

# Оглавление

<b>3</b>	<b>Электричество и магнетизм</b>	<b>2</b>
3.1	Электростатика . . . . .	2
3.1.1	Пример – поле и потенциал сферы . . . . .	2
3.1.2	Пример – поле и потенциал шара . . . . .	3
3.1.3	Пример – заземленная сфера . . . . .	5
3.1.4	Пример – разлетающиеся частицы . . . . .	6
3.1.5	Пример – столкновение зарядов . . . . .	7
3.1.6	Пример – система конденсаторов . . . . .	8
3.2	Постоянный ток . . . . .	9
3.2.1	Пример – соединение сопротивлений . . . . .	9
3.2.2	Пример – ЭДС и внутреннее сопротивление батареи . . . . .	10
3.2.3	Пример – внутреннее сопротивление аккумулятора . . . . .	10
3.2.4	Пример – цепь с конденсаторами . . . . .	11
3.3	Магнитное поле . . . . .	11
3.3.1	Пример – движение заряда в магнитном поле . . . . .	11
3.3.2	Пример – проводник с током в магнитном поле . . . . .	11
3.3.3	Пример – радиусы траекторий . . . . .	12
3.4	ЭДС индукции . . . . .	12
3.4.1	Пример – падение в магнитном поле . . . . .	12
3.4.2	Пример – стержень в магнитном поле . . . . .	13
3.4.3	Пример – вихревое электрическое поле . . . . .	14

# Глава 3

## Электричество и магнетизм

### 3.1 Электростатика

#### 3.1.1 Пример – поле и потенциал сферы

Найти напряженность поля и потенциал во всем пространстве тонкой сферы радиуса  $R$ , равномерно заряженной до заряда  $q$ .

#### Решение

Применим теорему Гаусса. Выберем в качестве замкнутой поверхности концентрическую сферу радиуса  $r > R$  (рис.). Очевидно, что напряженность на поверхности этой сферы будет одинакова по величине и направлена по радиусу. Тогда поток напряженности через нее будет  $E \cdot 4\pi r^2$ . Согласно теореме Гаусса

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi kq,$$

откуда

$$E = k \frac{q}{r^2}.$$

Выбрав в качестве поверхности сферу радиуса  $r < R$ , получим  $E = 0$ . Таким образом, однородно заряженная сфера во внешней области пространства создает такое же поле, как и заряд, помещенный в ее центре. Внутри сферы поля нет.

Найдем потенциал сферы во всем пространстве. Так как вне сферы напряженность поля совпадает с напряженностью заряда, находящегося в центре, то и потенциал при  $r > R$  выразится в виде

$$\varphi(r) = k \frac{q}{r}.$$

Пронесем единичный положительный заряд из бесконечности до расстояния  $r$  от центра, меньшего радиуса сферы. Тогда работа, которую необходимо со-

вершить по переносу до поверхности сферы будет равна  $kq/R$ . Внутри сферы поле равно нулю и работа не совершается. Таким образом

$$E = k\frac{q}{r^2} \text{ при } r > R, \quad E = 0 \text{ при } r < R,$$

$$\varphi = k\frac{q}{r} \text{ при } r > R, \quad \varphi = k\frac{q}{R} \text{ при } r < R.$$

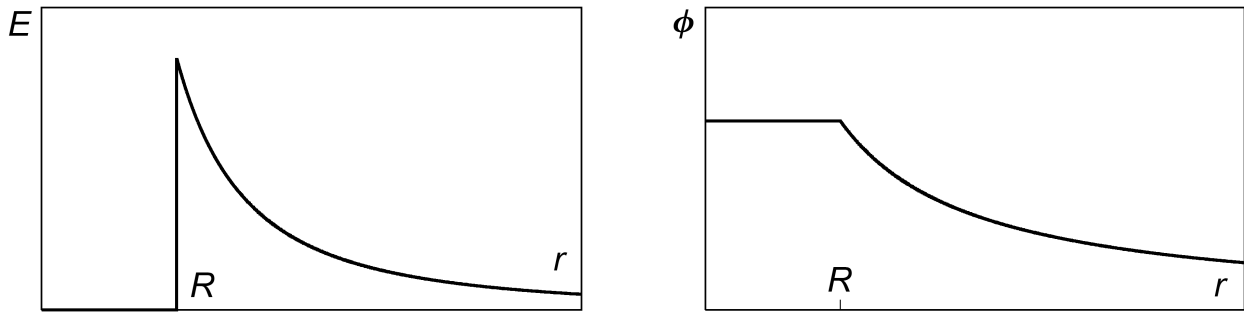


Рис. 3.1.

На рис. 3.1 изображены графики зависимости напряженности и потенциала поля от расстояния до центра однородно заряженной сферы.

### 3.1.2 Пример – поле и потенциал шара

Однородно заряженный шар. Пусть радиус шара  $R$ , полный заряд  $Q$ . Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущей задаче, получим, что вне шара напряженность и потенциал поля совпадают с полем заряда  $Q$ , помещенного в центр шара:

$$E = k\frac{Q}{r^2}, \quad \varphi = k\frac{Q}{r}.$$

Чтобы найти напряженность электрического поля внутри шара, выберем в качестве замкнутой поверхности сферу радиуса  $r < R$  с центром в центре шара. Из симметрии ясно, что напряженность поля направлена по радиусу и одинакова по величине на всей поверхности сферы. Из теоремы Гаусса следует

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi kq(r),$$

где  $q(r)$  – заряд внутри выбранной поверхности. Введем плотность заряда шара  $\rho$ . Тогда

$$q(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{и} \quad E(r) = k\frac{q(r)}{r^2} = \frac{4}{3}\rho kr.$$

Плотность заряда равна полному заряду, деленному на объем шара:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}.$$

Для напряженности поля внутри шара получим

$$E = k \frac{Q}{R^3} r.$$

Найдем потенциал внутри шара.

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r E dr = - \int_{\infty}^R k \frac{Q}{r^2} dr - \int_R^r k \frac{Q}{R^3} r dr.$$

Первый интеграл имеет смысл работы по переносу единичного положительного заряда из бесконечности до поверхности шара и равен  $kQ/R$ . Второй член

$$- \int_R^r k \frac{Q}{R^3} r dr = -k \frac{Q}{R^3} \frac{r^2}{2} + k \frac{Q}{R^3} \frac{R^2}{2}.$$

Значение потенциала внутри шара определится выражением

$$\varphi(r) = \frac{3}{2} k \frac{Q}{R} - k \frac{Q r^2}{2 R^3}.$$

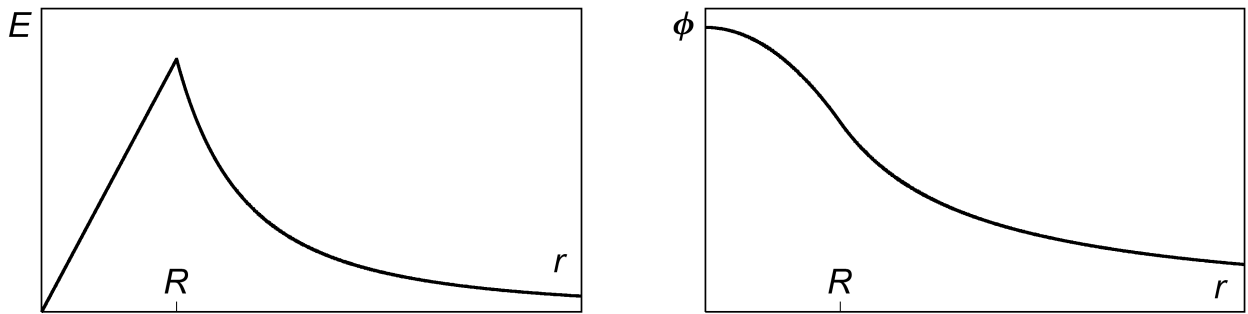


Рис. 3.2.

Окончательно имеем

$$E = k \frac{q}{r^2} \text{ при } r > R, \quad E = k \frac{Q}{R^3} r \text{ при } r < R,$$

$$\varphi = k \frac{q}{r} \text{ при } r > R, \quad \varphi = \frac{3}{2} k \frac{q}{R} - k \frac{Q}{2r^3} r^2 \text{ при } r < R.$$

Заметим, что непрерывен не только потенциал (что и должно быть), но и напряженность электрического поля. Последнее связано с тем, что в системе нет заряженных тонких поверхностей. Поэтому нет и скачка напряженности. На рис. 3.2 приведены графики зависимости напряженности и потенциала от расстояния до центра однородно заряженного по объему шара.

### 3.1.3 Пример – заземленная сфера

Пусть есть две проводящие концентрические сферы радиусов  $a$  и  $b$ . На внутреннюю сферу помещен заряд  $q$ , а внешняя заземлена (рис. 3.3). Требуется определить напряженность и потенциал электрического поля во всем пространстве.

#### Решение

Так как внешняя сфера заземлена, на ней появляется некоторый заряд  $Q$ . Если бы он был известен, напряженность поля легко определилась бы из принципа суперпозиции (напомним, что во внешнем пространстве сфера создает поле, такое же, как точечный заряд, расположенный в ее центре, а внутри поля нет)

$$E = k \frac{q + Q}{r^2} \text{ при } r > b,$$

$$E = k \frac{q}{r^2} \text{ при } a < r < b,$$

$$E = 0 \text{ при } r < a.$$

Для потенциала при  $r > b$  имеем  $\varphi = k(q + Q)/r$ . На поверхности внешней сферы  $\varphi(b) = k(q + Q)/b$ .

Так как эта сфера заземлена,  $\varphi(b) = 0$ . Отсюда

$$Q = -q.$$

Тогда напряженность поля при  $r > b$  равна нулю. Вне заземленной сферы поля нет. Этот результат не зависит от формы заземленного проводника. Говорят, что заземленная оболочка экранирует находящиеся внутри заряды: никакие изменения их величины или положения не сказываются снаружи.

Понятно, что при  $r > b$  потенциал равен нулю. Для нахождения потенциала между сферами пронесем единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку, используя принцип суперпозиции. В поле заряда  $Q$  работа совершается лишь до поверхности внешней сферы:  $\varphi_1 = kQ/b - kq/b$ . А в поле внутренней сферы  $\varphi_2 = kq/r$ . Полный потенциал

$$\varphi(r) = \varphi_1 + \varphi_2 = kq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right).$$

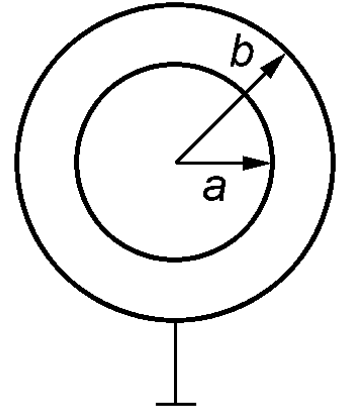


Рис. 3.3.

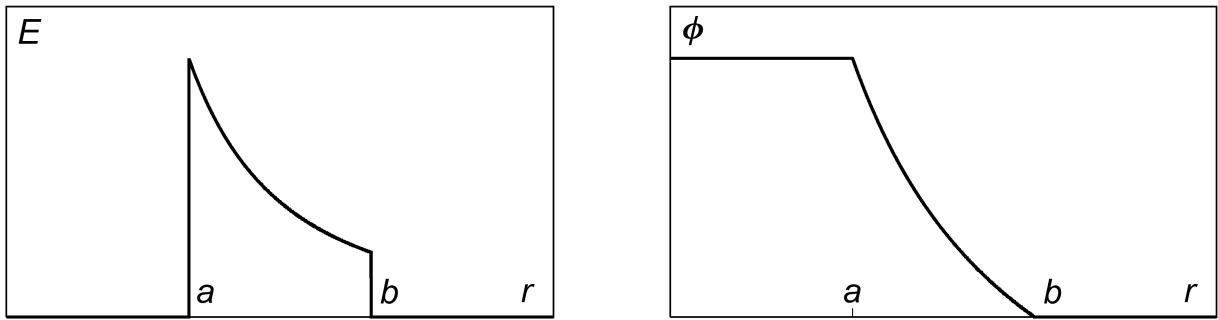


Рис. 3.4.

Внутри малой сферы  $E = 0$ , потенциал не меняется и равен потенциалу на поверхности

$$\varphi(a) = kq \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

На рис. 3.4 приведены графики зависимостей  $E(r)$  и  $\varphi(r)$ .

### 3.1.4 Пример – разлетающиеся частицы

Четыре одинаковых частицы массы  $m$  и заряда  $q$  первоначально удерживаются в углах квадрата со стороной  $a$ . Заряды отпускают. Найти скорости зарядов по прошествии большого промежутка времени.

#### Решение

Из симметрии ясно, что в любой момент времени частицы будут находиться в углах некоторого квадрата и обладать одинаковыми по величине скоростями, направленными по диагоналям этого квадрата. В результате вся начальная потенциальная энергия  $U$  перейдет в кинетическую энергию частиц

$$U = 4 \frac{mv^2}{2},$$

где  $v$  – искомая скорость.

Дело, таким образом, сводится к вычислению начальной потенциальной энергии системы  $U$ . Перенумеруем заряды (рис. 3.5) и начнем «собирать» систему. Принесем из бесконечности первый заряд. Для этого не понадобится совершать работу (внешних сил нет):  $A_1 = 0$ .

Принесем второй заряд. Работа в поле первого заряда бу-

• 1                      2 •

• 4                      3 •

$$A_2 = k \frac{q^2}{a}.$$

Рис. 3.5.

Третий заряд уже придется двигать в поле, как первого, так и второго заряда:

$$A_3 = k \frac{q^2}{a\sqrt{2}} + k \frac{q^2}{a}.$$

Наконец, для последнего

$$A_4 = k \frac{q^2}{a} + k \frac{q^2}{a\sqrt{2}} + k \frac{q^2}{a}.$$

Полная потенциальная энергия системы

$$U = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = k \frac{q^2}{a} (4 + \sqrt{2}).$$

Тогда

$$k \frac{q^2}{a} (4 + \sqrt{2}) = 4 \frac{mv^2}{2},$$

откуда получаем ответ

$$v = \sqrt{kq^2 a (4 + \sqrt{2}) / (2ma)}.$$

### 3.1.5 Пример – столкновение зарядов

С большого расстояния навстречу друг другу со скоростями, соответственно,  $v_1$  и  $v_2$  движутся две одинаковых частицы массы  $m$  и заряда  $q$ . Определите минимальное расстояние, на которое они сблизятся.

#### Решение

При минимальном расстоянии скорости частиц  $u$  будут одинаковы. Из закона сохранения импульса

$$mv_1 - mv_2 = 2mu.$$

Начальная потенциальная энергия электрического взаимодействия равна нулю.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = 2 \frac{mu^2}{2} + k \frac{q^2}{r},$$

где  $r$  – минимальное расстояние. Из первого уравнения  $u = (v_1 - v_2) / 2$ . И, подставляя во второе, получаем ответ:

$$r = \frac{4kq^2}{m(v_1^2 + v_2^2)}.$$

### 3.1.6 Пример – система конденсаторов

Определите емкость системы конденсаторов, изображенных на рисунке (рис. 3.6).

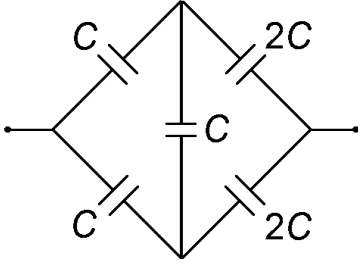


Рис. 3.6.

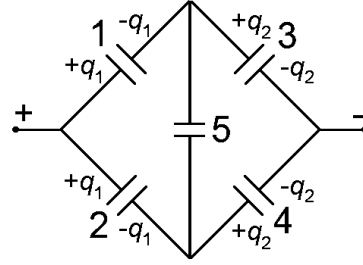


Рис. 3.7.

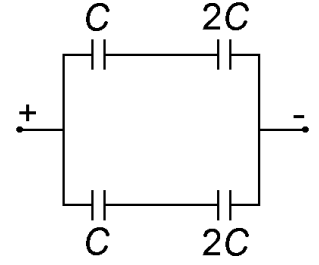


Рис. 3.8.

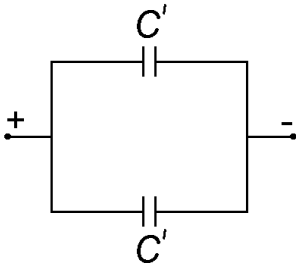


Рис. 3.9.

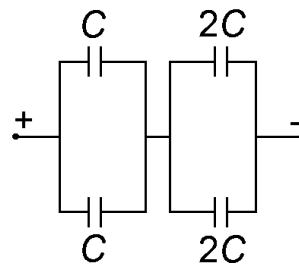


Рис. 3.10.

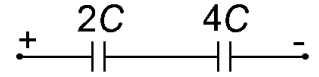


Рис. 3.11.

### Решение

Пронумеруем конденсаторы и обозначим на схеме заряды (рис. 3.7). Из симметрии схемы ясно, что заряды на конденсаторах 1, 2 и 3, 4, соответственно, одинаковы. Так как батарея электронейтральна  $q_1 = q_2$ .

Тогда ясно, что средний (5-й) конденсатор не заряжен и его можно убрать. Эквивалентная схема будет выглядеть так: (рис 3.8).

Так как емкость последовательно соединенных конденсаторов определяется по формуле

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C}.$$

Отсюда  $C' = \frac{2}{3}C$ . И имеем новую эквивалентную схему (рис. 3.9). По правилу определения емкости параллельно соединенных конденсаторов полная емкость цепи:

$$C_0 = C' + C' = \frac{4}{3}C.$$

Можно было поступить иначе. Так как средний конденсатор не заряжен, точки, к которым он подсоединен, имеют одинаковый потенциал. Тогда их можно соединить проводником: это не приведет к перераспределению зарядов на



остальных конденсаторах. Соответствующая эквивалентная схема (рис. 3.10). Или, учитывая, что имеется две пары параллельно соединенных конденсаторов, получаем еще одну эквивалентную схему (рис. 3.11). Отсюда

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{4C}.$$

В итоге получаем тот же ответ:

$$C_0 = \frac{4}{3}C.$$

## 3.2 Постоянный ток

### 3.2.1 Пример – соединение сопротивлений

Каким должно быть сопротивление  $r$ , чтобы входное сопротивление между клеммами было равно тоже  $r$  (рис. 3.12)?

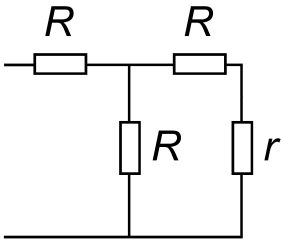


Рис. 3.12.

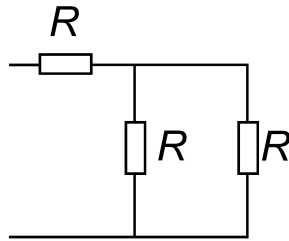


Рис. 3.13.

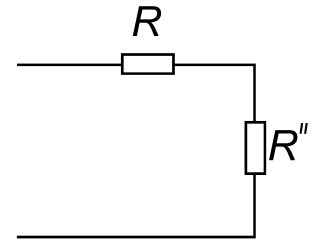


Рис. 3.14.

#### Решение

Последние два сопротивления, соединенные последовательно, имеют сопротивление

$$R' = R + r.$$

Тогда имеем эквивалентную схему: (рис. 3.13)). Параллельное соединение сопротивлений  $R$  и  $R'$  приводит к схеме (рис. 3.14)). Где

$$R'' = \frac{RR'}{R + R'} = \frac{R(R + r)}{2R + r}.$$

По условию:  $R + R'' = r$ .

То есть:

$$R \left( 1 + \frac{R + r}{2R + r} \right) = r.$$

Откуда получаем **ответ**

$$r = R\sqrt{3}.$$

### 3.2.2 Пример – ЭДС и внутреннее сопротивление батареи

Батарея, замкнутая на сопротивление  $R_1 = 10$  Ом, дает ток  $I_1 = 3$  А; замкнутая на сопротивление  $R_2 = 20$  Ом, она дает ток  $I_2 = 1,6$  А. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление  $r$  батареи.

#### Решение

Из условия

$$E = I_1(R_1 + r), \quad E = I_2(R_2 + r).$$

Приравнивая правые части, получим

$$I_1 R_1 + I_1 r = I_2 R_2 + I_2 r.$$

Откуда

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} = 1,43 \text{ Ом.}$$

Подставляя  $r$  в первое уравнение, получим

$$E = \frac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_1 - I_2} = 34,3 \text{ В.}$$

### 3.2.3 Пример – внутреннее сопротивление аккумулятора

Аккумулятор подключен один раз к внешней цепи с сопротивлением  $R_1$ , другой раз – с  $R_2$ . При этом количество теплоты, выделяющейся во внешней цепи в единицу времени, одинаково. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

#### Решение

Обозначим ЭДС аккумулятора через  $E$ , а внутреннее сопротивление – через  $r$ .

$$E = I_1(R_1 + r), \quad E = I_2(R_2 + r).$$

Условие равенства количества теплоты дает:

$$I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2.$$

Или

$$\frac{E^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{E^2 R_2}{(R_2 + r)^2}.$$

Разрешая это уравнение относительно  $r$ , получим **ответ**:

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

### 3.2.4 Пример – цепь с конденсаторами

Конденсаторы емкости  $C_1$  и  $C_2$  и резисторы, сопротивления которых равны  $R_1, R_2, R_3$ , включены в электрическую цепь, как показано на рисунке 3.15). Найти установившиеся заряды на конденсаторах. Напряжение  $U$  известно.

#### Решение

В установившемся режиме через резисторы течет постоянный ток, определяющийся из уравнения

$$U = I(R_1 + R_2 + R_3).$$

Рассмотрим контур, содержащий  $C_1, R_1, R_2$ . Для него:

$$\frac{q_1}{C_1} - I(R_1 + R_2) = 0.$$

Откуда (подставляя  $I$ ):

$$q_1 = \frac{UC_1(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Аналогично, рассматривая контур, содержащий  $C_2, R_2, R_3$ , получим

$$q_2 = \frac{UC_2(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

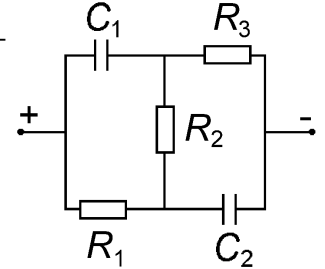


Рис. 3.15.

## 3.3 Магнитное поле

### 3.3.1 Пример – движение заряда в магнитном поле

На заряд  $q = 1$  Кл, движущийся со скоростью  $v = 1$  м/с, в магнитном поле действует сила  $F = 10$  Н. Заряд движется под углом  $\alpha = 30^\circ$  к направлению индукции магнитного поля. Чему равна индукция этого поля?

#### Решение

На заряд действует сила Лоренца:

$$F = qvB \sin \alpha.$$

Откуда  $B = F/(qv \sin \alpha)$ . Подставляя числа, получим ответ:  $B = 20$  Тл.

### 3.3.2 Пример – проводник с током в магнитном поле

В вертикальном однородном магнитном поле на двух тонких нитях подвешен горизонтально проводник массы  $m = 0,16$  кг и длины  $l = 0,8$  м. Концы проводника при помощи гибких проводов, находящихся вне поля, подсоединены

к источнику тока. Найдите угол, на который отклоняются от вертикали нити подвеса, если по проводнику течет ток  $I = 2$  А, а индукция магнитного поля  $B = 1$  Тл.

### Решение

На проводник действуют две силы: тяжести  $mg$ , направленная вертикально, и Ампера  $IBl$ , направленная горизонтально (см. рис. 3.16). Тогда в равновесии

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{IBl}{mg}.$$

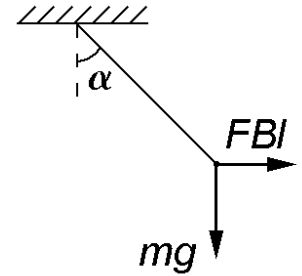


Рис. 3.16.

Принимая  $g = 10$  м/с<sup>2</sup> и подставляя числа, получим  $\operatorname{tg}\alpha = 1$ . Откуда  $\alpha = 45^\circ$ .

### 3.3.3 Пример – радиусы траекторий

Как относятся радиусы траекторий двух электронов с кинетической энергией  $K_1$  и  $K_2$ , если однородное магнитное поле перпендикулярно их скорости?

### Решение

Скорости электронов определяются из формул:

$$K_1 = \frac{mv_1^2}{2}, \quad K_2 = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Радиусы определяются из закона Ньютона

$$ev_1B = \frac{mv_1^2}{R_1}, \quad ev_2B = \frac{mv_2^2}{R_2}.$$

Тогда отношение радиусов

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}.$$

## 3.4 ЭДС индукции

### 3.4.1 Пример – падение в магнитном поле

В однородном магнитном поле индукции  $B$  находятся две вертикальные рейки, расположенные в плоскости, перпендикулярной линиям поля (рис. 3.17). По рейкам, расстояние между которыми равно  $L$ , может скользить без трения проводник массой  $m$ . Определите установившуюся скорость этого проводника, если верхние концы реек замкнуты на сопротивление  $R$ . В какие виды энергии переходит работа силы тяжести?

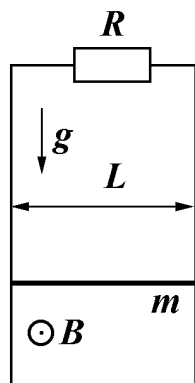


Рис. 3.17.

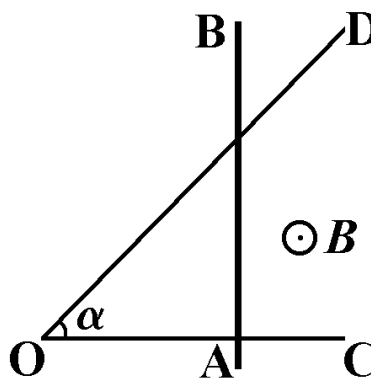


Рис. 3.18.

**Решение**

На скользящий проводник действуют две силы: тяжести  $mg$  и Ампера  $IBL$ . При установившемся движении

$$mg - IBL = 0.$$

ЭДС индукции

$$E_{\text{инд}} = vBL = IR.$$

Выражая ток из второго уравнения и подставляя в первое, получим **ответ**:

$$v = \frac{mgR}{B^2 L^2}.$$

Можно получить ответ другим способом. Мощность силы тяжести в установившемся режиме переходит в тепло, выделяющееся на сопротивлении:

$$mgv = I^2 R.$$

**3.4.2 Пример – стержень в магнитном поле**

Металлический стержень  $AB$ , сопротивление единицы длины которого  $\rho$ , движется с постоянной скоростью  $v$ , перпендикулярной  $AB$ , замыкая два идеальных проводника  $OC$  и  $OD$ , образующих друг с другом угол  $\alpha$ . Длина  $OC$  равна  $l$ , и  $AB$  перпендикулярен  $OC$  (рис. 3.18). Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле индукции  $B$ , перпендикулярном плоскости системы. Найдите полное количество теплоты, которое выделится в цепи за время движения стержня от точки  $O$  до точки  $C$ .

**Решение**

Площадь треугольника в зависимости от времени  $S = xy/2$ , где  $x = vt$ ,  $y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha = vt \cdot \operatorname{tg}\alpha$ .

Тогда

$$E_{\text{инд}} = B \frac{\Delta S}{\Delta t} = v^2 B t \cdot \text{tg} \alpha.$$

Сопротивление  $R = \rho x = \rho v t$ . Мощность, выделяющаяся в цепи

$$N = \frac{E_{\text{инд}}^2}{R} = \frac{v^3 B^2 t \cdot \text{tg} \alpha}{\rho}.$$

Полное время движения  $t_0 = l/v$ .

Тогда **ответ**

$$Q = \frac{v B^2 l^2 \cdot \text{tg} \alpha}{2\rho}.$$

### 3.4.3 Пример – вихревое электрическое поле

Индукция однородного магнитного поля внутри цилиндра радиуса  $r = 0,1$  м линейно возрастает со временем:  $B = \alpha t$  (коэффициент  $\alpha = 10^{-3}$  Тл/с). Магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра. Чему равна напряженность вихревого электрического поля на расстоянии  $l = 0,2$  м от оси цилиндра?

**Решение**

Циркуляция электрического поля равна скорости изменения магнитного потока через сечение цилиндра:

$$E \cdot 2\pi l = \pi r^2 \alpha.$$

Отсюда

$$E = \frac{\alpha r^2}{2l}.$$

Подставляя числа:  $E = 2,5 \cdot 10^{-5}$  В/м.