

УДК 537.528

МЕТОД РЕШЕТОЧНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В ЗАДАЧАХ
ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИА. Л. Куперштох, Д. А. Медведев
(Новосибирск)

Введение. Метод решеточного уравнения Больцмана широко развивается в течение последних 15 лет. Он применяется для расчета течений сплошной среды, в том числе многофазных. Его преимущества состоят в повышенной численной устойчивости, высокой степени параллелизма и простоте задания граничных условий.

В данной работе использовался метод ЛВЕ в одномерном случае с тремя значениями скорости частиц $c_k = -1, 0$ и $+1$, а в двумерном случае — с 9 возможными векторами скорости на квадратной сетке ($|c_k| = 0, 1$ и $\sqrt{2}$). В качестве переменных используются одночастичные функции распределения N_k . Уравнение эволюции имеет следующий вид:

$$N_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k, t + \Delta t) = N_k(\mathbf{x}, t) + \Omega_k(N(\mathbf{x}, t)).$$

Здесь первое слагаемое в правой части соответствует конвективному члену, второе — столкновительному. Оператор столкновений берется в БГК-форме $\Omega_k(N(\mathbf{x}, t)) = -(N_k - N_k^{eq})/\tau$, представляющей собой релаксацию к локальному равновесию [1] (устойчив при $1/2 \leq \tau < \infty$). Равновесные функции распределения зависят от сохраняющихся величин — массы и импульса в узле. Такая форма оператора столкновений обеспечивает галлилеевскую инвариантность и физически правильную форму тензора потока импульса. Время релаксации τ определяет кинематическую вязкость $\nu = 1/3(\tau - 1/2)$.

Для расчета электрогидродинамических течений необходимо дополнительно рассмотреть эффекты, обусловленные электрическим полем [2]:

- 1) конвективный перенос электрического заряда движущейся жидкостью;
- 2) перенос заряда за счет токов проводимости, для чего необходимо вычисление электрического потенциала;
- 3) влияние электродинамических сил, действующих на заряженное вещество в электрическом поле.

Расчет переноса заряда. Изменение заряда в данном узле происходит за счет конвективного переноса заряда движущейся средой и за счет токов проводимости (включая дрейф ионов в диэлектрике под действием электрического поля). Рассмотрим по отдельности эти механизмы.

Конвективный перенос заряда. Уравнение конвективного переноса заряда следует из закона сохранения и имеет вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\operatorname{div}(q\mathbf{u}).$$

Здесь q — плотность заряда, \mathbf{u} — скорость течения жидкости. Для решения этого уравнения применялись два метода — метод переноса заряда «ЛВЕ-частицами» и разностный метод, основанный на средней скорости течения.

Метод переноса заряда движущимися «ЛВЕ-частицами» заключается в следующем. По каждому направлению k из данного узла уносится заряд $q_k = qN_k/\rho$. Этот метод приводит к схемной диффузии с коэффициентом $D_1 = c_s^2\Delta t/2$. В частности, для двумерной схемы с 9 направлениями $c_s = h/\sqrt{3}\Delta t$ и $D_1 = h^2/6\Delta t$. Пример расчета показан на рис. 1. Видно, что распределение заряда совпадает с распределением плотности вещества (заряд

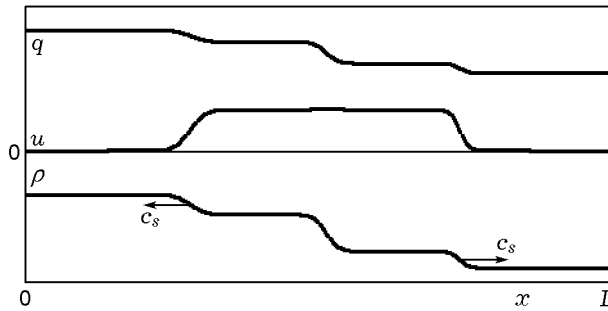


Рис. 1. Течение жидкости и распределение заряда при нулевой электропроводности в отсутствие электродинамических сил

«вморожен» в вещество). Ясно, что для однородной жидкости такой метод неприемлем, хотя он может быть применен в случае расчета динамики проводящих включений, когда в двухкомпонентной среде только одно вещество способно переносить заряд.

Метод средней скорости представляет собой гибрид методов конечных разностей и конечных объемов. В одномерном случае он записывается следующим образом:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2h} (q_{i-1}^n (|u_{i-1/2}| + u_{i-1/2}) + q_{i+1}^n (|u_{i+1/2}| - u_{i+1/2}) - q_i^n (|u_{i-1/2}| - u_{i-1/2} + |u_{i+1/2}| + u_{i+1/2})),$$

где $u_{i+1/2} = (u_i + u_{i+1})/2$. В этом методе коэффициент схемной диффузии $D_2 = (|u|(h/\Delta t - |u|))/2$ зависит от скорости. Его максимальное значение $D_2|_{\max} = h^2/8\Delta t$ достигается при $u_m = h/2\Delta t$ и меньше, чем D_1 . Скорость течения обычно заметно меньше u_m , так что $D_2 < D_2|_{\max}$. Поэтому в основных расчетах использовался именно этот метод.

Формулы для коэффициентов диффузии проверялись для случая одномерного течения жидкости с постоянной скоростью u_0 , путем сравнения численных результатов расчетов по каждому из методов с хорошо известным точным решением уравнения диффузии для случая, когда заряд Q первоначально расположен в точке $x = 0$

$$q(x) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - u_0 t)^2}{4Dt}\right).$$

Для любых скоростей в диапазоне, пока ЛВЕ-метод остается устойчивым, результаты численных расчетов полностью совпадают с точным решением.

На рис. 2 показаны результаты расчетов конвективного переноса электрического заряда, для случая, когда он первоначально равномерно распределен $q(x) = q_0$ в некоторой области $x_1 < x < x_2$. Однородный поток жидкости движется с постоянной скоростью $u = u_0$ равной 0,1. Граничные условия периодические.

Токи проводимости. Уравнения переноса заряда за счет токов проводимости

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{j} = -\text{div}(\sigma \mathbf{E})$$

решались совместно с уравнением Пуассона для электрического потенциала $\Delta \varphi = -4\pi q$ с помощью неявной конечно-разностной схемы [3]. Проводимость звена зависела от электропроводности в конечных узлах $G_{ij} = \sigma_0 h \sqrt{n_i n_j}$, где σ_0 — электропроводность жидкости,

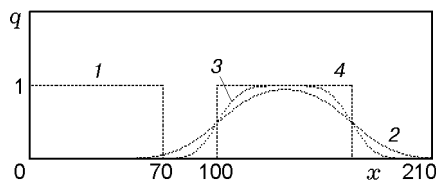


Рис. 2. Изменение распределения заряда в результате течения жидкости при нулевой электропроводности: 1 — начальное распределение заряда; 2 — результаты метода «ЛВЕ-частиц», 3 — результаты метода средней скорости, 4 — теоретическое распределение заряда при отсутствии диффузии для $t = 1000$

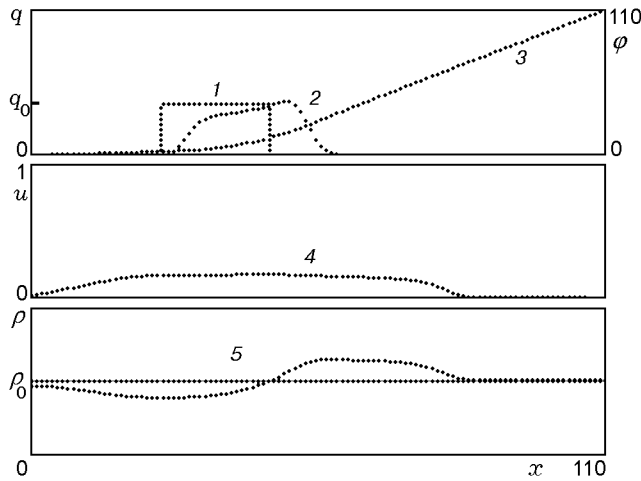


Рис. 3. Течение жидкости и распределение заряда в сжимаемой жидкости: 1, 2 — распределение заряда при $t = 0, t = 60$, 3–5 — распределение электрического потенциала, скорости течения и плотности жидкости, ($t = 60, \rho_0 = 1, \varphi_0 = 110, q_0 = 5,6 \cdot 10^{-3}, x_1 = 26, x_2 = 46$)

n_i, n_j — относительная концентрация проводящей фазы в конечных узлах звена, h — шаг сетки. Такая зависимость гарантирует отсутствие переноса заряда внутрь непроводящей фазы. Обычно электропроводность жидкостей, используемых в ЭГД-устройствах, мала. Кроме того, показано [4], что в плоском случае дрейфом заряда можно пренебречь по сравнению с конвективным течением. Поэтому в дальнейших расчетах электропроводность в объеме жидкости принималась нулевой. Для моделирования инжекции заряда задавалась некоторая электропроводность в приэлектродных слоях.

Электродинамические силы. Кроме расчета переноса заряда, необходимо учитывать действие на жидкость электродинамических сил, которые и приводят к возникновению течения. Пусть в данном узле находится заряд q , тогда сила, действующая на него, находится как $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\varphi$. В конечно-разностном виде $F_x = -q(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j})/2h, F_y = -q(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1})/2h$. При использовании центрированной формы производной исключается вклад в электрическое поле заряда, находящегося в данном узле (т. е., действие заряда на себя). За один шаг по времени действие электродинамической силы приводит к изменению импульса жидкости в узле $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t$, изменение скорости равно $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{p}/\rho$. Это изменение скорости используется в операторе столкновений ЛБЕ. Таким образом рас-

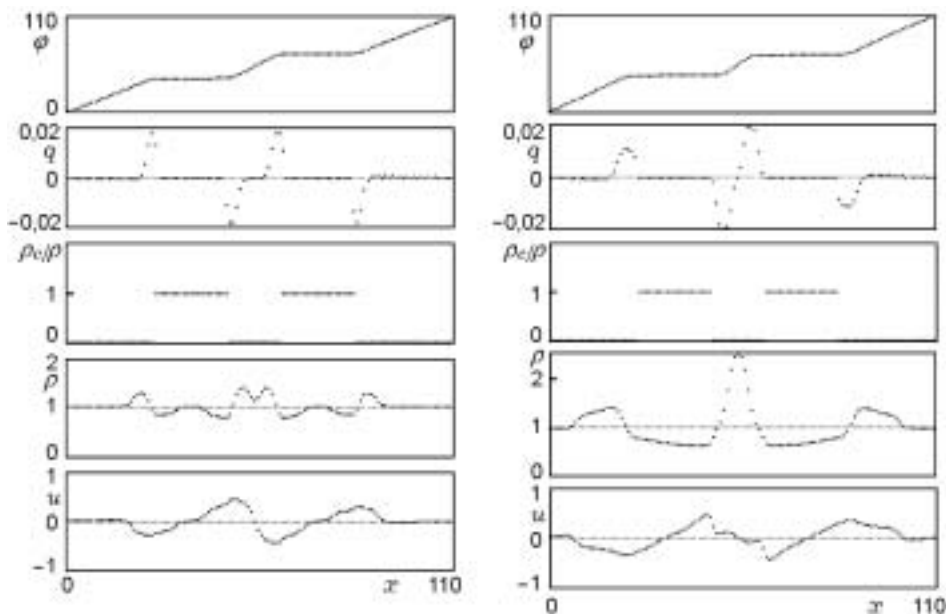


Рис. 4. Динамика проводящих капель в электрическом поле: $t = 12$ (а), 30 (б)

считывается действие электрического поля на заряженное вещество.

Результаты расчета одномерного течения жидкости представлены на рис. 3. Левая и правая граница представляли собой твердые стенки ($u = 0$). Отрицательный заряд первоначально был равномерно распределен в области между x_1 и x_2 так, что $q(x) = -q_0$ (кривая 1). Граничные условия для уравнения Пуассона $\varphi = 0$ при $x = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ при $x = L$. Под действием электрического поля заряд начинает двигаться вправо, при этом возникает волна разрежения, идущая влево от него и волна сжатия, идущая вправо. Спустя некоторое время распределение плотности заряда приобретает некоторый наклон (кривая 2). В правой части плотность заряда становится выше из-за сжатия жидкости и перераспределения плотности вещества ρ . Как уже отмечалось выше, при этом одновременно происходит некоторая диффузия заряда.

Интересно, что давление в волне разрежения может стать достаточно низким, чтобы при фиксированной температуре произошло вскипание жидкости.

Динамика проводящих включений. В случае наличия в электрическом поле проводящих включений они поляризуются и начинают двигаться под действием электродинамических сил (на поверхность проводника действует отрицательное электрическое давление). При этом в жидкости возникают волны сжатия и разрежения. Результаты расчета динамики двух первоначально покоящихся проводящих капелек в одномерном случае представлены на рис. 4. Представлены графики электрического потенциала φ , плотности заряда q , плотности ρ и массовой скорости жидкости u для двух моментов времени. Потенциал левого электрода нулевой, правого $\varphi_0 = 110$, ширина расчетной области $L = 110$, среднее поле в области $E_a = 1$, начальная плотность жидкости $\rho_0 = 1$. Электропроводность капелек σ_0 была достаточно высокой, так, что поле внутри них быстро становилось практически равным нулю. Четко наблюдается возникновение волн сжатия, распространяющихся в жидкость от границы капелек, и волн разрежения, распространяющихся внутрь капелек.

Двумерное ЭГД-течение (ЭГД-насос). Рассмотрено развитие ЭГД-течения в двумерном случае. Расчет производился в квадратной области размером 106×106 узлов между двумя электродами сверху и снизу. Граничные условия по оси X периодические. Потенциал верхнего электрода нулевой, нижнего $\varphi_0 = 106$, среднее поле в области $E_a = 1$. Посредине нижнего электрода имеется выступ размером 5×2 , с вершины которого возможна инжекция заряда (электропроводность прилегающего слоя жидкости $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-4}$).

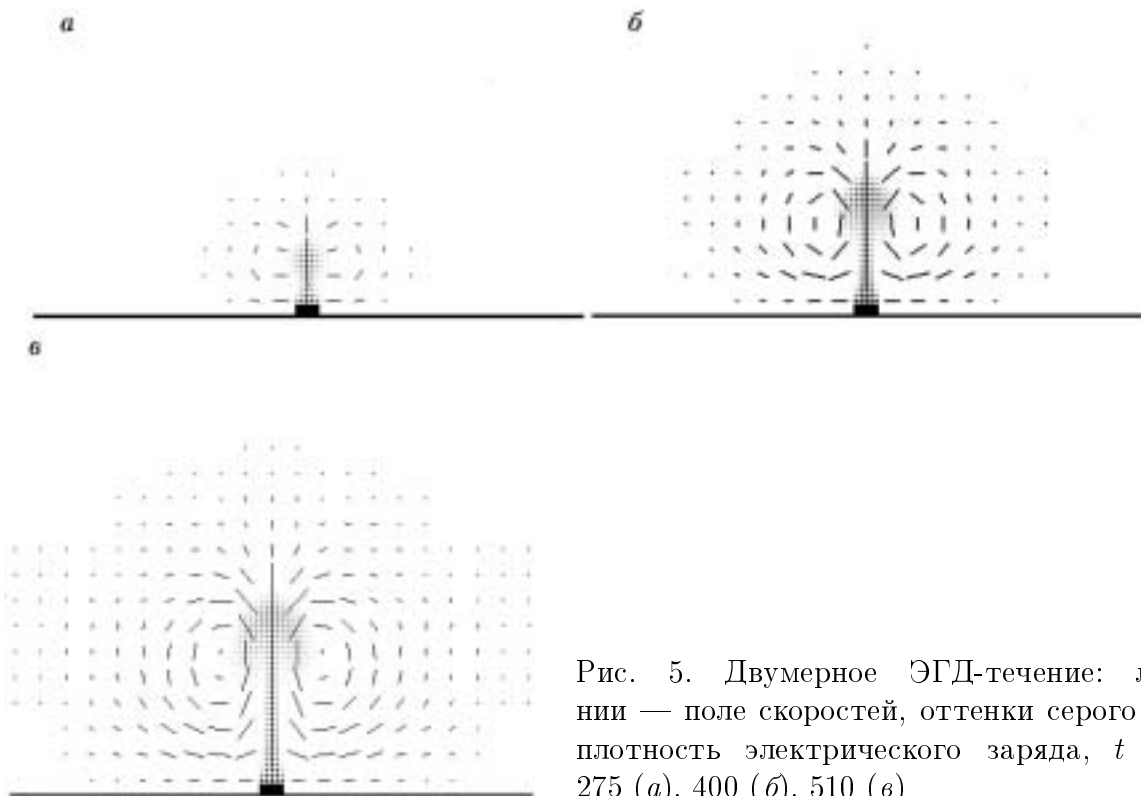


Рис. 5. Двумерное ЭГД-течение: линии — поле скоростей, оттенки серого — плотность электрического заряда, $t = 275$ (а), 400 (б), 510 (в)

На рис. 5 показано развитие течения во времени. После подачи напряжения начинается инжекция заряда с выступа. Затем заряженный сгусток начинает двигаться вверх под действием электрического поля. Формируется течение жидкости в виде плоского вихревого диполя. Размер области жидкости, вовлеченной в движение, и величина скорости возрастают со временем. Максимальная скорость в расчетах около 0,05. Из-за увеличения «головы» заряженной струи происходит ослабление электрического поля на вершине выступа, и дальнейшая инжекция заряда уменьшается.

В данном примере не происходит стока заряда, поэтому со временем должно произойти его накопление и прекращение движения жидкости. В следующих расчетах при той же конфигурации существует проводящий слой, прилегающий к верхнему электроду, с той же электропроводностью σ_0 . Поэтому возможен сток заряда, и течение должно со временем выйти на установившийся режим. На рис. 5 представлена зависимость от времени средней кинетической энергии движения жидкости $\langle E_k \rangle$ при различных значениях σ_0 . Течение на начальной стадии имеет пульсирующий характер, что связано с уменьшением электрического поля на выступе после инжекции очередного сгустка заряда.

Заключение. Построена модель движения жидкости на основе метода решеточного уравнения Больцмана с учетом действия электродинамических сил и расчета переноса заряда за счет конвекции и электропроводности. Реализованы два метода расчета конвективного переноса заряда (перенос заряда ЛВЕ частицами и метод средней скорости). Получены формулы для коэффициента численной диффузии в зависимости от скорости течения. Проведено моделирование электродинамических течений, возникающих при инжекции заряда с выступа на электроде. В такой постановке формируется течение жидкости в виде плоского вихревого диполя. Течение на начальной стадии имеет пульсирующий характер, что связано с уменьшением электрического поля на выступе после инжекции очередного сгустка заряда. Рассмотрена динамика проводящих включений в жидкости в электрическом поле. Полученный метод достаточно прост и эффективен и представляется перспективным для расчета задач электрогидродинамики.

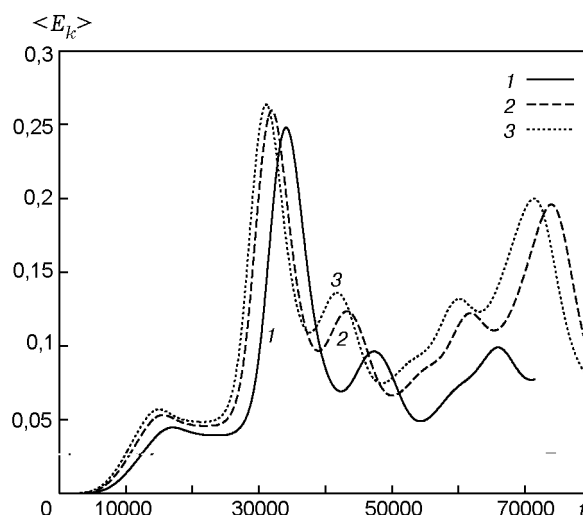


Рис. 6. Зависимость средней кинетической энергии течения от времени: $\sigma_0 = 10^{-4}$ (1), $2 \cdot 10^{-4}$ (2), $3 \cdot 10^{-4}$ (3)

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bhatnagar P., Gross E. P., Krook M. K.** A model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems // Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 511–525.
2. **Medvedev D. A., Kupershtokh A. L.** Use of the Lattice Boltzmann Equation Method to Simulate Charge Transfer and Electrohydrodynamic Phenomena in Dielectric Liquids // Electrical Conduction, Convection and Breakdown in Fluids. Proc. 2nd Int. Workshop. Atten P., Denat A. (Eds). Grenoble, France, 2000. P. 60–63.
3. **Karpov D. I., Kupershtokh A. L.** Models of Streamer Growth with "Physical" Time and Fractal Characteristics of Streamer Structures // Conference record of the 1998 IEEE Int. Symposium on Electrical Insulation. Arlington, USA, 1998. P. 607–610.
4. **Vázquez P. A., Pérez A. T., Castellanos A., Atten P.** Dynamics of electrohydrodynamic laminar plumes: Scaling analysis // Phys. Fluids. 2000. V. 12, N 11. P. 2809–2818.