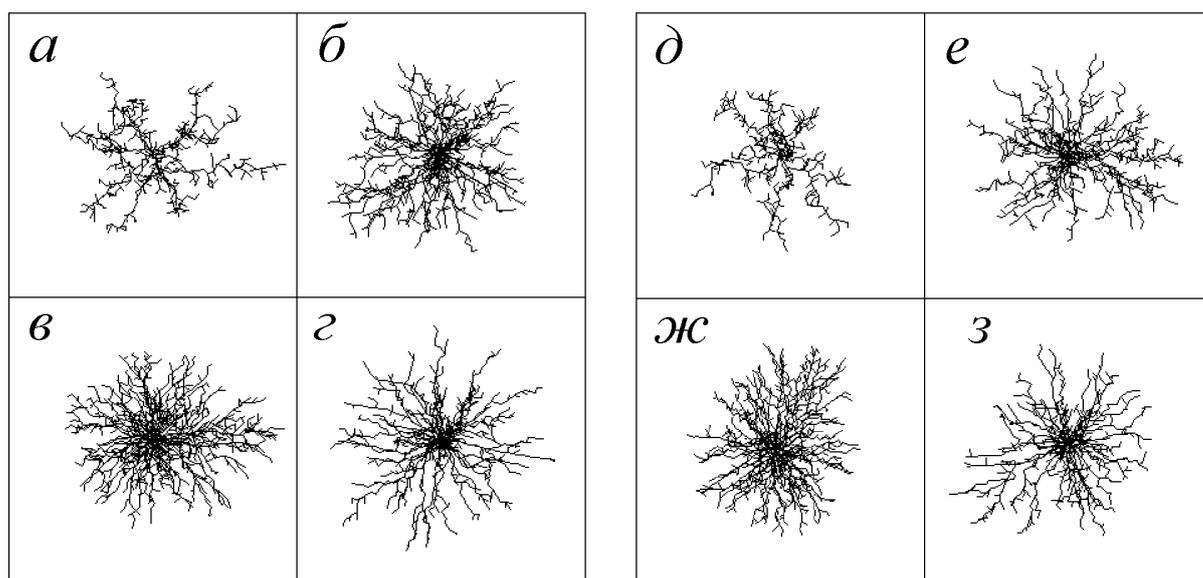


Рис. 5.1. Структуры разряда, полученные с использованием флуктуационного критерия роста (*а–г*) и критерия Биллера (*д–ж*).  $\lambda = 1$ :  $V = 5$  (*а, д*), 10 (*б, е*), и 15 (*в, ж*);  $\lambda = 10$ :  $V = 15$  (*г, з*).

Для всех моделей с «физическим» временем зависимости от времени **средней** скорости роста (рис. 5.2) и **среднего** заряда структур (рис. 5.3) фактически совпадают при одинаковой функции  $r(E)$ . Увеличение значения приложенного напряжения  $V$  влечет за собой увеличение скорости роста разрядной структуры и увеличение количества образующих ее ветвей. Эти результаты качественно согласуются с экспериментальными данными о развитии разряда в минеральном масле [63] (скорости роста структур от 1.7 до 20 км/с).

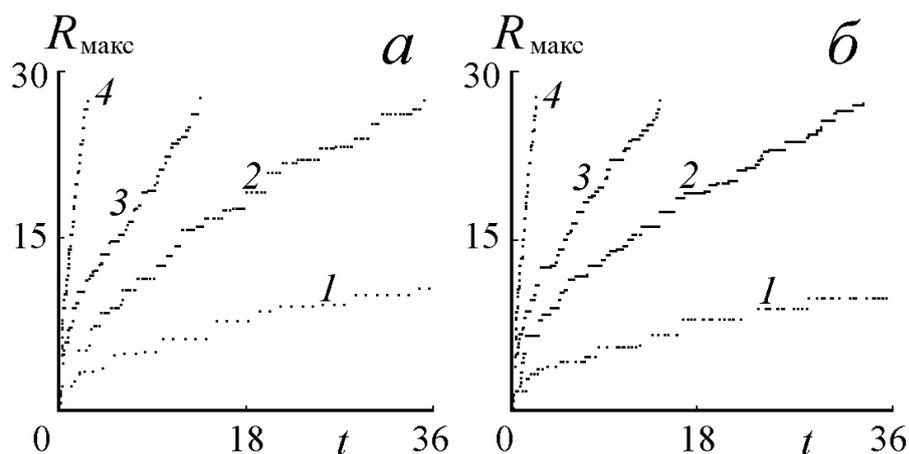


Рис 5.2. Зависимость максимального радиуса проводящей структуры от времени для критериев роста флуктуационного (а) и Биллера (б). Кривые 1, 2, и 3 соответствуют  $V = 5, 10, \text{ и } 15$  ( $\lambda = 1$ ); кривая 4 соответствует  $V = 15$  ( $\lambda = 10$ ).

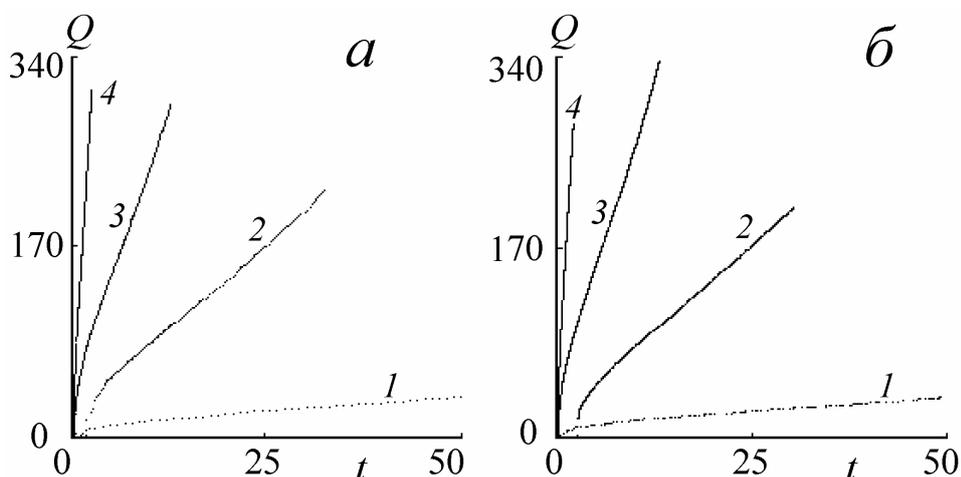


Рис. 5.3. Зависимость полного заряда проводящей структуры от времени в модели с флуктуационным критерием роста (а) и с критерием Биллера (б). Кривые 1, 2, и 3 соответствуют  $V = 5, 10, \text{ и } 15$  ( $\lambda = 1$ ); кривая 4 соответствует  $V = 15$  ( $\lambda = 10$ ).

Интересно проследить влияние проводимости на форму и динамику разрядных структур. Кривая 4 на рис. 5.2 *a, b* указывает на значительное увеличение скорости роста при увеличении  $\lambda$  в 10 раз, что связано с уменьшением времени релаксации заряда в каналах. На рис. 5.3 показаны графики изменения полного заряда разрядных структур со временем. По этим графикам видно, что средний ток проводимости в разрядной структуре сильно увеличивается при увеличении подаваемого напряжения (кривые 1–3) или при увеличении  $\lambda$  (кри-

вые 3,4). Интересно, что при увеличении  $\lambda$  в 10 раз величина полного заряда структуры в момент достижения ею противоположного электрода может быть такой же, как при малых  $\lambda$  (кривые 3,4 на рис. 5.3). Однако, этот заряд распределен по заметно меньшему количеству ветвей структуры (рис. 5.1, в, ж и з, з), с чем, по-видимому, и связано увеличение средней скорости роста примерно в 4.5 раза (рис. 5.2, кривые 3–4).

Результаты, аналогичные показанным на рис. 5.1–5.3, были получены и с использованием критерия роста с масштабируемым стохастическим временем.

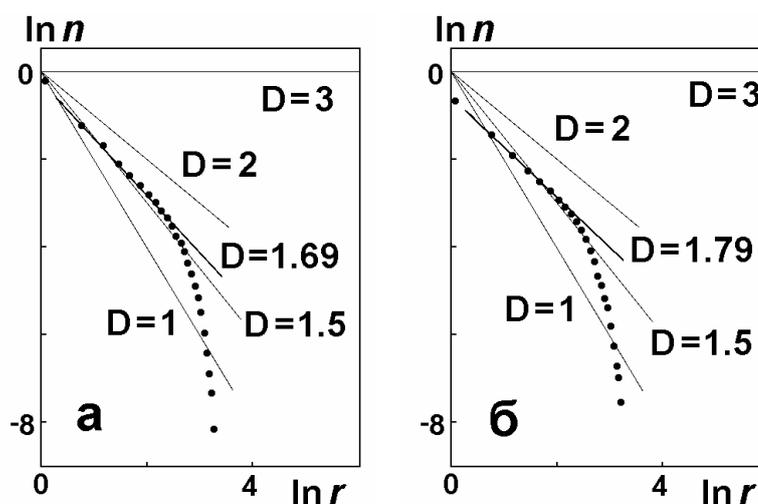


Рис. 5.4. Дифференциальная фрактальная размерность  $D$  разрядных структур, полученных с флуктуационным критерием (а) и с критерием Биллера (б).  $V = 5$ ,  $\lambda = 1$ .  $r$  – расстояние от центрального электрода.

Из-за стохастического характера формирования структур значения фрактальной размерности варьируется в некоторых пределах даже при фиксированных значениях параметров. Поэтому, для каждого набора параметров фрактальная размерность проводящих структур определялась путем усреднения по 15 – 30 реализациям. На рисунках 5.4, 5.5 представлены графики логарифма плотности проводящих элементов от логарифма расстояния  $r$  от центра. С помощью соотношения (5.2) определялась дифференциальная фрактальная размерность  $D$ . При относительно невысоких напряжениях внутренние области проводящих структур можно охарактеризовать единственной размерностью. Для флуктуационного критерия фрактальная размерность  $D = 1.79$  (рис. 5.4, а), для критерия Биллера  $D = 1.69$  (рис. 5.4, б). Отличие между одноэлементными и

многочисленными моделями существует в области с высоким полем около центрального электрода. Здесь многочисленные модели дают более высокую плотность каналов разряда (рис. 5.4). Эти отличия фактически исчезают, когда в многочисленных моделях шаг по времени  $\tau$  мал, и, следовательно, конкуренция соседних элементов становится незначительной. Если исключить из рассмотрения активную зону, то по геометрическим характеристикам к полученным структурам близки структуры разряда в модели Нимейера–Пьетронеро–Виссмана при значениях показателя роста  $\eta \geq 3$ . Действительно, при  $\eta = 3$  плотность структур в модели НПВ убывает с расстоянием с показателем  $D \approx 1.7$  [113].

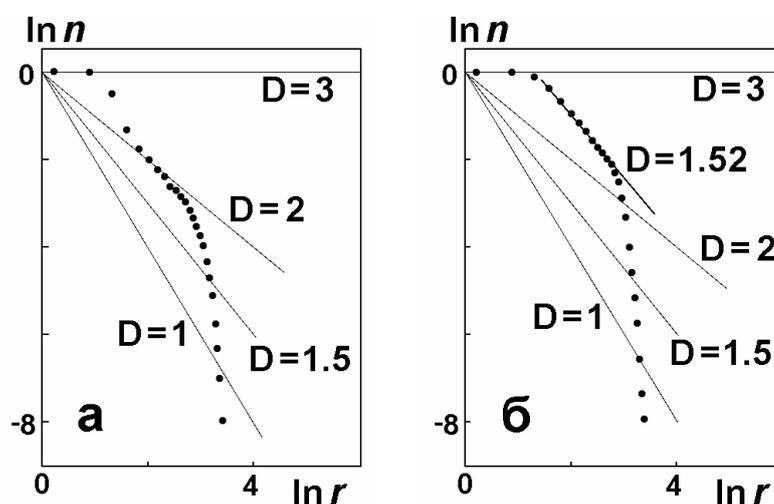


Рис. 5.5. Плотность разрядной структуры при  $V = 10$  (а) и дифференциальная фрактальная размерность структуры при  $V = 30$  (б),  $\lambda = 1$ . Структуры получены с использованием флуктуационного критерия роста.

При увеличении подаваемого напряжения вблизи центрального электрода выделяется область, плотно заполненная ветвями разрядной структуры (рис. 5.5а,б). В этой области  $D$  близка к размерности пространства и уменьшается с увеличением радиуса, особенно в зоне роста. Область с  $D \approx 3$  расширяется при увеличении напряжения. Электрическое поле вблизи центрального электрода достаточно высокое для того, чтобы разрядные каналы могли распространяться даже без релаксации заряда в них. Подобная ситуация наблюдается в экспериментах при резко неоднородных полях: вблизи острых электродов наблюда-

ется формирование плотной структуры, напоминающей куст, с низкой электропроводностью (например, в [54, 63]).

Таким образом, трехмерная стохастическая модель роста качественно верно описывает форму и динамику роста разрядных структур при разряде в жидкостях. Однако, для верификации модели необходимо провести также и количественное сравнение результатов моделирования с характеристиками разрядных структур при конкретных экспериментальных условиях. Кроме этого, необходимо более детальное описание физических процессов в разрядных каналах. В частности, используя результаты главы 4 возможно учесть расширение элементов каналов разряда, а также изменение их удельной электропроводности со временем. Результаты расчетов по одноэлементным и многоэлементным критериям роста с «физическим» временем при одинаковых параметрах отличаются незначительно (рис. 5.1–5.4), что позволяет использовать при моделировании разрядных структур наиболее эффективный с точки зрения вычислений критерий. Далее использовался флуктуационный критерий роста, который наиболее просто реализуется при вычислениях. Кроме того, он позволяет использовать постоянный шаг по времени и масштабировать шаг по времени при необходимости согласно формуле (3.14), что заметно ускоряет вычисления.

## **5.2. Моделирование развития разрядных структур в приближении постоянной удельной электропроводности**

Большое количество экспериментов по пробою жидкостей было выполнено в геометрии «острие–плоскость». В настоящей работе проведено трехмерное компьютерное моделирование роста разрядных структур с острия положительной полярности, на которое подано постоянное напряжение  $V$ , к плоскости, потенциал которой равен 0. Размер области моделирования определялся в основном возможностями имевшейся в распоряжении вычислительной техники. Расчеты выполнялись на кубической сетке размером  $51 \times 51 \times 51$  узлов, для которой получалось разумное время моделирования (1–1.5 часа). Острие моделировалось выступом высотой 10 шагов сетки. Расстояние между электродами было

$d = 4$  мм, таким образом, шаг сетки был равен  $h = 100$  мкм. Выбранные условия примерно соответствуют условиям экспериментов в [44, 46, 49, 50, 53, 55, 58, 67, 84, 160 и др.]. Шаг по времени был  $\tau = 5$  нс. Эти условия и значения параметров были одинаковыми во всех представленных ниже расчетах.

Используя разностную схему (3.12) – (3.13) решалась система уравнений (3.3), (3.8) – (3.10). С помощью аппроксимации (4.10) гидродинамической задачи о расширении непроницаемого поршня в жидкости рассчитывалось расширение каждого элемента канала разрядной структуры. В частности, это позволило, в отличие от других работ [1-4, 9, 54], ввести удельную электропроводность  $\sigma$  для описания электрических свойств вещества в канале.

Другие значения параметров модели были получены из сопоставления результатов моделирования с экспериментами в углеводородах. Локально ростом разрядных каналов управляют, согласно формуле (3.4), два параметра –  $A$  и  $g$ . Развитие структуры также зависит от величины удельной электропроводности каналов. В первом приближении  $\sigma$  элементов каналов разряда считалась постоянной. Такая модель позволяет, варьируя  $\sigma$  независимо от других параметров, анализировать роль электропроводности в формировании разряда. Выбирались такие значения этих параметров, при которых достигается наилучшее согласие формы, средних значений скорости роста, электрического тока и других характеристик моделируемых разрядных структур с аналогичными характеристиками разряда, полученными в экспериментах.

#### *Приближение линейного канала*

Конфигурация ветвей разрядной структуры в каждом эксперименте уникальна. Уникальным является и распределение электрического поля в разрядном промежутке. В результате, трудно проследить, каким образом характеристики каждого отдельного канала структуры (напряженность поля в канале и перед его вершиной, скорость роста, интенсивность энерговыделения в канале, динамика его расширения и т.д.) зависят от условий эксперимента. Поэтому, сначала исследуется модель, в которой рост проводящей структуры начинается

с вершины острия и разрешен только в одном направлении – вдоль оси симметрии разрядного промежутка перпендикулярно плоскому электроду. В результате, вглубь диэлектрика распространяется линейный канал, свойства которого не могут зависеть от влияния других каналов, как в случае ветвистой структуры.

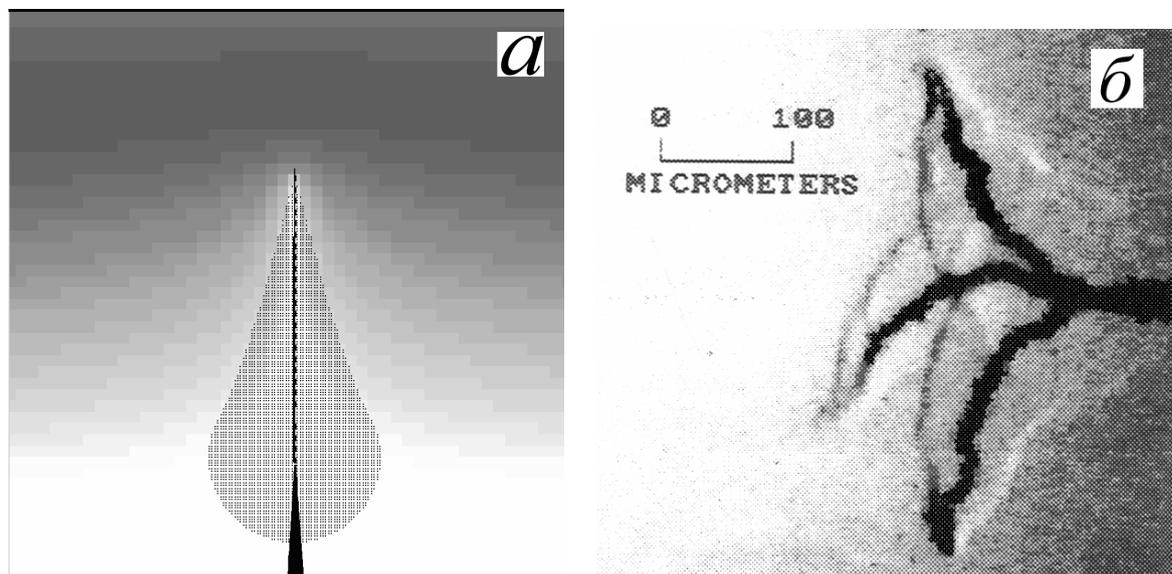


Рис. 5.6. а). Распространение одиночного линейного канала.  $V = 30$  кВ.  $d = 4$  мм.  $A = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\sigma = 0.033$  Ом<sup>-1</sup>см<sup>-1</sup>. Оттенками серого цвета показано распределение потенциала электрического поля в сечении, проходящем через острие. Точками показана область диэлектрика, в которой будет существовать гидродинамическое течение к текущему моменту времени.  $t = 0.505$  мкс. б). Ударные волны от каналов разрядной структуры в пентане по данным работы [57].

Расчеты расширения каналов разрядной структуры выполнялись при значениях начального радиуса новых элементов  $R_k^0 = 1$  мкм и 2.5 мкм. Заметим, что при таком выборе условие  $h \gg R_k$  выполняется. При образовании нового проводящего элемента в нем задавалось начальное давление  $p_H$ . По аналогии с уравнением (4.2), выражающим связь между давлением и удельной плотностью энергии в канале, предполагалось, что  $p_H = \alpha \cdot E^2$ , где  $E$  – проекция напряженности электрического поля вдоль нового проводящего элемента,  $\alpha$  – коэффициент начального давления в новом элементе канала. Значение  $\alpha$  выбиралось из сравнения динамики расширения элементов линейного канала с расчетами

расширения цилиндрического поршня в жидкости (см. ниже). Во всех расчетах далее  $\alpha = 5.53 \cdot 10^{-5}$ .

Типичная картина, соответствующая росту линейного канала при напряжении  $V = 30$  кВ, удельной электропроводности  $\sigma = 0.033 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ , и начальном радиусе элементов  $R_{\text{к}}^0 = 1$  мкм, показана на рис. 5.6,а. Оттенки серого цвета на рисунке соответствуют разным значениям потенциала электрического поля в плоскости сечения разрядного промежутка, проходящей через острие. Средняя скорость распространения линейного канала, показанного на рис. 5.6,а, была 4.95 км/с, что в 3.3 раза больше скорости звука. Скорость распространения слабых ударных волн от каналов разрядной структуры практически не отличается от скорости звука в жидкости. Отсюда, легко определить границу области жидкости, в которой существует гидродинамическое течение в текущий момент времени. На рис. 5.6,а точками показана область течения при  $t = 0.505$  мкс (использовалась скорость звука в воде  $\approx 1.5$  км/с). Средняя скорость роста увеличивалась с напряжением, что хорошо было видно по изменению угла конуса Маха ударной волны, отходящей от разрядного канала. На рис. 5.6,б для сравнения приведена теневая фотография каналов разрядной структуры, от которых отходят ударные волны [57].

На рис. 5.7 показаны характеристики линейного канала в момент времени  $t = 0.505$  мкс, соответствующий картине на рис. 5.6. Давление в канале монотонно увеличивается от основания к вершине, где максимально энерговыделение (рис. 5.7,а). На рис. 5.7,б показано изменение радиуса канала от основания к вершине. Горизонтальная линия указывает начальное значение радиуса вновь возникающего элемента. Напряженность электрического поля вдоль линейного канала  $E$  быстро возрастает от его основания к вершине (рис. 5.7,в). На рис. 5.7,д показано распределение электрических зарядов вдоль линейного одиночного разрядного канала.

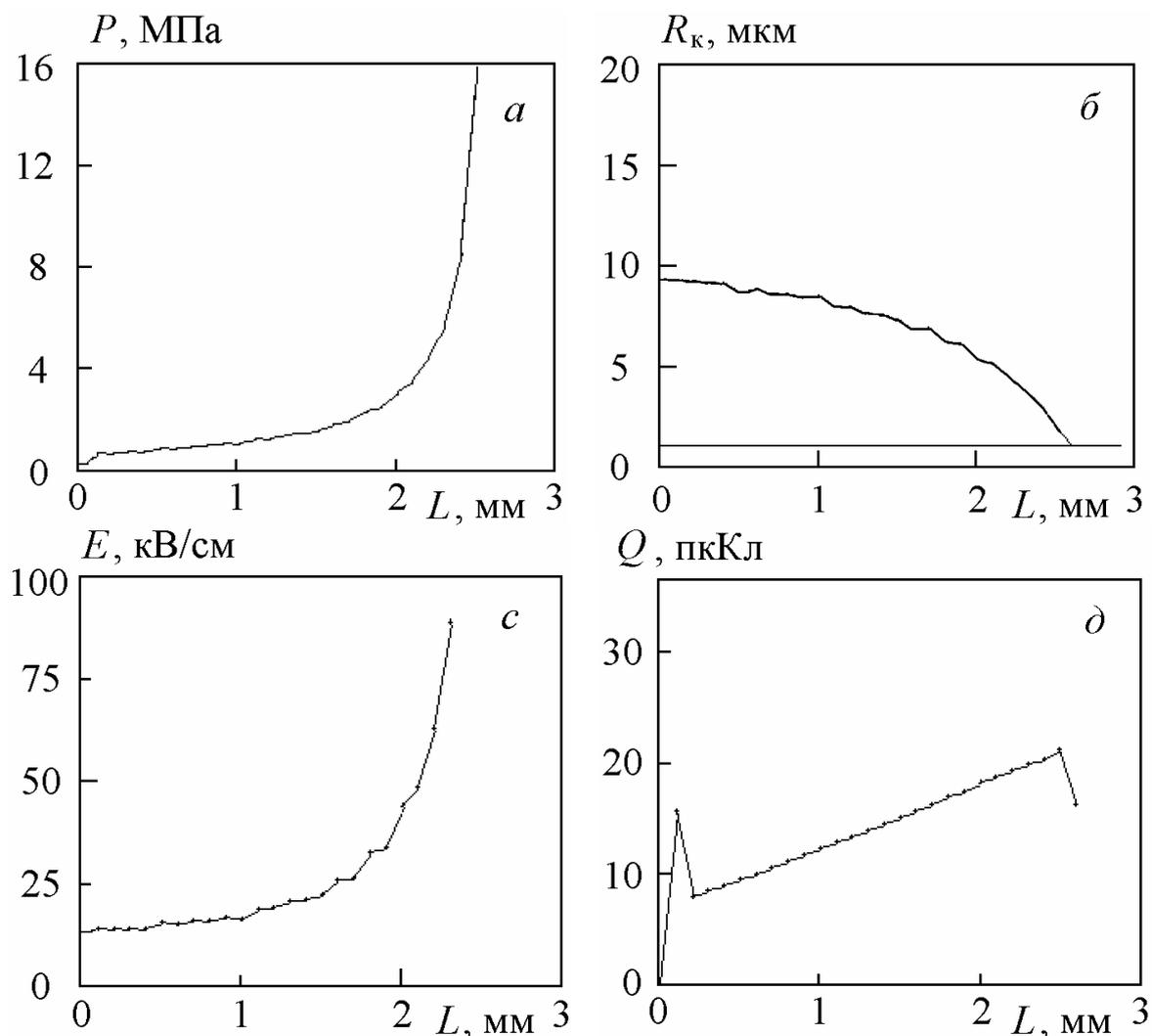


Рис. 5.7. Давление (*a*), радиус канала (*б*), напряженность электрического поля (*с*) и распределение электрического заряда (*д*) вдоль одиночного разрядного канала в зависимости от расстояния от острия в момент времени  $t = 0.505$  мкс.

Для модели линейного канала удобно провести сравнение результатов приближенного решения гидродинамической задачи о расширении канала, полученного в главе 4, с решением точной задачи о расширении бесконечного цилиндрического поршня. На рис. 5.8,*a* показаны диаграммы давление–скорость расширения в различных участках разрядной структуры в форме одиночного линейного канала. Были выбраны два элемента канала на расстоянии 0.3 (кривая 1) и 0.5 мм (кривая 2) от основания канала. На рис. 5.8,*б* приведены графики изменения радиусов этих элементов со временем. Кривые мощности джоулева энерговыделения в этих элементах приведены на рис. 5.8,*д*. Для сравнения приведены результаты расчета расширения бесконечного цилиндрического поршня

в жидкости при зависимости  $N(t)$ , показанной на рис. 5.8,е. На рис. 5.8,б показана диаграмма  $p(u)$ , а на рис. 5.8,з – изменение радиуса бесконечного расширяющегося поршня. Таким образом, система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.10) главы 4 удовлетворительно описывает изменение гидродинамических характеристик канала разрядной структуры (его давления, скорости расширения, радиуса) при его расширении.

Сразу после образования нового сегмента канала напряженность электрического поля  $E$  в нем высокая. В течение 30 – 40 нс в результате перетекания заряда к вершине значение  $E$  падает до 100 кВ/см и, затем, медленно уменьшается до  $E \approx 20$  кВ/см (рис. 5.9,а). Начальная напряженность поля в новом элементе канала равна напряженности поля перед вершиной непосредственно перед образованием элемента. На рис. 5.9,б показана напряженность электрического поля перед вершиной линейного канала  $E_v$ . Сразу после образования нового звена поле перед вершиной низкое. Вследствие релаксации заряда в канале поле перед вершиной увеличивается, что видно на рисунке. Из рис. 5.9,б видно, что со временем средняя напряженность поля, при которой происходит образование нового элемента канала, увеличивается, что приводит к распространению канала с ускорением.

Гидродинамические характеристики линейных каналов при  $R_k^0 = 1$  мкм и 2.5 мкм отличаются мало. При этом, начальный радиус канала существенно влияет на динамику разрядной структуры. При увеличении  $R_k^0$  от 1 до 2.5 мкм скорость роста увеличилась в 2 раза. Этот результат, по-видимому, можно объяснить изменением распределения заряда вдоль канала при увеличении  $R_k^0$ : чем больше начальный радиус, тем больше зарядов успевает перетекать к вершине линейной структуры во время ее роста (полный заряд структуры при этом практически не изменяется). Увеличение заряда на вершине канала приводит к значительному увеличению напряженности поля перед каналом, а, следовательно, и скорости роста.

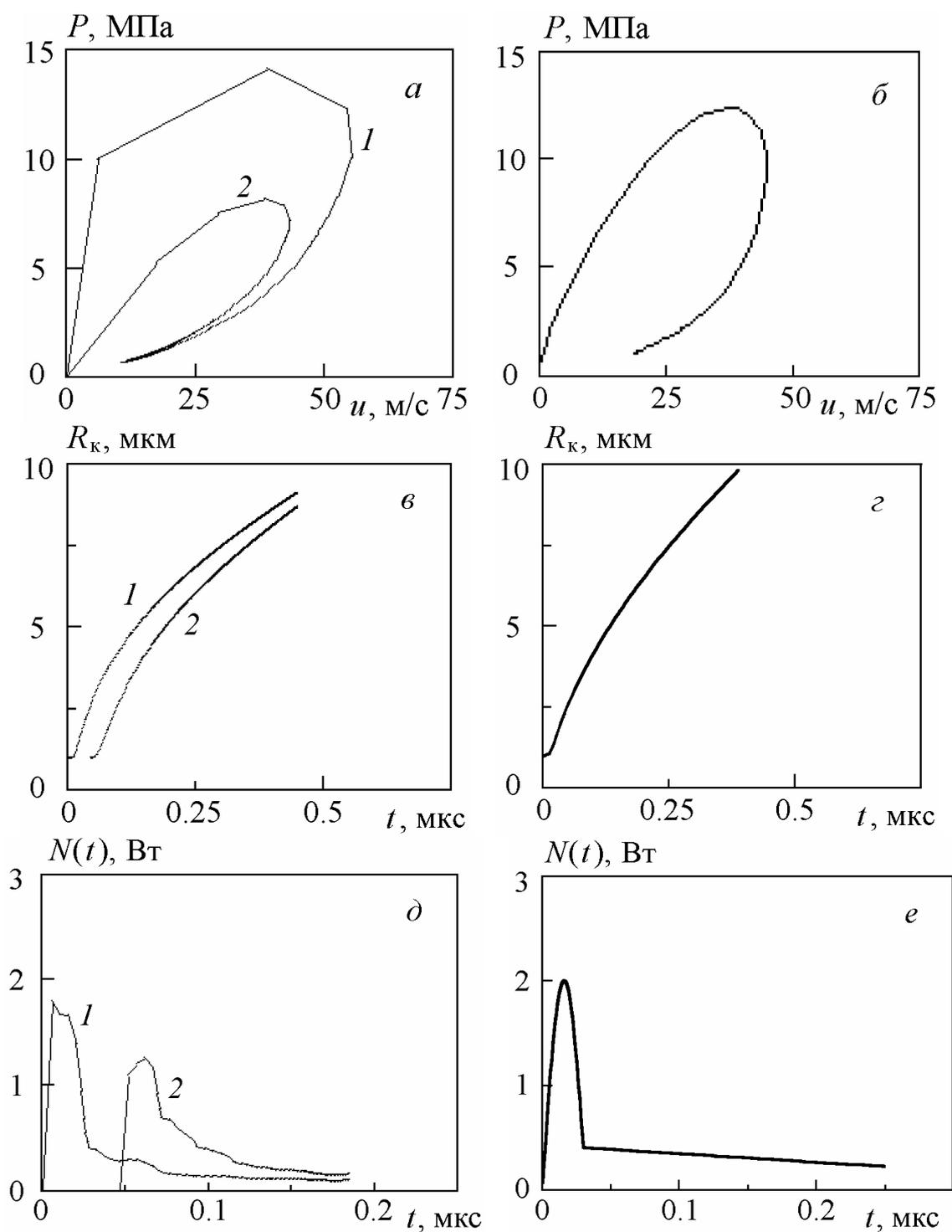


Рис. 5.8. Характеристики двух элементов одиночного разрядного канала, показанного на рис. 5.6, находящихся на расстоянии 0.3 (кривая 1) и 0.5 мм (кривая 2) от его основания. (а) диаграмма давление–скорость расширения, (в) радиус элемента канала, (д) мощность энерговыделения в элементе. Справа (рисунки (б) и (з)) приведены графики  $p(u)$  и  $R_k(t)$ , полученные в результате численного решения полной гидродинамической задачи о расширении бесконечного канала в воде для мощности энерговыделения, показанной на рисунке (е).

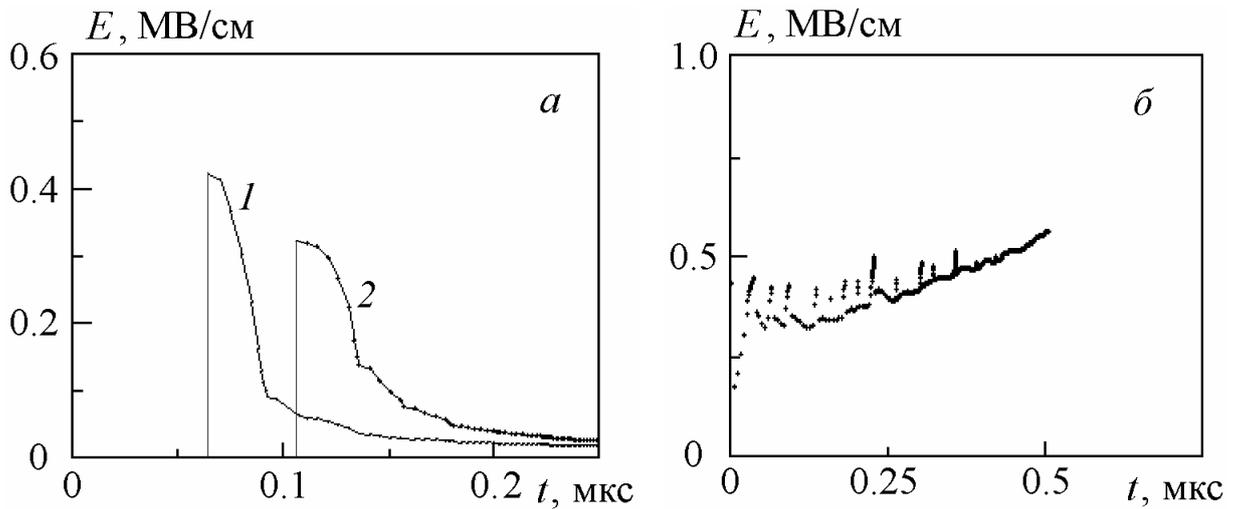


Рис. 5.9. Напряженность электрического поля (а) в двух участках одиночного канала, находящихся на расстояниях 0.3 (кривая 1) и 0.5 мм (кривая 2) от его основания и (б) перед вершиной одиночного канала в зависимости от времени.

*Развитие ветвящихся структур с постоянной удельной электропроводностью разрядных каналов*

При моделировании роста ветвящихся структур с постоянной удельной электропроводностью использовались те же значения параметров, что и в случае распространения одиночного линейного канала.

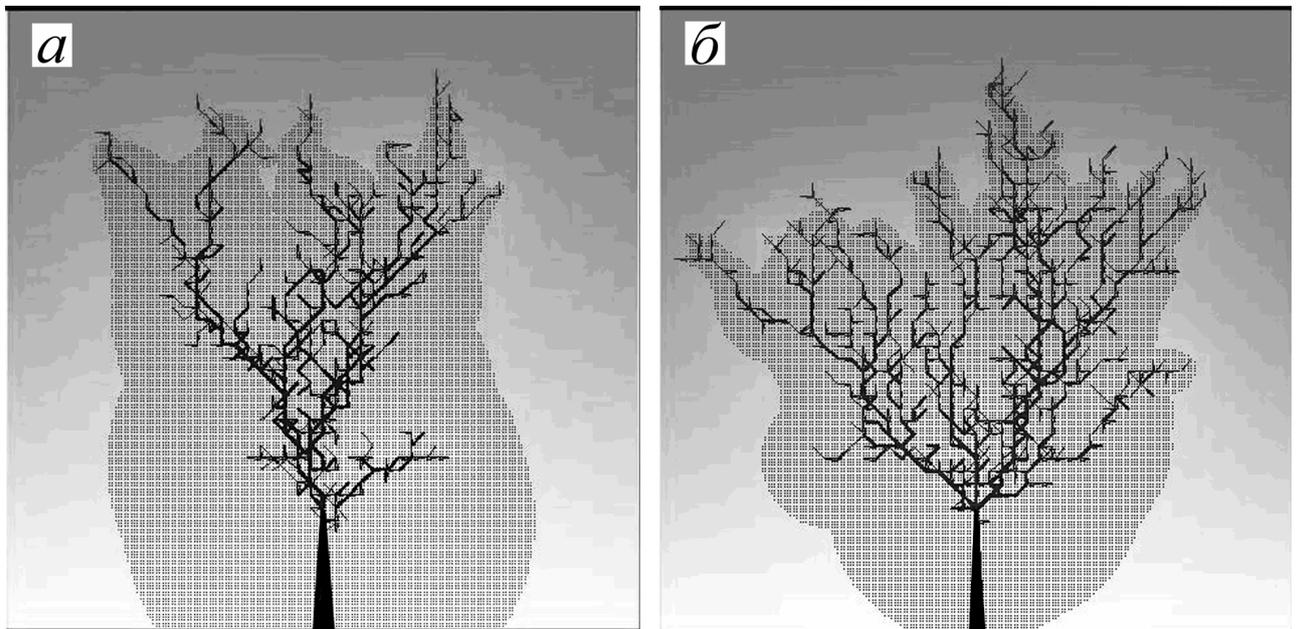


Рис. 5.10. Типичные картины разрядных структур при разных напряжениях. (а)  $V = 24$  кВ,  $t = 1.09$  мкс, (б)  $V = 30$  кВ,  $t = 0.74$  мкс.  $d = 4$  мм.  $A = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\sigma = 0.033$  Ом<sup>-1</sup>см<sup>-1</sup>. Оттенками серого цвета показано распределение потенциала электрического поля в сечении, проходящем через острие.

На рис. 5.10 показаны плоские проекции трехмерных разрядных структур при удельной проводимости  $0.033 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ . Начальный радиус новых элементов каналов был  $2.5 \text{ мкм}$ . При повышении напряжения на разрядном промежутке от  $24 \text{ кВ}$  до  $30 \text{ кВ}$  скорость роста структуры увеличилась с  $3.4 \text{ км/с}$  до  $5 \text{ км/с}$ . При повышении напряжения структура ветвится интенсивнее (рис. 5.10).

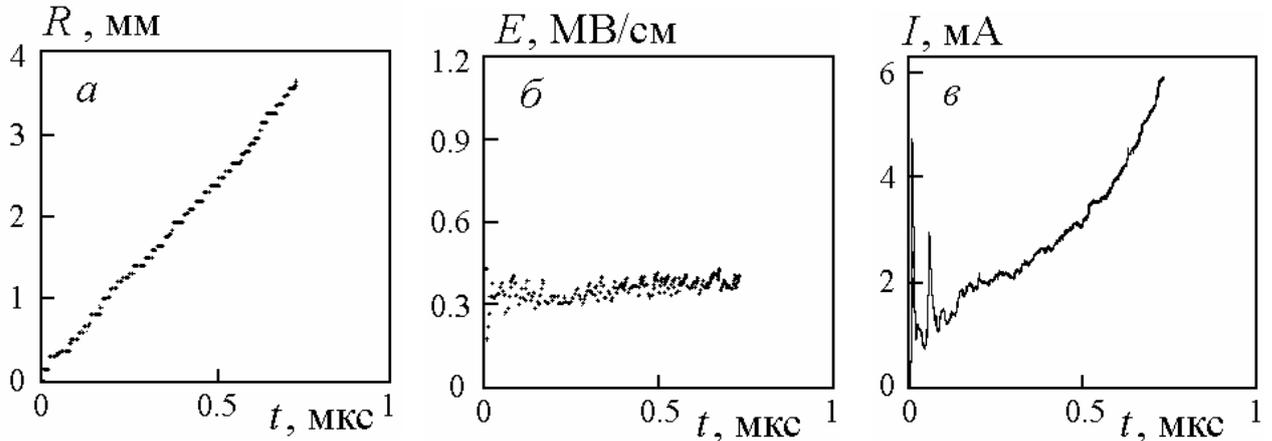


Рис. 5.11. Временные характеристики разрядной структуры при  $V = 30 \text{ кВ}$ .  $\sigma = 0.033 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ . (а) размер разрядной структуры, (б) максимальная напряженность перед кончиками разрядной структуры, (в) ток проводимости разрядной структуры.

На рис. 5.11 представлены характеристики роста разрядной структуры, показанной на рис. 5.10, б – расстояние от вершины острия до максимально удаленного кончика структуры (размер структуры), максимальное электрическое поле  $E$  перед кончиками каналов разряда в зависимости от времени, ток проводимости структуры. Зависимость размера структуры от времени показывает, что в условиях медленной релаксации заряда скорость роста разрядной структуры примерно постоянна (рис. 5.11, а), в отличие от случая линейного канала, когда при тех же самых параметрах задачи структура распространяется с ускорением. Постоянство скорости роста ветвящейся структуры естественно связано с примерно постоянным значением максимальной напряженности электрического поля, при котором происходит рост с вершин разрядных каналов (рис. 5.11, б). Электрическое поле перед вновь образованным кончиком относительно мало. В результате притока электрических зарядов поле перед кончиками раз-

рядных каналов постепенно возрастает. Для линейного канала значение напряженности поля перед его вершиной, при которой происходит образование нового элемента, увеличивается по мере роста. В случае ветвящейся структуры соседние ветви частично экранируют друг друга, вследствие чего напряженность поля на кончиках и в разрядных каналах не достигает таких больших значений, как в случае распространения линейного канала.

Значение напряженности поля  $E$  на рис. 5.11,б на порядок меньше напряженности поля, при которой наблюдается инициирование разряда с острий малого радиуса [50]. Объясняются более низкие значения  $E$  следующим образом. Во-первых,  $E$  представляет собой среднее поле на длине, соответствующей шагу сетки  $h$ . Поскольку  $h/R_k \sim 10$ , поле перед каналом может быть, по меньшей мере, на порядок выше, чем на рис. 5.11,б. Во-вторых, при переходе от закона Гаусса в дифференциальной форме к уравнению в конечных разностях, электрический заряд, так же как и все остальные непрерывные функции, считается однородно распределенным внутри ячеек с размером  $h$ . Таким образом, при

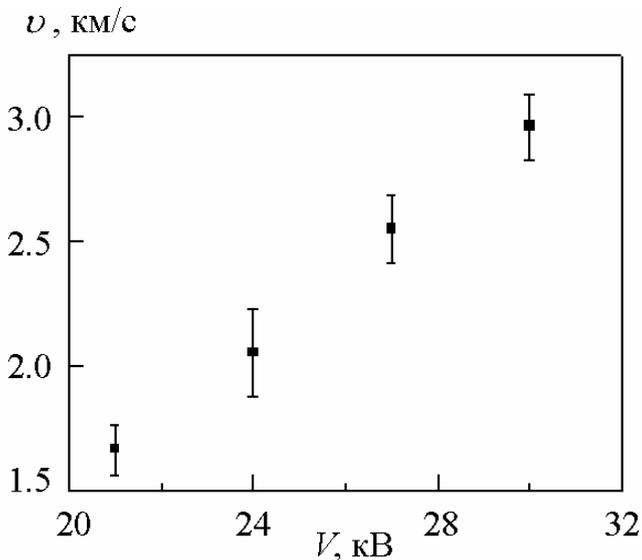


Рис. 5.12. Зависимость средней скорости роста разрядных структур от величины приложенного напряжения.  $\sigma = 0.017 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ .

расчетах электрического поля поперечный размер канала равен  $h$ , что приводит к заниженным значениям напряженности поля на его вершине. Этот недостаток является присущим всем сеточным моделям роста разрядных структур. При переходе к сеткам с шагом  $h$  порядка диаметра канала возможно рассчитать более точно значения напряженности поля на головке канала  $E$ .

Сила тока проводимости в разрядной структуре увеличивается со временем (рис. 5.11,в). Это объясняется увеличением числа веточек структуры.

Изменение удельной электропроводности в несколько раз приводит к изменению скорости роста структуры, при этом характер роста не изменяется. На рис. 5.12 показаны значения средней скорости роста разрядных структур для разных значений напряжения при  $\sigma = 0.017 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$  и начальном радиусе новых элементов 1 мкм. При увеличении напряжения между электродами скорость роста структур увеличивается практически линейно. Каждая точка получена усреднением по 14 численным экспериментам. Показаны также средние квадратичные отклонения для значений скоростей при каждом значении напряжения. Линейная зависимость средней скорости роста от напряжения наблюдалась при развитии разряда с положительного острия при аналогичных условиях в экспериментах в циклогексане и пентане [58], а также при разряде с положительного острия в силиконовом масле и при разряде с отрицательного острия в трансформаторном масле [55, 79]. Отметим, что полученные при расчетах значения  $\sigma$  согласуются с оценками проводимости филаментарных разрядных структур, в частности, в трансформаторном масле, определяемыми по плотности тока и продольным градиентам потенциала,  $\sigma \sim 0.01 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$  [79].

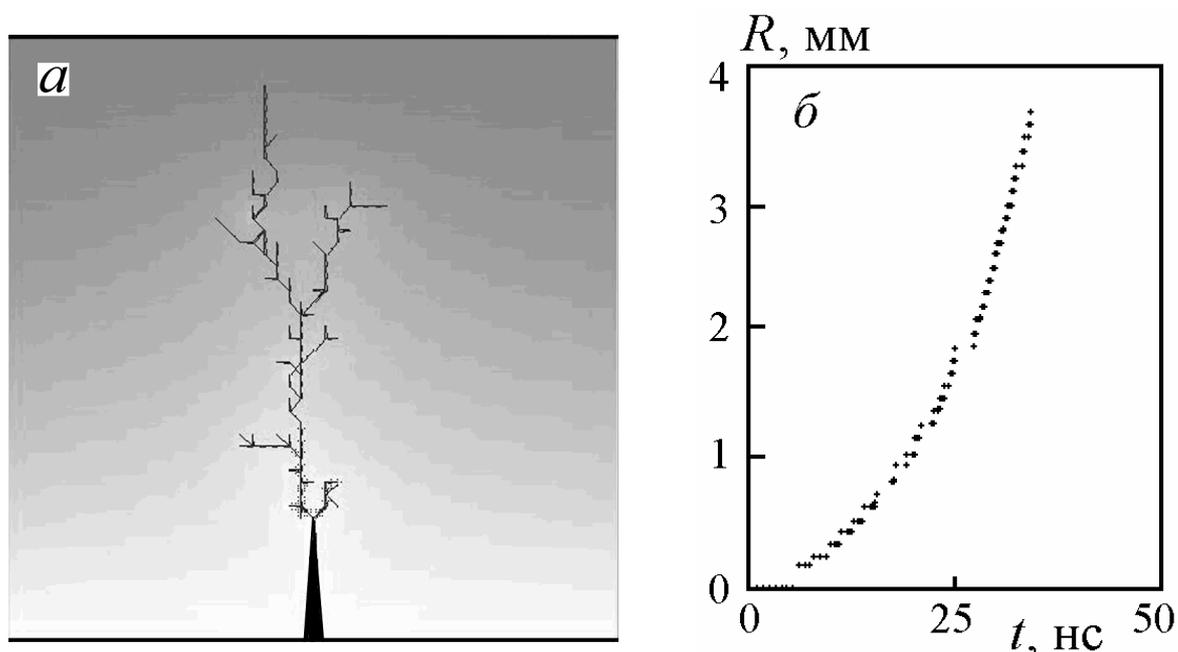


Рис. 5.13. Развитие разряда при высокой удельной электропроводности каналов  $\sigma = 5.5 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ .  $A = 1.3 \cdot 10^2 \text{ см/с}$ ,  $g = 45 \text{ кВ/см}$ . (а) разрядная структура, (б) зависимость размера структуры от времени роста.

Как указывалось в первой главе, при некотором напряжении вместо относительно медленных разрядных структур, развивающихся со скоростями несколько километров в секунду, возможно развитие быстрых разрядов со скоростями в десятки и даже более сотни километров в секунду. Расчеты параграфа 5.1. показали, что резкое увеличение скорости роста при практически неизменном значении приложенного напряжения может быть связано с увеличением электропроводности разрядных каналов. На рис. 5.13,*а* показана структура, полученная при напряжении 30 кВ и значении удельной электропроводности  $5.5 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ . Средняя скорость распространения этой структуры 109 км/с. Однако, в отличие от предыдущего случая структура распространяется с ускорением (рис. 5.13,*б*).

### **5.3. Моделирование роста разрядных структур в случае изменяющейся во времени удельной электропроводности каналов**

Использование постоянной удельной электропроводности каналов разрядных структур является достаточно грубым приближением, позволяющим, однако, независимо от других параметров модели исследовать роль электропроводности каналов в развитии разряда. В разрядных каналах электропроводность не постоянна, поэтому представляет также интерес построение модели с изменяющейся со временем электропроводностью. В работах [1, 2] В. В. Лопатин и М. Д. Носков впервые для стохастической модели роста разрядных структур применили уравнение для описания изменения со временем электропроводности элементов разрядных каналов. Авторы этих работ, проводя аналогию с начальной стадией развития искрового разряда в газах, использовали хорошо известную и часто применяемую формулу Ромпе–Вайцеля [121] для зависимости сопротивления канала от времени. Расширением каналов пренебрегалось. Для описания проводящих свойств элемента канала использовалась величина  $\lambda = \sigma \cdot s$ , где  $\sigma$  – удельная электропроводность,  $s$  – площадь сечения канала. Считалось, что изменение  $\lambda$  каждого элемента пропорционально джоулеву энерговыделению в нем. В этом приближении:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \chi' \cdot \lambda \cdot E^2, \quad (5.3)$$

где  $E$  – падение напряжения на единице длины в канале,  $\chi'$  – коэффициент, характеризующий плазму в канале. Сразу после образования нового элемента его электропроводность была равна начальному значению  $\lambda_0$ . Далее, электропроводность этого элемента канала увеличивалась согласно формуле (5.3).

Рассмотрим проблему описания изменения проводимости каналов со временем с учетом их расширения. В пренебрежении излучением вещества канала разрядной структуры и теплообменом между каналом и окружающей жидкостью закон сохранения энергии в элементе канала можно записать в виде:

$$d(wV) + p dV = \sigma E^2 V dt, \quad (5.4)$$

где  $w$  и  $p$  – внутренняя энергия единицы объема плазмы и давление в канале, соответственно,  $V$  – объем элемента канала,  $dV$  – приращение объема элемента канала за время  $dt$ . При выводе формулы Ромпе–Вайцеля предполагается, что удельная электропроводность плазмы канала пропорциональна внутренней энергии единицы ее объема  $w$  [161-163]:

$$\sigma = \chi \cdot w, \quad (5.5)$$

где  $\chi$  – коэффициент, характеризующий плазму канала. Аналогичное (5.5) соотношение часто используется при описании плазмы в канале искрового разряда [161]. Подставим (5.5) в (5.4) и выразим производную удельной электропроводности по времени через мощность энерговыделения и гидродинамические характеристики цилиндрического канала. Получим уравнение:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \chi \cdot \sigma \cdot E^2 - 2(\sigma + \chi \cdot p) \frac{u_k}{R_k}, \quad (5.6)$$

где  $u_k$  и  $R_k$  – текущие скорость расширения и радиус элемента канала. Формула (5.6) позволила моделировать изменение удельной электропроводности канала разрядной структуры во времени при подводе электрической энергии с учетом гидродинамического расширения канала. Следует отметить, что при расчете по формуле (5.3) электропроводность может только увеличиваться, в то время как формула (5.6) допускает и уменьшение  $\sigma$  со временем вследствие расширения

канала.

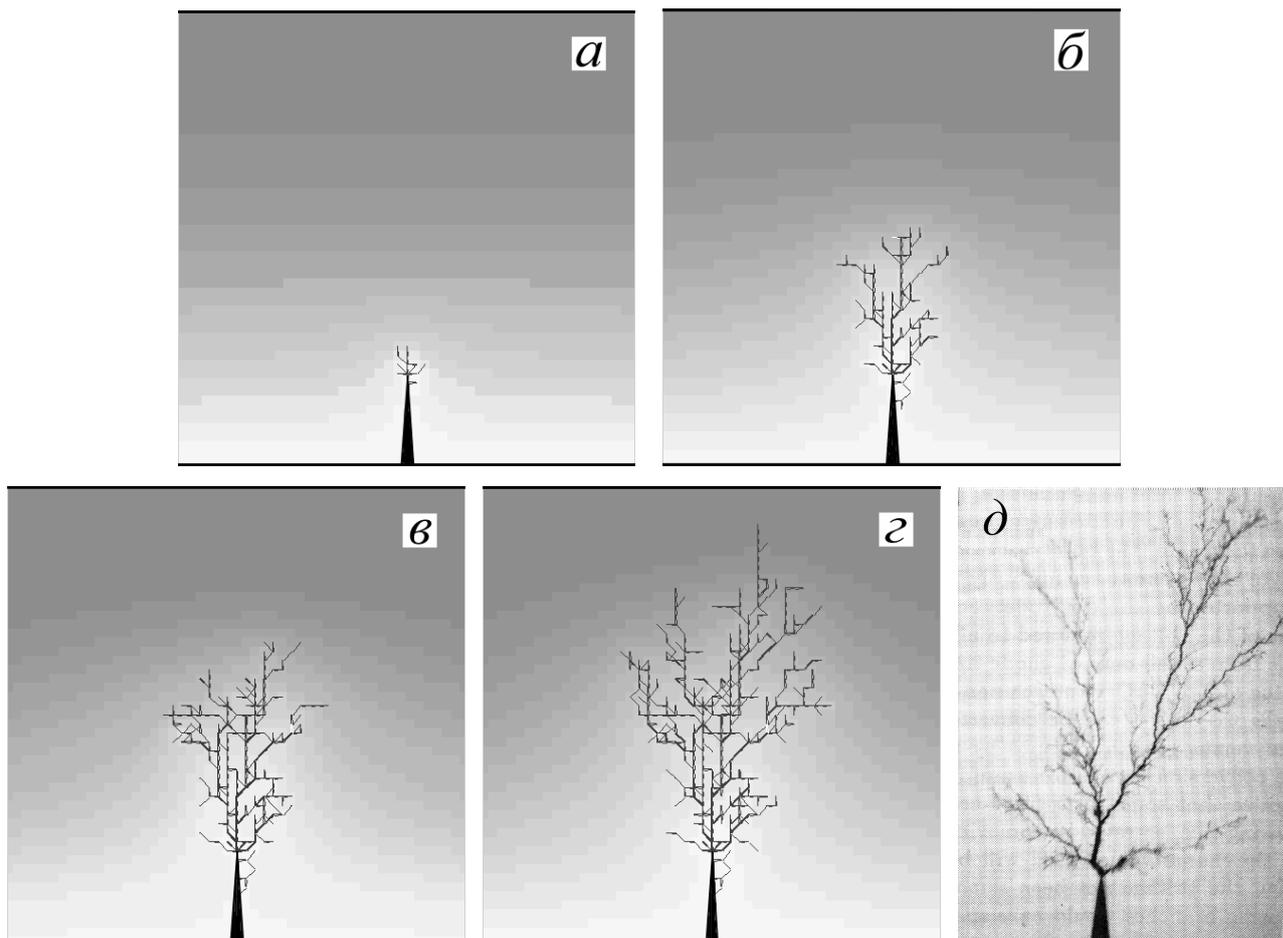


Рис. 5.14. Развитие разрядной структуры при постоянном напряжении 30 кВ.  $t = 0.024$  (а), 0.24 (б), 0.36 (в) и 0.49 мкс (з).  $A = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>. Оттенками серого цвета показано распределение потенциала электрического поля в центральном сечении разрядного промежутка. Разрядная структура в кремнийорганическом масле при  $V = 22.75$  кВ,  $d = 3$  мм [84].

В частном случае, когда давление в канале пропорционально  $w$ , используя формулы (4.2) и (5.5) можно записать

$$\sigma = \chi p / (\gamma_* - 1). \quad (5.7)$$

Это соотношение применялось при решении системы (3.3), (3.8) – (3.10), (4.10) для расчета  $\sigma$  по текущему давлению в элементах каналов. Заметим, что использование (5.7) эквивалентно решению уравнения (5.6).

Моделирование роста разрядных структур с изменяющейся проводимостью проводилось при таких же начальных и граничных условиях, что и в пара-

графе 5.2. Начальный радиус элемента канала был  $R_k^0 = 1$  мкм.

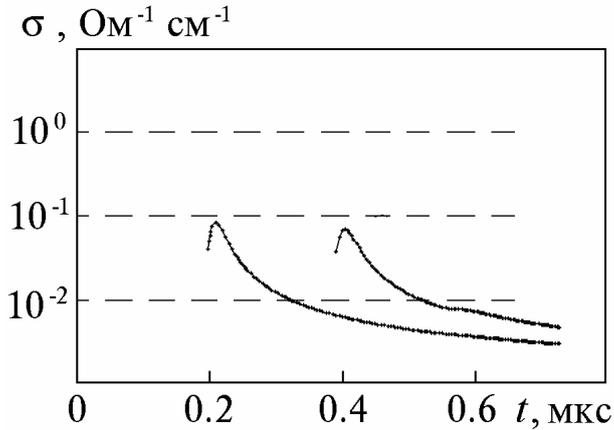


Рис. 5.15. Зависимость удельной электропроводности от времени в двух произвольно взятых элементах разрядной структуры.  $V = 27$  кВ,  $A = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>.

ность за время 20–30 нс достигает максимального значения (рис. 5.15). В дальнейшем  $\sigma$  монотонно уменьшается, изменяясь в пределах  $3 \cdot 10^{-3} - 9 \cdot 10^{-2}$  Ом<sup>-1</sup> см<sup>-1</sup>. Эти данные согласуются с оценками  $\sigma \sim 0.03 - 0.3$  Ом<sup>-1</sup> см<sup>-1</sup>, полученными на основании анализа экспериментальных данных по разряду в воде [52], и  $\sigma \sim 0.01$  Ом<sup>-1</sup> см<sup>-1</sup> при разряде в трансформаторном масле [61, 79].

На рис. 5.16 показаны структуры разряда при напряжениях 24 и 36 кВ. Скорости роста этих структур 3.3 и 17.6 км/с, соответственно. Повышение напряжения в рассматриваемом случае не приводит к столь заметному увеличению ветвлений структуры как в модели с постоянной  $\sigma$ , что объясняется увеличением средней удельной электропроводности структуры вследствие более интенсивного энерговыделения в каналах при более высоком напряжении.

На рис. 5.14 показано развитие разрядной структуры в разные моменты времени при постоянном напряжении 30 кВ. Оттенками серого цвета показано также изменение распределения потенциала электрического поля в разрядном промежутке, связанное с развитием разрядных каналов.

После образования нового элемента разрядной структуры его удельная электропровод-

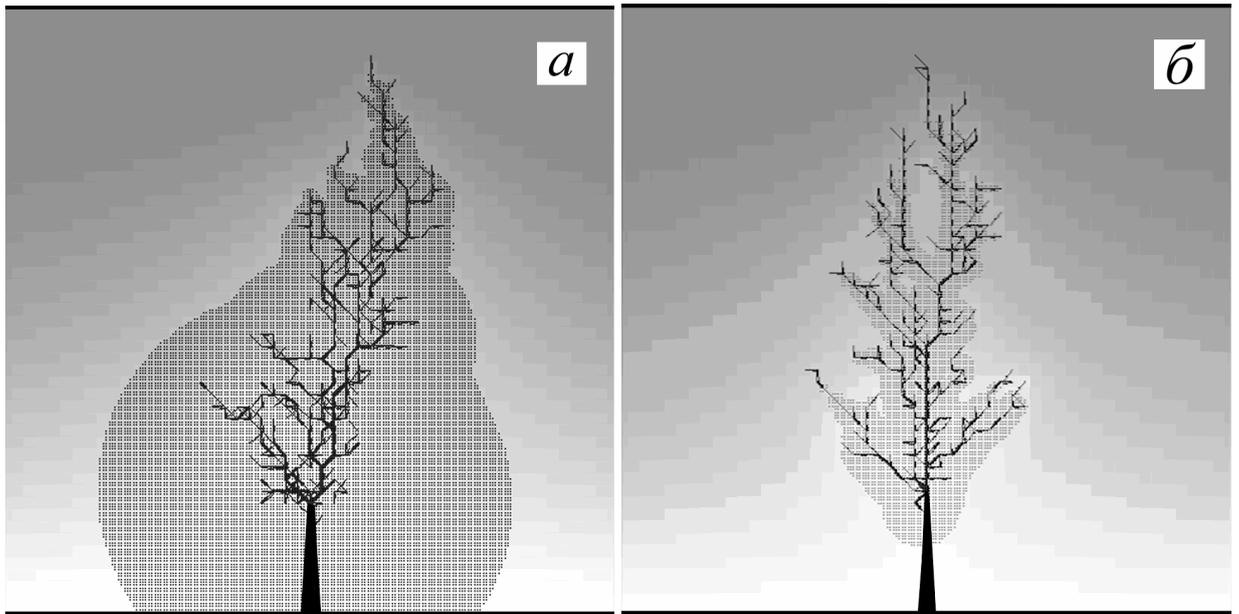


Рис. 5.16. Типичные разрядные структуры для случая, когда удельная электропроводность пропорциональна внутренней энергии плазмы в разрядном канале. (а)  $V = 24$  кВ,  $t = 1.13$  мкс, (б)  $V = 36$  кВ,  $t = 0.21$  мкс.  $A = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>.

На рис. 5.17 показаны зависимости размера разрядных структур от времени

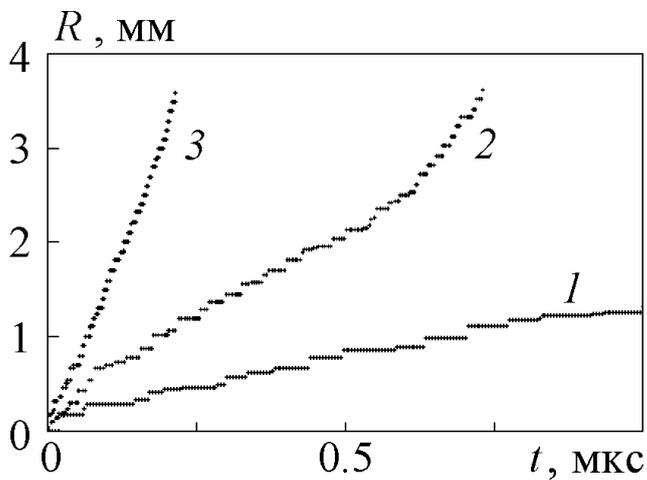


Рис. 5.17. Характерные зависимости размера разрядной структуры от времени роста при разных значениях приложенного напряжения. 1 –  $V = 21$  кВ, 2 –  $V = 27$  кВ, 3 –  $V = 36$  кВ.  $A = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>.

ни при разных напряжениях на промежутке. При относительно низком напряжении (кривые 1, 2) скорость роста уменьшается в средней части промежутка по сравнению со скоростью роста вблизи электродов. Этот эффект был зарегистрирован в экспериментальных работах [55, 84, 160]. Авторы работ [160, 164], аппроксимируя разрядную структуру идеально проводящей сферой, объясняют этот эффект уменьшением напряженности электрического поля перед вершинами каналов разрядной структуры.

В настоящей работе показано, что для ветвящихся структур с

конечной электропроводностью ветвей существуют такие режимы роста, при которых средняя напряженность поля на кончиках каналов действительно меньше в средней части разрядного промежутка, чем вблизи электродов, в результате чего скорость роста разрядной структуры также меньше. При более высоких напряжениях скорость распространения мало изменяется по мере роста структур (кривая 3).

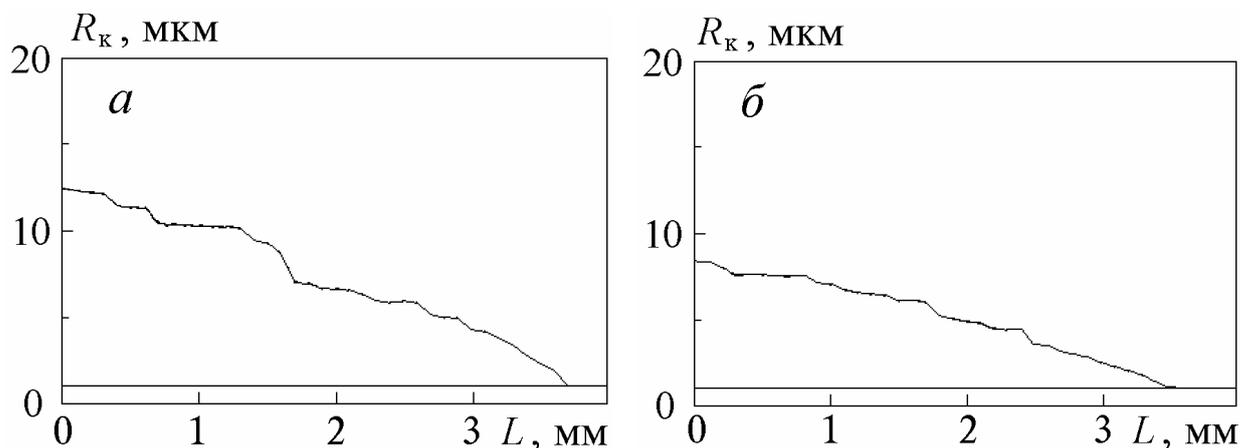


Рис. 5.18. Радиус разрядного канала вдоль наиболее длинной ветви разрядной структуры.  $V = 24$  (а) и  $36$  кВ (б).  $\chi = 6 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2 \text{ В}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Горизонтальной прямой показано значение начального радиуса новых элементов канала  $R_k^0 = 1$  мкм.

Для физики электрического разряда важной является информация о падении напряжения вдоль развивающегося разрядного канала, об удельной электропроводности, мощности энерговыделения, давлении, и других величинах в каналах в процессе развития разрядной структуры. Следует отметить, что надежные измерения этих величин в эксперименте на сегодняшний день невозможны. Моделирование разрядных структур позволяет исследовать свойства отдельных каналов и участков разрядных каналов в процессе их развития. На рис. 5.18 показано изменение радиуса наиболее длинных каналов разрядной структуры вдоль каналов от их оснований к вершинам при разных значениях подаваемого напряжения. Расширение канала при более высоком напряжении происходит значительно быстрее, что связано с более интенсивным энерговыделением при больших напряжениях. Однако, время развития структуры при низких напряжениях существенно больше, чем при высоких  $V$ . В результате, при меньших напряжениях средний радиус канала оказывается заметно больше.

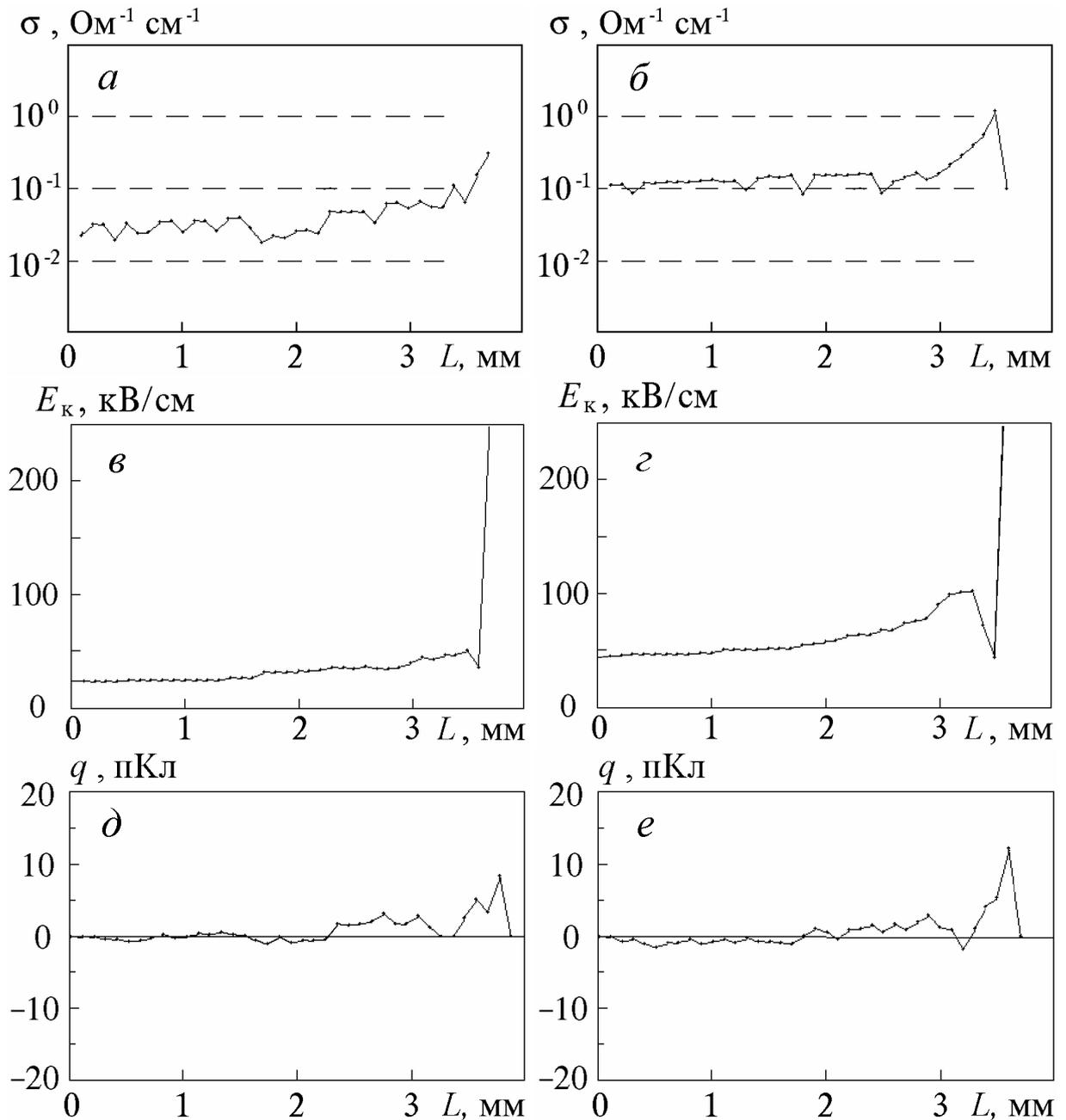


Рис. 5.19. Характерные распределения удельной электропроводности (*а, б*), напряженности электрического поля (*в, г*), заряда (*д, е*) вдоль наиболее длинного канала разрядной структуры при напряжениях 24 (слева) и 36 кВ (справа).  $A = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>.

На рис. 5.19, *а* и *б* представлены графики изменения удельной электропроводности  $\sigma$  вдоль разрядного канала. От основания к вершине канала  $\sigma$  увеличивается в несколько раз. При увеличении подаваемого напряжения с 24 до 36 кВ значения электропроводности в каналах также увеличиваются в несколько раз. Напряженность электрического поля вдоль разрядного канала примерно

постоянна (рис. 5.19, *в* и *г*). Исключением является элемент на вершине канала, в котором сразу после его образования напряженность поля высокая и равна проекции напряженности поля в области диэлектрика до возникновения в ней элемента. Видно также, что средняя напряженность поля в канале увеличивается с напряжением. В длинных промежутках (2.5–30 см) среднее падение напряжения в канале разрядной структуры в минеральном масле уменьшается при увеличении расстояния между электродами и увеличении приложенного напряжения [78]. В предлагаемой модели последний результат объясняется увеличением средней удельной электропроводности канала при повышении напряжения (рис. 5.19). Результаты моделирования (рис. 5.19, *в* и *г*) согласуются также с оценками падения напряжения в канале 5–35 кВ/см, полученными, например, в работах [28, 59, 78]. На участках вблизи вершин каналов структуры

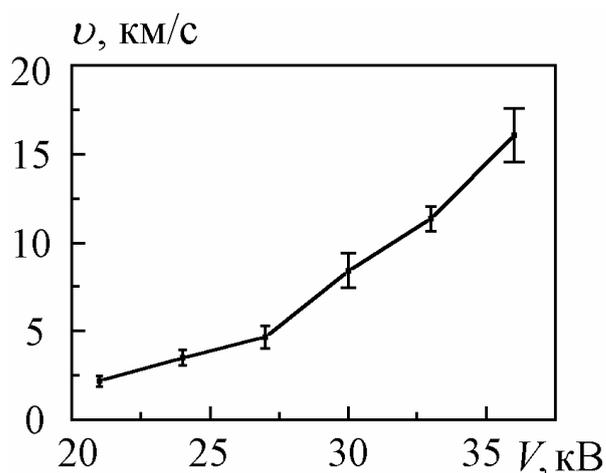


Рис. 5.20. Зависимость скорости роста разрядной структуры от напряжения для модели с изменяющейся удельной электропроводностью.  $A = 1.3 \cdot 10^2$  см/с,  $g = 45$  кВ/см,  $\chi = 6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>.

сосредоточен значительный положительный заряд (рис. 5.19, *д* и *е*). В остальной части канала заряды элементов заметно меньше и могут быть как положительными, так и отрицательными.

В отличие от модели с постоянной удельной электропроводностью, в модели с изменяющейся  $\sigma$  скорость роста разрядной структуры  $v$  зависит от поданного напряжения  $V$  нелинейно (рис. 5.20). Это связано с постепенным увеличением средней проводимости каналов  $\sigma$  при повышении  $V$ . Достаточно резкое увеличение скорости роста разрядных структур от значений несколько выше скорости звука до десятков километров в секунду при повышении напряжения наблюдалось во многих экспериментальных работах, в том числе, например, в [36]. При этом, увеличивалась интенсив-

ность свечения каналов и величина токов, что, по-видимому, свидетельствует о более высокой электропроводности каналов.

Модель роста разрядных структур позволяет описать разрядные структуры различных типов. На рис. 5.14 был приведен пример моделирования филаментарной структуры в форме дерева. При уменьшении параметра  $g$  (в настоящей модели это означает выбор другого диэлектрика) наблюдалось формирование слабо разветвленных филаментарных структур, образованных несколькими каналами (рис. 5.21).

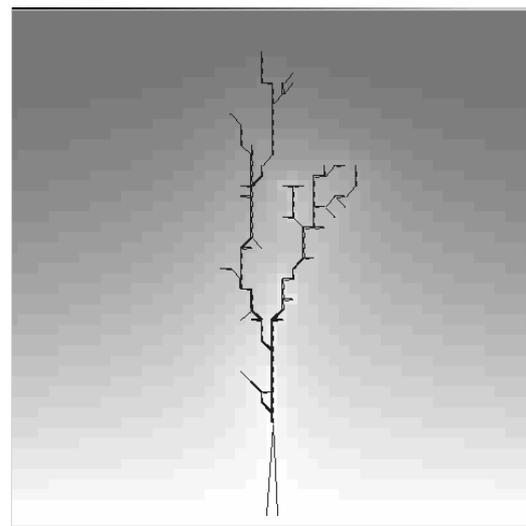


Рис. 5.21.  $V = 24$  кВ,  $A = 1$  см/с,  $g = 30$  кВ/см,  $\chi = 6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>.

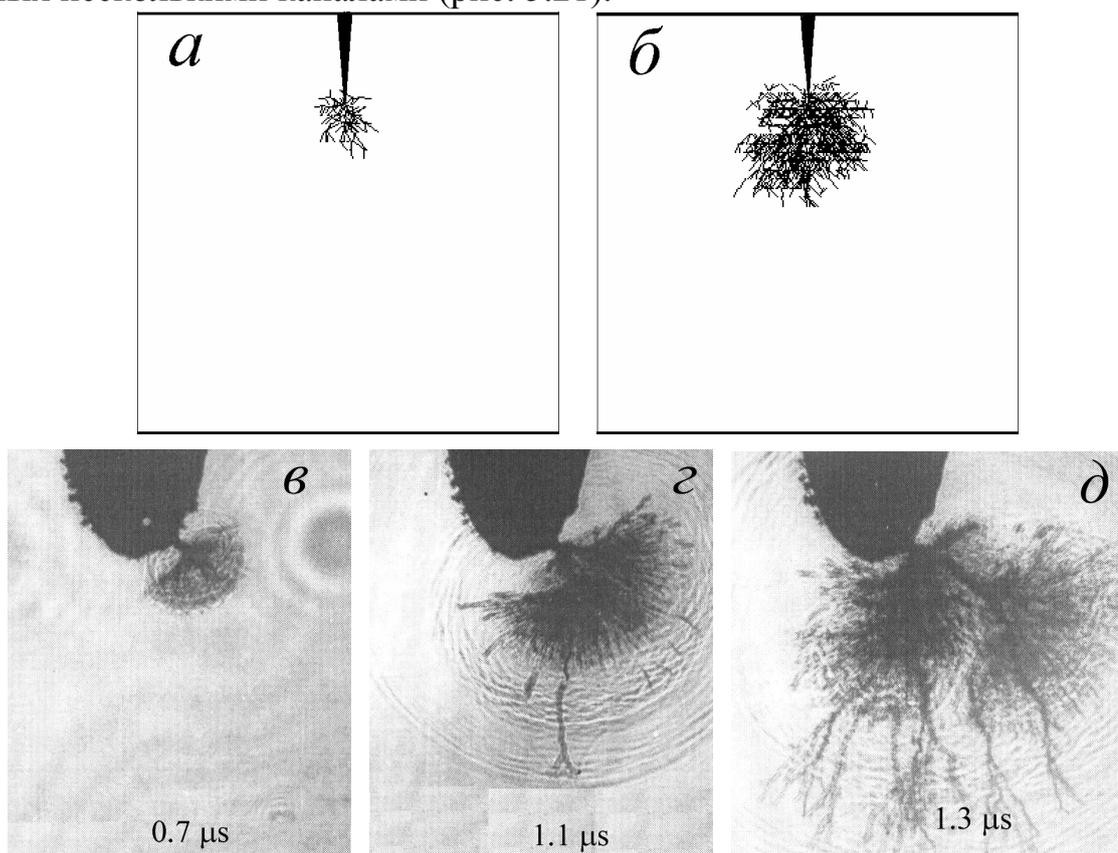


Рис. 5.22. Развитие медленных кустообразных разрядных структур. Моделирование при  $V = 24$  кВ,  $t = 0.17$  (а) и  $0.27$  мкс (б).  $A = 3.4 \cdot 10^3$  см/с,  $g = 60$  кВ/см,  $\chi = 2.2 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>. Развитие разряда в воде при  $V = 30$  кВ, радиус острия 230 мкм [165].

В сильно неоднородном поле в экспериментах наблюдалось развитие кустообразной структуры, состоящей из множества слабо проводящих каналов. На рис. 5.22, *а, б* показаны картины кустообразных разрядных структур (скорость роста  $\sim 1$  км/с) в разные моменты времени, полученные компьютерным моделированием. Удельная электропроводность структур низкая  $\sigma \sim 5-8 \cdot 10^{-3} \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ . Для сравнения показана последовательность развития разрядной структуры в воде с аналогичными характеристиками разрядных каналов [165].

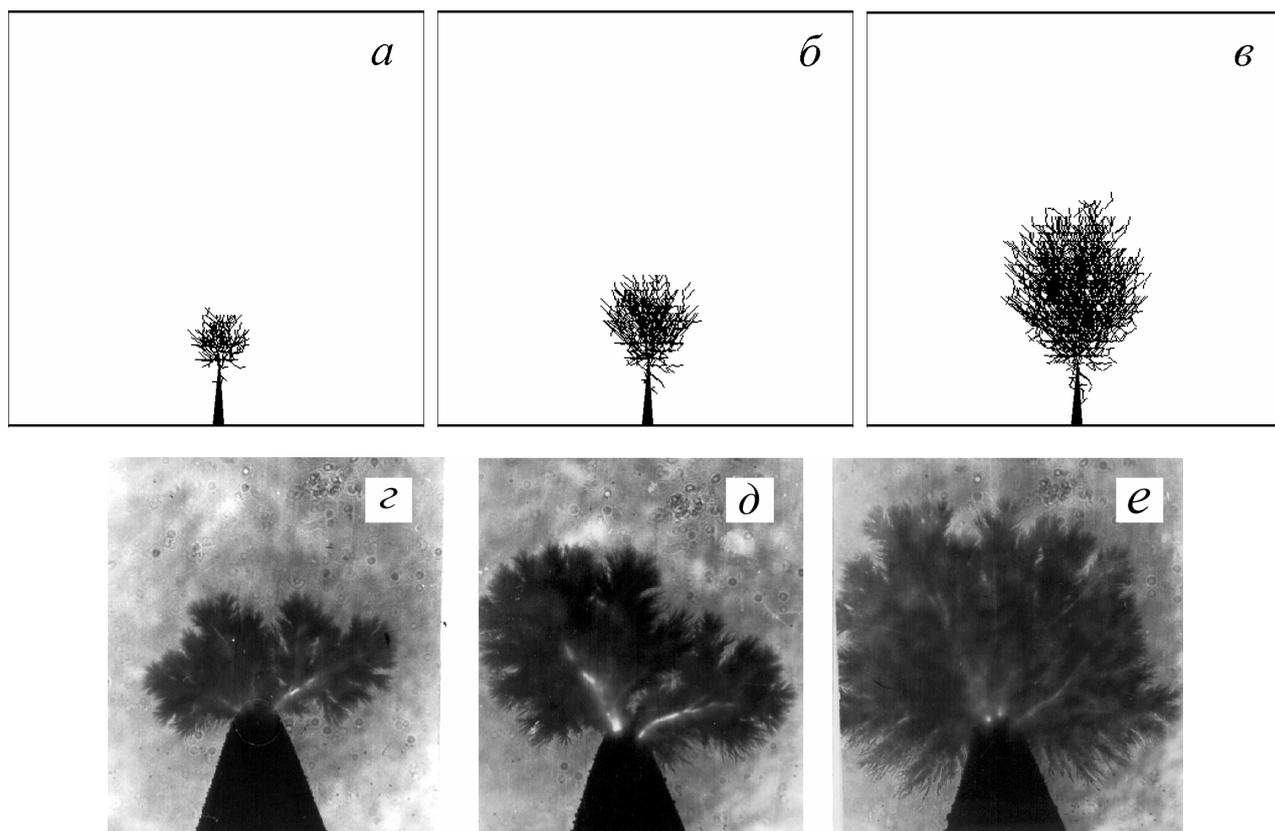


Рис. 5.23. Развитие сильно разветвленной разрядной структуры с высокой скоростью. Моделирование при  $V = 84$  кВ,  $t = 20$  (*а*),  $49$  (*б*),  $81$  нс (*в*).  $A = 1.4 \cdot 10^3$  см/с,  $g = 60$  кВ/см,  $\chi = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2 \text{ В}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Результаты эксперимента в деионизованной воде по данным работы [165] при  $V = 160$  кВ,  $d = 2.5$  см, радиусе острия  $650$  мкм,  $t = 100$  (*з*),  $150$  (*д*),  $200$  нс (*е*).

При моделировании наблюдалось, что по мере роста **каналов** напряженность поля на **их** кончиках сильно уменьшается и их рост замедляется. Количество растущих ветвей кустообразной структуры уменьшается, при этом их электропроводность оказывается в несколько раз выше электропроводности остальных каналов. В эксперименте в условиях сильно неоднородного поля часто

наблюдают, как из остановившейся структуры в форме куста развиваются быстрые каналы в форме деревьев (рис. 5.22,д). В рамках предложенной трехмерной модели пока не удается четко воспроизвести этот переход от одного типа разрядных каналов к другому. В [54] высказывалась гипотеза о развитии токовой неустойчивости в каналах кустообразной структуры вследствие наличия участка вольт-амперной характеристики каналов с отрицательным дифференциальным сопротивлением. Однако, явление преобразования разрядных структур от одного типа к другому все еще требует детального изучения.

При еще более высоких напряжениях быстрые разрядные каналы начинают сильно ветвиться, их количество возрастает (рис. 5.23,з-е), и образуются структуры, также напоминающие по форме кусты [165]. На рис. 5.23,а-в представлены картины структур, полученных моделированием и состоящих из большого количества ветвей, исходящих из острия. Средняя скорость роста показанной структуры 21.6 км/с близка к скорости роста реальных каналов на рис. 5.23, з-е, составляющей  $\approx 25$  км/с. Средняя удельная электропроводность каналов структуры, полученной моделированием,  $\sigma \sim 10^{-2}$  Ом<sup>-1</sup>см<sup>-1</sup>.

**Выводы.** Компьютерным моделированием показано, что результаты расчетов развития трехмерных проводящих структур электрического разряда, полученные с использованием многоэлементных и одноэлементных моделей, эквивалентны с точностью до взаимного влияния одновременно возникающих соседних элементов. Сравнение результатов моделирования с экспериментом показало, что модель позволяет описать основные закономерности роста разрядных структур в жидкостях, в том числе различные формы структур. В рамках приближенного метода расчета расширения каналов разрядной структуры, предложенного в главе 4, впервые учтено изменение поперечного сечения элемента канала со временем, что позволило, в отличие от всех ранее предложенных моделей, ввести удельную электропроводность каналов структуры.

Показано, что при увеличении электропроводности разрядных каналов существенно **изменяется** динамика роста и форма разрядной структуры. При постоянной удельной электропроводности наблюдались два режима: при малых значениях  $\sigma$  развивались медленные, интенсивно ветвящиеся структуры, а при

высокой  $\sigma$  развивались быстрые, слабоветвящиеся структуры. Этот результат подтверждает известное предположение о том, что переход от одного типа разрядных структур к другому (например, от медленных кустообразных к быстрым древовидным) при повышении напряжения можно объяснить процессами в каналах, которые приводят к увеличению электропроводности канала (например, разогреву плазмы канала).

Впервые проведены расчеты динамики ветвящихся разрядных структур с учетом изменения во времени удельной электропроводности каналов. Показано, что изменение скорости роста по мере продвижения структуры вглубь разрядного промежутка связано с изменением напряженности электрического поля перед вершинами разрядных каналов. Показано, что напряженность электрического поля вдоль каналов примерно постоянна и составляет 25 – 60 кВ/см, в зависимости от приложенного напряжения. Объемная плотность заряда в участках каналов вблизи их кончиков для ветвящихся структур существенно больше плотности заряда в остальных частях каналов. В рамках модели с изменяющейся электропроводностью среднее значение  $\sigma$  каналов тем больше, чем больше напряжение, подаваемое на разрядный промежуток, и изменяется в диапазоне  $\sigma \sim 10^{-2} - 1 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ .