

Д. А. Медведев, А. П. Ершов

## Моделирование намерзания льда на подводной трубе газопровода

Рассмотрено намерзание льда на холодную трубу подводного газопровода. Получено приближенное аналитическое решение, которое хорошо согласуется с результатами численного расчета методом фазового поля. Показано, что толщина ледяной корки к концу зимы может достигать 1–1,5 метра при отсутствии теплоизоляции.

### 1. Введение

В зимний период газ в трубах газопровода имеет низкую температуру. На подводных участках это может приводить к образованию льда на трубах, что увеличивает нагрузку за счет архимедовой силы и повышенного сопротивления течению реки.

В данной работе рассмотрена простая модель намерзания льда на подводной трубе, через которую идет поток холодного газа.

Оценка характерного числа Рейнольдса для течения дает

$$\text{Re} \sim \frac{LV}{\nu} \sim 10^6$$

при характерном размере  $L = 2R = 1$  м, скорости реки  $V = 1$  м/с и кинематической вязкости воды  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Так как число Рейнольдса велико, течение заведомо турбулентное, и толщина пограничного слоя  $\delta \sim L/\sqrt{\text{Re}}$  мала. Тепловой пограничный слой тоньше в  $\sqrt{\text{Pr}} \approx 3,5$  раза (число Прандтля для воды 13,5). Поэтому влиянием пограничного слоя на теплопередачу можно пренебречь, а вне его жидкость активно перемешивается, и температуру можно считать постоянной и равной 0°C.

### 2. Теоретические расчеты

Рассмотрим приближенную задачу, которая допускает аналитическое решение. Заменим нашу трубу полуцилиндром радиуса  $R_0$  (с той же площадью боковой поверхности, что и цилиндр радиуса  $R_0/2$ ), прилегающим к дну (рис. 1). Если пренебречь теплопроводностью грунта, то данная постановка эквивалентна трубе того же радиуса, погруженной в бесконечную среду. Снаружи труба покрыта слоем теплоизоляции (внешний радиус  $R_1$ , теплопроводность  $\kappa_1$ ). Полученная задача обладает осевой симметрией, поэтому ее решение должно зависеть только от  $r$ . Температуру жидкости  $T_0$  будем считать равной температуре плавления льда.

Пусть текущий внешний радиус ледяной оболочки равен  $R$ , а теплопроводность льда  $\kappa$ . Поскольку характерное время установления распределения температуры  $t_T \sim \Delta R^2 \rho c / \kappa \sim 3,4 \cdot 10^4$  с (для  $\Delta R = 0,2$  м) гораздо меньше, чем характерное время нарастания толщины льда, можно считать распределение температуры в любой момент

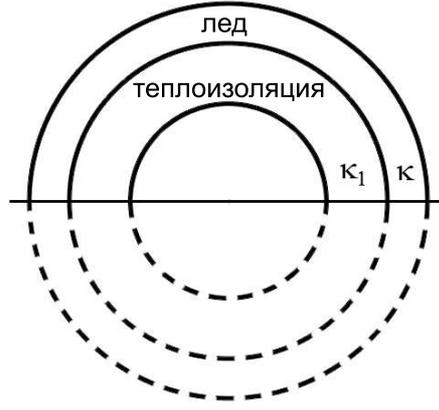


Рис. 1.

времени стационарным. Тогда плотность теплового потока  $q = -\kappa \nabla T$  удовлетворяет условию

$$qr = Q = const.$$

С учетом осевой симметрии получаем уравнения

$$-\kappa_1 \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{Q}{r}, \quad -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{Q}{r}$$

для слоя теплоизоляции и ледяной оболочки, соответственно. Граничные условия  $T_{R_0} = T_0 - \Delta T$ ,  $T_R = T_0$ ,  $\kappa_1 \partial T / \partial r|_{R_1-0} = \kappa \partial T / \partial r|_{R_1+0}$ . Отсюда получаем выражение для плотности теплового потока на внешней поверхности ледяной оболочки

$$q(R) = \frac{Q}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\kappa \kappa_1 \Delta T}{\kappa \ln R_1 / R_0 + \kappa_1 \ln R / R_1}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что изменение толщины ледяного слоя за малый промежуток времени  $dt$  удовлетворяет уравнению

$$qdt + \rho L dR = 0, \quad (1)$$

где  $L$  – удельная теплота плавления,  $\rho$  – плотность льда. После подстановки  $q$  и разделения переменных уравнение (1) интегрируется и дает время, необходимое для нарастания ледяной оболочки с внешним радиусом  $R$ :

$$\frac{2\kappa \Delta T}{\rho L} t = R^2 \left( \ln \frac{R}{R_1} + \frac{\kappa}{\kappa_1} \ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\kappa}{\kappa_1} R_1^2 \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{R_1^2}{2}. \quad (2)$$

При отсутствии теплоизоляции ( $R_1 = R_0$ ) можно переписать уравнение (2) в безразмерном виде

$$\bar{t} = \bar{R}^2 \left( \ln \bar{R} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}, \quad (3)$$

где безразмерный радиус  $\bar{R} = R/R_0$ , безразмерное время  $\bar{t} = t/t_0$ , характерное время  $t_0 = \rho L R_0^2 / (2\kappa \Delta T)$ . Принимая радиус трубы  $R_0/2 = 0,5$  м, разницу температур  $\Delta T = 40$  К, теплопроводность льда  $\kappa = 2,25$  Вт/(м·К), теплоту плавления  $L = 3,35 \cdot 10^5$  Дж/кг, получим  $t_0 = 1,68 \cdot 10^6$  с или примерно 19 суток.

График зависимости (3) показан на рис. 2 (сплошная линия).

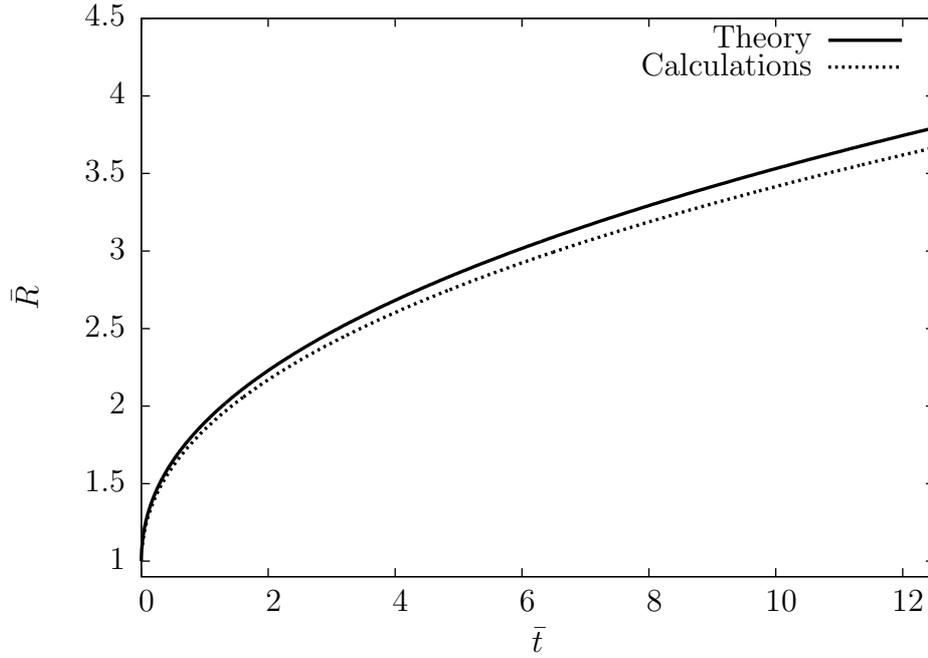


Рис. 2.

### 3. Моделирование

#### 3.1. Метод фазового поля

Для моделирования роста ледяной оболочки использовался метод фазового поля (phase-field method [1; 2]), суть которого в следующем: вводится дополнительный параметр  $\phi$ , описывающий состояние вещества в данной точке –  $\phi = -1$  соответствует жидкости,  $\phi = 1$  твердому веществу. Фазовое поле  $\phi$  почти постоянно в областях, занятых жидкой или твердой фазой, и резко меняется в области перехода. Таким образом, граница между фазами имеет конечную (хотя и небольшую) толщину, что избавляет от необходимости выделять ее явным образом в расчетах. Уравнение для эволюции фазового поля  $\phi$  имеет следующий вид

$$\tau \frac{\partial \phi}{\partial t} = [\phi - \lambda u(1 - \phi^2)](1 - \phi^2) + W^2 \nabla^2 \phi. \quad (4)$$

Его необходимо дополнить уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (5)$$

Здесь  $u = C(T - T_0)/\rho L$  – безразмерная температура,  $D = \kappa/\rho C$  – температуропроводность,  $C$  – теплоемкость. Второе слагаемое в уравнении (5) описывает выделение тепла при затвердевании жидкости.

С помощью асимптотического разложения показано [1; 2], что уравнения (4) и (5) в пределе сводятся к модифицированной задаче Стефана

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D \nabla^2 u, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} &= D \mathbf{n} \cdot (\nabla u|_s - \nabla u|_l), \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_i = -d(\theta)/R - \beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}.$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – локальный вектор нормали к границе раздела фаз (направленный от твердой фазы к жидкой),  $\mathbf{V}$  – скорость движения фронта затвердевания. Индексы  $l$  и  $s$  во втором уравнении относятся к градиентам температуры на границе раздела фаз, соответственно, со стороны жидкого и твердого вещества. Третье уравнение выражает так называемое условие Гиббса–Томсона: температура на границе  $u_i$  ниже температуры нагревания за счет действия поверхностного натяжения (первое слагаемое в правой части, здесь  $d = \gamma T_m C / (\rho L^2)$  – капиллярная длина,  $\gamma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $R$  – локальный радиус кривизны) и за счет кинетических эффектов (второе слагаемое). В данной работе кинетические эффекты не учитывались,  $\beta = 0$  (это достигается согласованным выбором  $\lambda$  и  $D$  в уравнениях (4), (5)).

Большим преимуществом метода фазового поля является отсутствие необходимости явного выделения межфазных границ, что позволяет использовать простые схемы сквозного счета. Изменение геометрии и топологии границ учитывается автоматически. Кроме того, повышается устойчивость вычислений.

Уравнения (4) и (5) дискретизовались на равномерной пространственной сетке с шагом  $\Delta x = \Delta y = 0.4$  (в безразмерных переменных) и решались с помощью явной численной схемы.

### 3.2. Симметричная задача

Первый расчет выполнен для проверки модели. Рассматривалась труба в виде полуцилиндра радиуса  $R_0$  (теплоизоляция отсутствовала, т.е.  $R_1 = R_0$ ), окруженная бесконечной средой. С учетом симметрии задачи, расчетная область представляла собой квадрат, в левом нижнем углу которого размещена четверть круга, внутри которой температура равна  $-\Delta T$ , а  $\phi = 1$  (твердая фаза). На правой и верхней границах области заданы температура  $T = 0$  и фазовое поле  $\phi = -1$  (жидкая фаза), на левой и нижней границах задавались условия непротекания (или зеркального отражения)  $\partial T / \partial n = 0$ ,  $\partial \phi / \partial n = 0$ , где  $n$  – нормаль к соответствующей границе. Также в точках, где  $\phi > -1 + \varepsilon$ , задавалось  $T = 0$ , что соответствует быстрому перемешиванию воды. В расчетах принималось значение  $\varepsilon = 10^{-9}$ . Безразмерная температура в трубе (на внутренней поверхности растущей ледяной оболочки) задавалась равной  $u_{R_0} = -0.5$ , что соответствует разнице температур  $\Delta T = 40$  К.

Результаты расчета показаны на рис. 2 (пунктирная линия). Видно, что расчетный радиус ледяной оболочки растет медленнее, чем теоретическая зависимость (3). Можно выделить две возможные причины этого различия. Во-первых, граница затвердевания несколько переохлаждена за счет эффекта Гиббса–Томсона (6). Однако, данный эффект пренебрежимо мал. Действительно, отношение  $d/R$  составляло в расчетах менее  $10^{-3}$  в начальный момент времени и далее еще уменьшалось. Кроме того, проведенные численные расчеты, в которых начальное отношение  $d/R$  изменялось в 4 раза, дали идентичные результаты.

Вторая причина заключается в неполном установлении температурного равновесия внутри слоя льда. Это приводит к уменьшению градиента температуры на внешней гра-

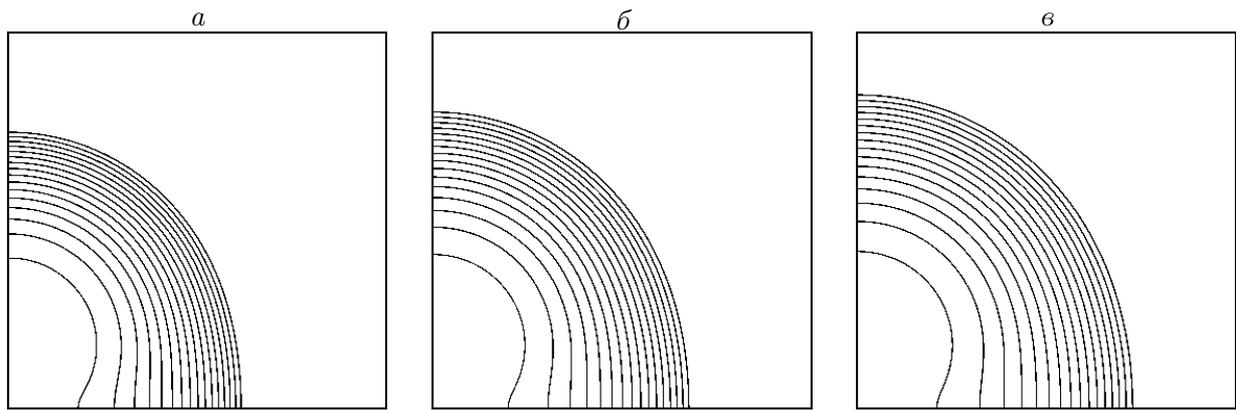


Рис. 3. Обледенение трубы. Разница температур  $\Delta T = 30$  К (а), 40 К (б) и 50 К (в)

нице растущей ледяной оболочки и, следовательно, к уменьшению скорости движения фронта затвердевания.

### 3.3. Реальная геометрия

Рассматривалась цилиндрическая труба радиуса  $R_0 = 60$ , лежащая на поверхности грунта (нижняя граница расчетной области, на которой задавались условия непротекания). Расчеты проводились в области размером  $1200 \times 1200$ , коэффициент теплопроводности  $D = 16$ , капиллярная длина  $d = 0,0346$ , шаг по времени  $\Delta t = 0,002$  (все параметры в безразмерных единицах).

Результаты расчетов для различных  $\Delta T$  представлены на рис. 3. Линиями показано положения границы льда для времен от  $t = 20$  до  $t = 920$  с интервалом  $\delta t = 60$  (в размерных величинах максимальное время соответствует  $\approx 140$  суток, а интервал  $\delta t \approx 9,3$  суток).

На рис. 4 показана зависимость от времени максимальной высоты ледяной оболочки (выше верхнего края трубы) для различных  $\Delta T$ . Видно, что толщина слоя льда может достигать 1–1,5 метра, что создаст значительную нагрузку на трубу.

### Заключение

Рассмотрена задача намерзания льда на холодную трубу подводного газопровода. Получено приближенное аналитическое решение, которое дает характерное время увеличения толщины ледяной корки около 19 суток. Выполнено численное моделирование методом фазового поля, результаты в симметричном случае хорошо согласуются с аналитическими. Для реальной геометрии трубы численные расчеты показывают, что толщина ледяного слоя сверху трубы может достигать в конце зимы 1–1,5 метра при отсутствии теплоизоляции. Эти цифры следует рассматривать как оценку сверху, реальная толщина льда будет меньше за счет конечной теплопроводности грунта и теплоизоляции. Тем не менее, моделирование позволяет оценить масштабы проблемы и выработать возможные меры противодействия обледенению труб.

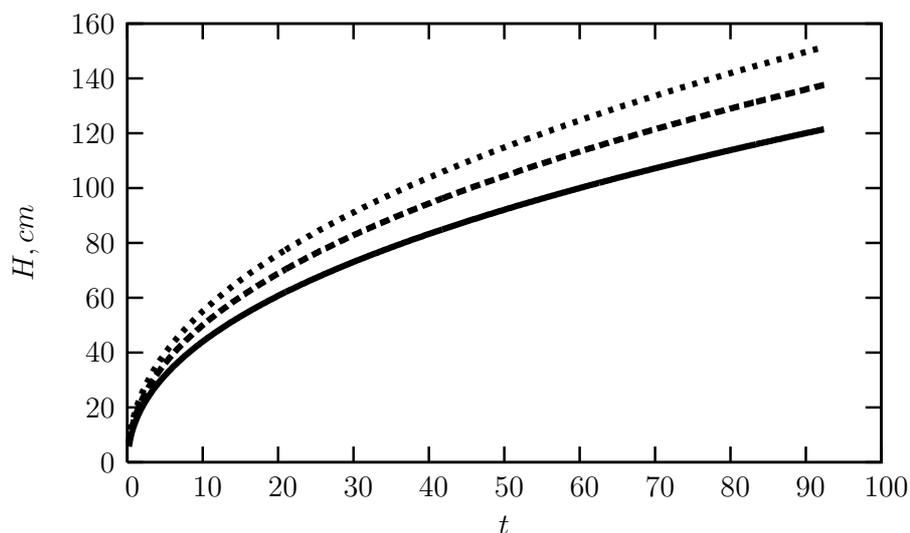


Рис. 4. Зависимость максимальной высоты ледяной оболочки от времени. Разница температур  $\Delta T = 30$  К (1), 40 К (2) и 50 К (3)

### Список литературы

1. Karma A., Rappel W.-J. Phase-field method for computationally efficient modeling of solidification with arbitrary interface kinetics // *Physical Review E*. 1996. V. 53, N 4. P. R3017–R3020.
2. Karma A., Rappel W.-J. Quantitative phase-field modeling of dendritic growth in two and three dimensions // *Physical Review E*. 1998. V. 57, N 4. P. 4323–4349.

Материал поступил в редколлегию 14.07.2012

### Адреса авторов

МЕДВЕДЕВ Дмитрий Александрович

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

пр. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: dmedv@hydro.nsc.ru

ЕРШОВ Александр Петрович

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

пр. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: ers@hydro.nsc.ru