Методические указания. Механика

19 февраля 2007 г.

Оглавление

Глава 1

Механика

1.1 Кинематика

1.1.1 Время и расстояние

Основная единица времени – **секунда**. В эталонных часах, использующих излучение атомов цезия, секунда определяется как 9192631770 периодов колебаний излучения. Предыдущее астрономическое определение секунды (1/86400 доля суток) очень близко к современному, но неудобно для использования, так как длительность суток изменяется из-за неравномерности вращения Земли. Сейчас дважды в год астрономическое время корректируется по атомным часам: добавляется недостающая или вычитается лишняя секунда.

На Генеральной конференции мер и весов в 1983 году метр определен как расстояние, которое свет проходит за 1/299792458 долю секунды. В пределах точности это определение совпадает с более ранним (эталонная "линейка").

1.1.2 Системы отсчета. Координаты

Чтобы описать движение, нужно указывать положение тел. Проще всего это сделать для тел малых размеров. Тела, размерами которых при описании движения можно пренебречь, называют **материальными точками**.

Для указания положения и описания движения тел и частиц специально выбирают одно из тел. Его называют **телом отсчета**. Все измерения проводятся от выбранного тела отсчета.

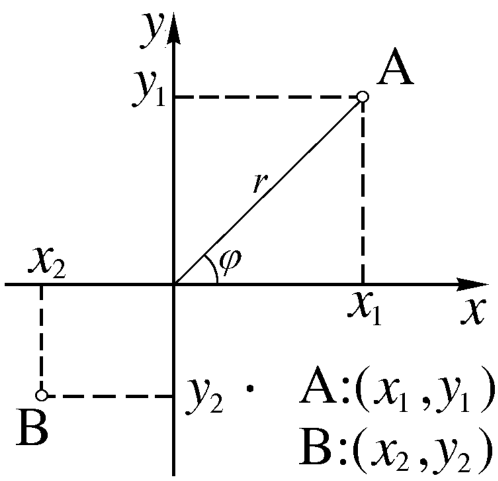

Рис. 1.1.

Декартовы координаты. На плоскости из выбранного начала отсчета O проводятся под прямым углом две **координатные оси** X и Y (рис. 1.1). Из интересующей нас точки опускаются перпендикуляры на оси и прочитываются на них координаты x и y. Координаты точки принято записывать в круглых скобках числами через запятую: (x, y).

Расстояние r от начала отсчета до частицы определяется из теоремы Пифагора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

При координатах двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) расстояние между ними

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ .$$

Отношение координат y/x дает тангенс угла, под которым видна точка из начала отсчета O по отношению к оси X (рис. 1.1):

$$\mathrm{tg}\varphi = y/x \ .$$

Числа r , φ – это **полярные координаты** точки. В физике удобнее работать с углами не в градусной, а в **радианной мере**. Из вершины угла описывают окружность и задают величину угла отношением длины отсекаемой дуги к радиусу (рис. 1.2):

$$\varphi = s/r \ .$$

Другими словами, угол в радианной мере – это число, показывающее, во сколько раз дуга длиннее радиуса: $s = \varphi r$.

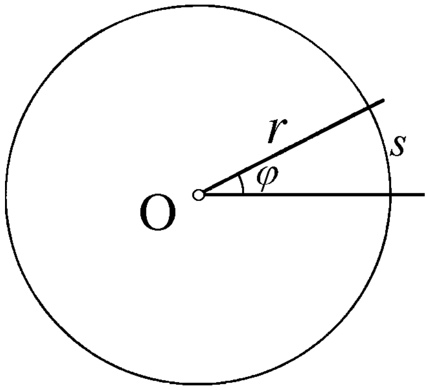

Рис. 1.2.

В пространстве из начала отсчета выходят три взаимно перпендикулярных координатных оси X, Y и Z. Через точку проводятся три плоскости, перпендикулярные осям. Их пересечения с осями и задают координаты частицы (x, y, z).

Расстояние от начала координат до выбранной точки дается выражением

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ .$$

Расстояние между двумя точками в пространстве определяется формулой:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \ .$$

1.1.3 Векторы

Положение точки можно задать и направленным отрезком (вектором). **Радиус-вектор** частицы проводится из начала координат в точку M, где находится частица. Радиус-вектор $\vec{r}$ указывает, в каком направлении и на каком расстоянии от начала отсчета находится точка. Векторы при записи выделяются стрелкой сверху или черточкой (в книгах – жирным шрифтом: $\vec{r} \equiv \boldsymbol{r}$).

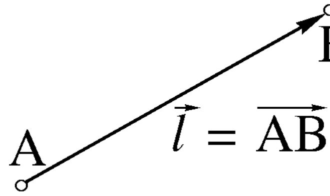

Рис. 1.3.

Если частица перешла из точки A в точку B, то изменение ее положения называется **перемещением** и описывается направленным отрезком $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{AB}$ (рис. 1.3). Частица не обязательно двигалась от A к B по прямой. При любых промежуточных этапах перемещение от начальной точки A до конечной точки B однозначно задается вектором $\boldsymbol{AB}$.

Результат последовательных перемещений, переводящих частицу из точки A в точку B, а затем в точку C, таков же, как и одного перемещения из точки A сразу в C. Значит, векторы перемещения можно складывать:

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} .$$

Чтобы сложить два вектора, в конец первого слагаемого $\boldsymbol{AB}$ переносим начало второго слагаемого $\boldsymbol{BC}$. Замыкающая стрелка от начала первого к концу второго вектора дает сумму $\boldsymbol{AC}$. Такое правило сложения векторов называется **правилом треугольника**. Складывать можно не только перемещения, но и любые другие векторы (скорости, силы...) Правило сложения обобщается на случай любого числа слагаемых: они выстраиваются в ломаную линию, каждое последующее слагаемое откладывается от конца предыдущего. Вектор, проведенный из начала в конец этой ломаной линии, дает сумму (рис. 1.4).

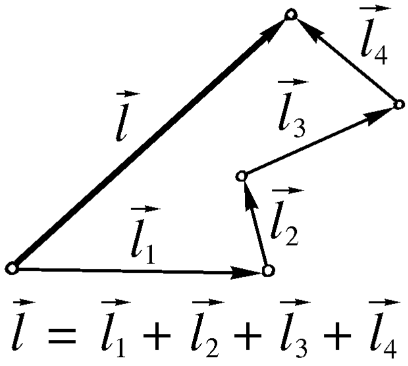

Рис. 1.4.

Вектор $-\boldsymbol{l}$ противоположен по направлению вектору $\boldsymbol{l}$. **Разность** векторов $\boldsymbol{l}_2 - \boldsymbol{l}_1$ определяется как сумма $\boldsymbol{l}_2$ и $-\boldsymbol{l}_1$:

$$\boldsymbol{l}_2 - \boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l}_2 + (-\boldsymbol{l}_1) ,$$

то есть, чтобы вычесть вектор, прибавляем его с противоположным знаком.

1.1.4 Прямолинейное движение. Скорость. Ускорение

Простейшее движение – вдоль прямой. При этом изменяется координата тела x в зависимости от времени t, что записывается кратко в виде:

$$x = x(t) .$$

Средней скоростью на промежутке времени от t_1 до t_2 называется отношение перемещения к интервалу времени:

$$\langle v \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} , \text{ или } \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} , \text{ или } \frac{\Delta x}{\Delta t} . \tag{1.1}$$

При стремлении интервала времени и перемещения к нулю в пределе получается мгновенная скорость:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) . \tag{1.2}$$

Здесь lim обозначает предел (сокращенное limit) выражения в скобках при Δt, стремящемся к нулю.

Более компактно мгновенную скорость принято записывать так:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \tag{1.3}$$

Обозначения dx и dt можно понимать как бесконечно малые изменения координаты и времени. Операция (1.3), или, что то же, (1.2), называется вычислением **производной** $v(t)$ для функции $x(t)$, или **дифференцированием** координаты по времени. Малые приращения dx и dt называют **дифференциалами** (от иностранного слова difference).

Ускорение – это скорость изменения скорости:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \qquad \text{или} \qquad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \ . \tag{1.4}$$

От координаты получается вторая производная (производная от производной).

1.1.5 Пример – квадратичная зависимость

Пусть $x = k \cdot t^2$, где k – постоянный коэффициент. Тогда, опуская знак предела везде, кроме последнего равенства, получим

$$v(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{k\cdot(t+\Delta t)^2 - k\cdot t^2}{\Delta t} = \frac{2kt\Delta t + k\Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(2kt + k\Delta t) \ .$$

Теперь устремляем Δt к нулю:

$$v(t) = 2kt \, .$$

Выражение уже не содержит никакого интервала и зависит только от одного времени t. Это и есть мгновенная скорость для данной зависимости $x(t)$. Заметим, что сначала надо вычислить и по возможности упростить выражение, а уж потом переходить к пределу. Если, наоборот, сразу положить $\Delta t = 0$, получится неопределенность 0/0.

Ускорение в этом примере

$$a = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{2k(t+\Delta t) - 2kt}{\Delta t} = 2k \, ,$$

то есть постоянно.

1.1.6 Правила дифференцирования

Производная от постоянной величины равна нулю: $\dfrac{dC}{dt} = 0$.

Производная суммы функций равна сумме производных: $\dfrac{d}{dt}(f+g) = \dfrac{df}{dt} + \dfrac{dg}{dt}$.

Производная произведения: $\dfrac{d}{dt}(fg) = f\cdot\dfrac{dg}{dt} + g\cdot\dfrac{df}{dt}$.

В частности, для произведения функции на постоянную величину $\dfrac{d}{dt}(Cf) = C\dfrac{df}{dt}$.

Производная частного: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g}\cdot\dfrac{df}{dt} - \dfrac{f}{g^2}\cdot\dfrac{dg}{dt}$.

Производная сложной функции: $\dfrac{d}{dt}f(g(t)) = \dfrac{df}{dg}\cdot\dfrac{dg}{dt}$.

Производные от наиболее важных функций (величины n, ω, k постоянны):

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1} \ .$$

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega \cdot \cos(\omega t)\ , \quad \frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega \cdot \sin(\omega t)\ .$$

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega \cdot \cos(\omega t)\ , \quad \frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega \cdot \sin(\omega t)\ .$$

$$\frac{d}{dt}\exp(kt) = k \cdot \exp(kt)\ , \quad \frac{d}{dt}\ln(kt) = \frac{1}{t}\ .$$

Пользуясь таблицей и правилами дифференцирования, можно найти производные от любой комбинации указанных функций.

1.1.7 Графическое представление движения

На рисунке 1.5 приведен график зависимости положения частицы от времени, то есть график функции $x(t)$. Он гораздо нагляднее, чем таблица или формула.

Видно, например, что на интервале времени от 1 до 3,5 с координата растет. Значит, в течение этого промежутка частица удаляется от начала координат. Затем виден участок (3,5 $\div$ 6 с), на котором координата постоянна. Значит, на некоторое время частица остановилась. Уменьшение координаты (участок 6 $\div$ 7 с) означает, что частица двинулась назад.

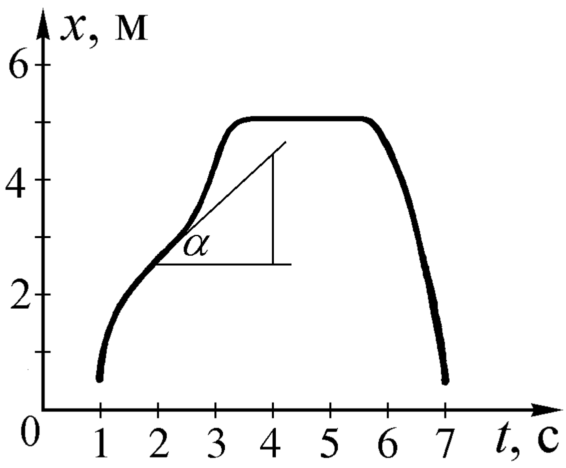

Рис. 1.5.

Геометрически мгновенная скорость – это тангенс угла между **касательной** к непрерывной кривой $x(t)$ и осью t. Короче можно говорить просто «наклон» вместо «тангенс угла наклона касательной».

1.1.8 Пример

В момент времени $t = 2$ с к графику проведена касательная. Измерив катеты треугольника, изображенного на рисунке, получаем $\mathrm{tg}\alpha = 1{,}9/2 = 0{,}95$ м/с.

Совершенно так же по графику скорости $v(t)$ находится ускорение. Наклон касательной к графику скорости – это и есть ускорение в данный момент времени.

1.1.9 Движение в пространстве

Основные формулы

Траектория есть линия, описываемая частицей при движении в пространстве. Ускорение частицы при движении по кривой траектории можно разложить на две взаимно перпендикулярные компоненты: **центростремительное** a_c (перпендикулярное вектору скорости $\boldsymbol{V}$) и **тангенциальное** a_τ (параллельное скорости, и, значит, траектории в данной точке). Выполняются равенства

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}\ , \quad a_c = \frac{V^2}{R}\ ,$$

где R – **радиус кривизны** траектории в данной точке.

1.1.10 Пример

Определим радиус кривизны траектории тела, брошенного под углом α к горизонту, в верхней и начальной точках. В верхней точке траектории скорость равна $v_0 \cos\alpha$ и направлена горизонтально (вертикальная составляющая скорости обращается в нуль). Ускорение g перпендикулярно скорости, то есть в этой точке все ускорение – чисто центростремительное. Тогда можно записать: $g = (v_0 \cos\alpha)^2/R$, откуда радиус кривизны траектории:

$$R = \frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{g} \,.$$

В начальной точке центростремительная, перпендикулярная скорости составляющая ускорения $a_\text{C} = g\cos\alpha$, а скорость равна v_0. Имеем: $g\cos\alpha = v_0^2/R_0$, и радиус кривизны

$$R_0 = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} \,.$$

Этот радиус больше R, то есть траектория в начальной точке менее «кривая». Тангенциальное ускорение в начальной точке $a_\tau = -g\sin\alpha$. Оно отрицательно, то есть величина скорости в этот момент уменьшается.

1.2 Динамика

1.2.1 Сила. Законы Ньютона

Основные понятия и формулы

Между физическими телами существуют взаимодействия, количественно характеризуемые **силами**.

Первый закон Ньютона: в инерциальной системе отсчета тело, на которое нет внешних воздействий, движется равномерно и прямолинейно (в частности, может и покоиться).

Второй закон Ньютона:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \,.$$

Здесь m – масса тела, $\boldsymbol{a}$ – его ускорение, $\boldsymbol{F}$ – векторная сумма сил, действующих на тело.

Третий закон Ньютона: при взаимодействии двух тел (допустим, 1 и 2) силы их взаимодействия противоположны,

$$\boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{F}_{21} \,.$$

Второй и третий законы Ньютона позволяют определять действующие силы по известному движению. Так были найдены силы тяготения, упругости, трения и пр. Полученные закономерности применяют для определения движения тел в новых условиях.

1.2.2 Пример – силы взаимодействия

Пусть бруски масс m_1 и m_2 соприкасаются, и первый брусок толкают с заданной силой F (рис. 1.6).

Тела, как известно из опыта, могут двигаться вместе, сохраняя соприкосновение. Для такого движения найдем ускорение a, одинаковое для обоих тел. Из второго закона Ньютона

$$(m_1 + m_2)a = F\,; \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2}\,.$$

На тело m_2 действует пока неизвестная сила F_{12} со стороны первого. Записываем второй закон Ньютона:

$$m_2 a = F_{12}\,; \quad F_{12} = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}\,.$$

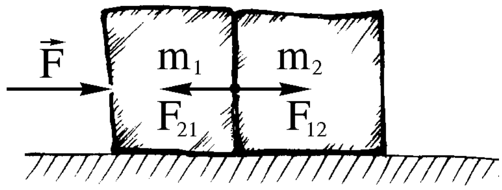

Рис. 1.6.

На тело m_1 действует известная сила F и сила со стороны второго тела F_{21}. Значит, равнодействующая сил, приложенных к m_1, равна $F - F_{21}$. Тогда

$$m_1 a = F - F_{21}\,; \quad F_{21} = F - m_1 a = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}\,.$$

По третьему закону Ньютона $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$. Видим, что это равенство выполняется: силы F_{21} и F_{12} одинаковы по величине и направлены в противоположные стороны (см. рис. 1.6). При этом совершенно не существенно, как взаимодействуют тела (сколько точек соприкосновения, каковы упругие свойства материалов и т.д.). Все, что нам понадобилось – второй и третий законы Ньютона и тот опытный факт, что тела могут ускоряться вместе, сохраняя соприкосновение. Тела могли бы быть склеены или вообще быть частями единого тела.

1.2.3 Пример – силы при криволинейном движении

Рассмотрим движение по окружности, когда известно центростремительное ускорение тела. Пусть автомобиль с массой $m = 2000$ кг проезжает по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны $R = 40$ м, со скоростью $v = 36$ км/час (10 м/с). С какой силой автомобиль давит на мост в его середине?

Центростремительное ускорение $a = v^2/R = 10^2/40 = 2,5$ м/с^2. Вектор ускорения направлен вниз. На автомобиль действует сила тяжести mg и сила со стороны моста (сила реакции) N. Из уравнения движения $ma = mg - N$, откуда $N = m(g - a) = 2000 \cdot 7,5 = 15000$ Н. По третьему закону Ньютона, автомобиль давит на мост с силой, противоположной N, то есть равной по величине и направленной вниз. Заметим, что неподвижный автомобиль давил бы с силой $mg = 20000$ Н, то есть заметно сильнее. Если еще увеличить скорость, давление может уменьшиться до нуля. Отрицательным оно не станет, так как автомобиль оторвется от моста.

1.2.4 Пример – задача о блоке

Разберем задачу, которая позволяет понять, как следует применять законы Ньютона. Пусть две массы m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок (рис. 1.7). «Неподвижный» значит только, что **ось** блока закреплена, но вращается на оси он свободно. Масса блока пренебрежимо мала. Надо найти движение этой системы, то есть ускорения тел. Удобен стандартный порядок решения задач:

1. Сначала **изображаются силы**, действующие на каждое тело. В данном случае на m_1 действует сила тяжести m_1g и сила натяжения нити T. На m_2 действует m_2g и T. Мы считаем, что натяжение одинаково вдоль всей нити. Это следует из ее нулевой массы и из того, что блок не оказывает сопротивления вращению.

2. Затем необходимо **записать уравнения движения**, то есть второй закон Ньютона для каждого тела. Если выбрать за положительное направление вниз, то уравнения движения имеют вид

$$m_1g - T = m_1a_1 \ , \quad m_2g - T = m_2a_2 \ .$$

Здесь не нужно заранее указывать, какое тело двигается вниз, а какое – вверх. При правильном решении нужное направление получится автоматически, оно определится знаком ускорения.

В двух уравнениях три неизвестных: a_1, a_2 и T. Нужно еще одно уравнение. Оно находится из взаимосвязи ускорений тел.

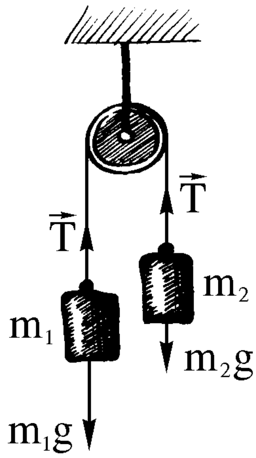

Рис. 1.7.

3. Поскольку уравнений движения недостаточно, необходимо выписать **уравнения связей**. Используем нерастяжимость нити. Если масса m_1 опустилась на 1 м, то на столько же должна подняться масса m_2. Модули смещений одинаковы. Но тогда одинаковы модули скоростей и ускорений. По направлению же ускорения тел противоположны. Следовательно, недостающее уравнение имеет вид

$$a_1 = -a_2 \ .$$

4. Когда полная система уравнений получена, ее нужно **решить**. Для этого можно исключать по очереди неизвестные или использовать другие приемы. В данном случае вместо a_2 подставляем $-a_1$:

$$m_1g - T = m_1a_1 \quad ,$$

$$m_2g - T = -m_2a_1 \ .$$

Теперь вычтем из верхнего уравнения нижнее:

$$m_1g - m_2g = m_1a_1 + m_2a_1 \ ,$$

откуда

$$a_1 = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \ .$$

Найдем еще натяжение:

$$T = m_1(g - a_1) = g \cdot \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} \ .$$

5. Очень важно **проанализировать результаты**. Прежде всего полезно проверять размерность. В приведенном решении размерность правильная – ускорения записаны

как g, умноженное на безразмерный коэффициент; сила имеет размерность массы, умноженной на ускорение. Если размерность ответа неверна, наверняка в решении есть ошибка.

Далее важно проверить, не противоречит ли полученное решение здравому смыслу. В данной задаче, если получается, например, отрицательное натяжение или ускорение какого-то тела оказалось (при некоторых значениях масс) больше g, надо пересмотреть решение и найти ошибку. Полученный ответ выдерживает такую проверку: всегда (при любых положительных массах) $T > 0$, а ускорения не превышают по абсолютной величине g. Это легко понять – нить всегда тянет вверх и замедляет падение.

Важным элементом анализа ответа является рассмотрение предельных случаев. В нашем решении можно положить, например, $m_1 = m_2 = m$. Тогда массы должны находиться в равновесии. Это выполняется (получается $a_{1,2} = 0,\ T = mg$). Если одна из масс нулевая, вторая должна падать свободно, с ускорением g. Это выполняется (положим $m_1 = 0$), что тоже убеждает в правильности результата. Примерно тот же результат будет, если масса m_1 не нулевая, но просто очень мала. При $m_1 > m_2$ ускорения $a_1 > 0,\ a_2 < 0$, то есть тяжелое тело опускается, легкое – поднимается.

Анализ не только служит проверкой, но и помогает лучше понять результат, а иногда и заметить какие-то его особенности. В данной задаче, например, сила, действующая на подвес блока и равная $2T$, меньше суммарной силы тяжести, действующей на тела (если массы не равны). Покажите это самостоятельно. Попробуйте объяснить физический смысл этого условия.

1.2.5 Пример – наклонная плоскость

Рассмотрим тело, которое положили на наклонную плоскость (рис. 1.8). Пусть задан коэффициент трения μ тела о плоскость и угол наклона φ плоскости. Требуется найти, будет ли тело соскальзывать, и если будет, то с каким ускорением.

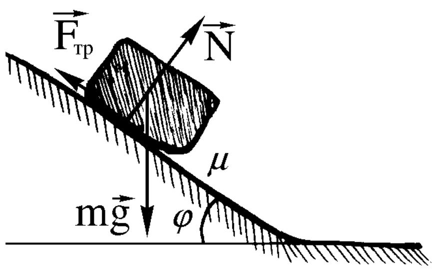

Рис. 1.8.

На тело действует сила тяжести mg, направленная вниз, сила нормального давления N, перпендикулярная плоскости, и сила трения $F_{\text{тр}}$, направленная вдоль плоскости вверх. Удобно ввести систему координат с осью X вдоль плоскости и осью Y перпендикулярно ей. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти направления:

$$
\begin{aligned}
ma &= mg\sin\varphi - F_{\text{тр}} \quad &&(\text{ось X})\ ,\\
0 &= N - mg\cos\varphi \quad &&(\text{ось Y})\ .
\end{aligned}
$$

Здесь учтено, что ускорение тела в направлении Y равно нулю. Скатывающая сила $mg\sin\varphi$ – это проекция силы тяжести на ось X, а величина $mg\cos\varphi$ – это проекция силы тяжести на ось Y.

Из второго уравнения находится сила нормального давления:

$$
N = mg\cos\varphi\ .
$$

Остается найти движение вдоль плоскости. Возможны два варианта: тело либо скользит вниз, либо лежит неподвижно. В этом легко убедиться, положив монету на книгу и изменяя наклон. Рассмотрим оба случая.

1. Пусть тело скользит вниз. Тогда известна сила трения

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m g \cos\varphi \ ,$$

и из уравнения движения по оси X находим ускорение a:

$$a = g \cdot (\sin\varphi - \mu\cos\varphi) \ .$$

2. Предположим, что тело покоится. Тогда известно ускорение:

$$a = 0 \ ,$$

и из уравнения движения находим силу трения:

$$F_{\text{тр}} = m g \sin\varphi \ .$$

Сила трения в этом случае уравновешивает скатывающую силу.

Какой же из вариантов выбрать? Это должно следовать из условий задачи. Необходимо определить, при каких условиях реализуется первый вариант, а при каких – второй.

Рассмотрим случай покоя. Найденная сила трения $F_{\text{тр}} = mg\sin\varphi$ не должна превышать максимального значения $\mu N = \mu m g\cos\varphi$, при котором наступает проскальзывание. Неравенство

$$mg\sin\varphi \le \mu m g\cos\varphi, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\varphi \le \mu$$

выполняется для углов, не превышающих так называемого предельного угла, или угла трения $\varphi_{\text{тр}}$:

$$\operatorname{tg}\varphi_{\text{тр}} = \mu \ .$$

Если угол наклона плоскости меньше угла трения, тело покоится. Если же угол больше, оно скользит вниз.

Таким образом, результат задачи следует записать так:

$$\begin{array}{lll} a = g(\sin\varphi - \mu\cos\varphi), & F_{\text{тр}} = \mu m g\cos\varphi & \text{при} \quad \operatorname{tg}\varphi \ge \mu \ , \\ a = 0, & F_{\text{тр}} = m g\sin\varphi & \text{при} \quad \operatorname{tg}\varphi \le \mu \ . \end{array}$$

Можно было проанализировать и вариант скольжения. Для него ускорение a должно быть положительным. Это дает то же самое условие выполнения варианта: $\operatorname{tg}\varphi \ge \mu$.

При угле, равном углу трения, оба решения, конечно, совпадают: $a = 0, \quad F_{\text{тр}} = mg\sin\varphi_{\text{тр}} = \mu m g\cos\varphi_{\text{тр}}$. На практике трение скольжения может быть несколько меньше трения покоя, так что тело может лежать на плоскости, но если его толкнуть, будет двигаться вниз с небольшим ускорением. Подберите такой режим на опыте. Убедитесь, что он получается в узком интервале углов наклона.

1.3 Работа и энергия

1.3.1 Пример – подпрыгивающий мячик

С какой скоростью, направленной вниз, надо бросить мячик с высоты h, чтобы после удара о пол мячик поднялся на высоту $2h$?

Начальная потенциальная энергия мячика mgh, кинетическая – $mv^2/2$, где v – искомая скорость. После отскока в верхней точке энергия равна $mg \cdot 2h$. Закон сохранения энергии:

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = 2mgh.$$

Откуда $v = \sqrt{2gh}$.

1.3.2 Пример – связанные грузы

Два груза массы m_1 и m_2 ($m_1 \geq m_2$) связаны нитью, переброшенной через неподвижный блок. В начальный момент первый груз удерживают на высоте h над полом. Затем его без толчка отпускают. Какое количество теплоты выделится при ударе первого груза о пол?

Решение

Закон сохранения механической энергии дает

$$m_1gh - m_2gh = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}.$$

Кинетическая энергия первого тела при абсолютно неупругом ударе перейдет целиком в тепло Q. Тогда

$$Q = \frac{m_1v^2}{2}.$$

Выражая v^2 из первого уравнения и подставляя во второе, получим **ответ**:

$$Q = \frac{m_1(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2}.$$

1.3.3 Пример – скорость снаряда

Сила, действующая на снаряд массы m в стволе орудия, нарастает равномерно от нуля до F_0 на участке ствола длины l_1, не меняется на участке ствола длины l_2 и, наконец, равномерно уменьшается до нуля на участке ствола длины l_3. Какова скорость снаряда при вылете из ствола? (Рис. 1.9)

Из закона сохранения энергии следует, что работа силы действующей на заряд перейдет в его кинетическую энергию.

$$\frac{mv^2}{2} = A.$$

Работу найдем как площадь под графиком функции силы от смещения.

$$A = F_0l_1/2 + F_0l_2 + F_0l_3/2.$$

Окончательно получаем $v = \sqrt{\frac{F_0l_1 + 2F_0l_2 + F_0l_3}{m}}$.

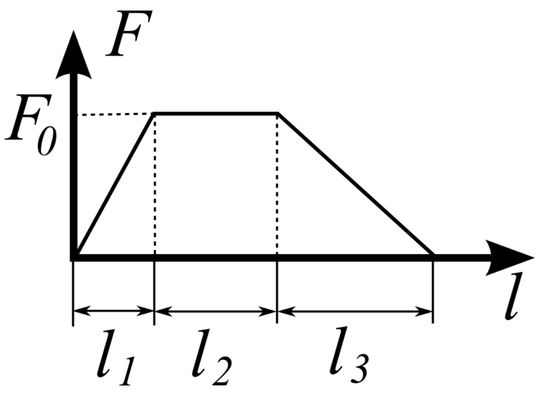

Рис. 1.9.

1.3.4 Пример – соскальзывание с полусферы

С вершины гладкой полусферы радиуса R небольшое тело. Найдите его скорость на высоте h (отсчитываемой от подножья). На какой высоте тело оторвется от полусферы?

Будем отсчитывать потенциальную энергию от подножья полусферы. Рассмотрим момент, когда угол между радиусом, проведенным в точку, где находится тело, и вертикалью равен α. Тогда высота $h = R\cos\alpha$. Из закона сохранения энергии

$$mgR = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

имеем $v = \sqrt{2g(R-h)}$.

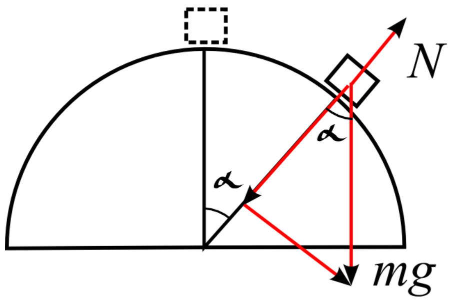

Рис. 1.10.

Рассмотрим динамику движения. По второму закону Ньютона сумма проекций сил mg и реакции опоры N (см. рис. 1.10) должна равняться произведению массы на центростремительное ускорение:

$$mg\cos\alpha + N = \frac{mv^2}{R}.$$

При движении скорость растет, а $\cos\alpha$ уменьшается. Следовательно, уменьшается сила реакции. Отрыв тела от поверхности сферы произойдет при $N = 0$. Подставляя выражение для скорости, получим:

$$mg\cos\alpha = 2mg(R-h)/R.$$

И, учитывая, что $h = R\cos\alpha$, получаем **ответ**:

$$h = \frac{2}{3}R.$$

1.3.5 Пример – прыжок со второго этаха

Оцените среднюю силу, приходящуюся на ноги человека при ударе о землю при прыжке со второго этажа.

Выберем высоту второго этажа $h = 5$ м. Тогда скорость при приземлении тела определится из уравнения

$$mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

При ударе о землю торможение происходит на некотором пути x. Эту величину оценим как 0,5 м (высота приседания человека). Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = Fx.$$

Откуда $F = mgh/x = 10mg$. И, при массе человека 70 кг, $F \approx 7000$ Н.

1.3.6 Пример – груз на пружине

Груз массы m, подвешенный на пружине жесткости k, находится на подставке. Пружина при этом не деформирована. Подставку быстро убирают. Определите максимальное удлинение пружины и максимальную скорость груза.

В нижнем положении, когда растяжение h максимально, и скорость равна нулю, суммарная работа силы тяжести и силы упругости также равна нулю:

$$mgh - \frac{kh^2}{2} = 0.$$

Откуда $h = 2mg/k$.

Скорость тела будет максимальна, когда сумма сил, действующих на тело, равна нулю:

$$mg - kx_0 = 0.$$

Тогда

$$mgx_0 - \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Подставляя в последнее уравнение x_0, получим **ответ**:

$$v = g\sqrt{m/k}.$$

1.4 Столкновения

1.4.1 Пример – распад ядра

В результате распада движущегося ядра появились два осколка массы m_1 и m_2 с импульсами p_1 и p_2, разлетающиеся под углом θ. Определите выделившуюся при распаде ядра энергию E.

Пусть p_0 – начальный импульс частицы. Запишем закон сохранения импульса и энергии:

$$\frac{p_0^2}{2(m_1 + m_2)} + E = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$$

$$p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 = p_0^2.$$

Откуда получаем

$$E = \frac{p_1^2 m_2^2 + p_2^2 m_1^2 - 2p_1p_2m_1m_2\cos\theta}{2m_1m_2(m_1+m_2)}.$$

1.4.2 Пример – полет Мюнхгаузена на ядре

Артиллерист стреляет из пушки ядром массы m так, чтобы оно упало в неприятельском лагере. На вылетевшее ядро садится барон Мюнхгаузен, масса которого $5m$. Какую часть пути до неприятельского лагеря ему придется идти пешком?

Пусть ядро вылетает со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Тогда дальность полета (расстояние до неприятельского лагеря)

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

При посадке на ядро барона направление скорости, то есть угол, не меняется. Величина скорости полета u определяется из закона сохранения импульса:

$$mv_0 = (m + 5m)u.$$

Тогда $u = v_0/6$. И ядро пролетит лишь

$$L' = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{L}{36}.$$

Ответ: барону придется пройти 35/36 пути.

1.5 Движение в гравитационном поле

1.5.1 Пример – притяжение к Земле и Луне

На каком расстоянии (выраженном в радиусах Земли) от Земли на прямой Земля-Луна силы притяжения тела к Земле и Луне равны по величине? Расстояние до Луны в 60 раз больше радиуса Земли. Масса Луны в 81 раз меньше земной.

Пусть m масса рассматриваемого тела, а $m_{\text{З}}$, $m_{\text{Л}}$ и R_1, R_2 массы и расстояния от тела до центров Земли и Луны соответственно. Запишем условие равенства сил притяжения:

$$\frac{m_{\text{З}} m}{R_1^2} = \frac{m_{\text{Л}} m}{R_2^2}$$

$$R_1 + R_2 = 60R_{\text{З}}$$

$$m_{\text{З}} = 81m_{\text{Л}}.$$

Используя сотношения между параметрами получаем:

$$\frac{\sqrt{81m_{\text{Л}}}}{R_1} = \frac{\sqrt{m_{\text{Л}}}}{60R_{\text{З}} - R_1}.$$

откуда получаем ответ

$$R_1 = 54R_{\text{З}}.$$

1.6 Механические колебания

1.6.1 Пример – груз на пружине

Груз массы $m = 50$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 10$ Гц под действием упругой пружины. Найти жесткость пружины.

Воспользуемся формулой для круговой частоты колебаний тела на пружинне

$$\omega = \sqrt{k/m}, \text{ где } \omega = 2\pi\nu.$$

Откуда получаем ответ

$$k = 4\pi^2\nu^2 m,$$

$$k \approx 4 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}, \quad k = 200 \text{ Н/м}.$$

1.6.2 Пример – маятник и падение

Шарик, подвешенный на длинной нити, отклонили на малый угол и отпустили. В этот же момент времени другой такой же шарик начал свободно падать из точки подвеса нити. Какой из шариков быстрее достигнет точки равновесия первого шарика?

Пусть длина нити равна l. Тогда первый шарик достигнет положения равновесия за четверть периода

$$t_1 = \frac{1}{4} 2\pi\sqrt{l/g},$$

а свободно падающий за время

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}, \text{ следует из } l = \frac{gt^2}{2}.$$

$$t_1 - t_2 = \sqrt{l/g}(\pi/2 - \sqrt{2}) > 0.$$

Первый долетит быстрее.

1.7 Статика

Раздел механики статика рассматривает условия равновесия тел. Легко придумать два необходимых условия равновесия, которые будут всегда выполняться в случае равновесия.

- **Сумма сил действующих на тело находящееся в равновесии равна нулю.** Тело не двигается как целое.

- **Сумма моментов сил действующих на тело равна нулю.** Тело не должно вращаться.

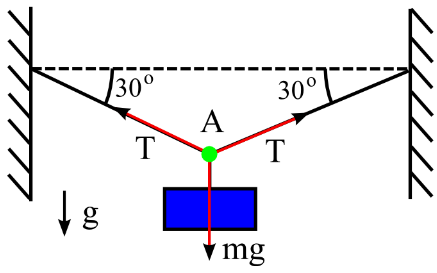

Рис. 1.11.

1.7.1 Пример – груз на тросе

Найти силу натяжения троса в системе изображенной на рисунке 1.11.

В данном случае, для решения задачи достаточно воспользоваться только первым условием равновесия – балансом сил. В качестве рассматриваемого тела удобно выбрать небольшой кусок троса в области подвеса груза, точка A. Сумма векторов сил прикладываемых к этой точке должна давать ноль. Запишем уравнение для проекций сил на вертикальную ось, явно указав знаки компонент.

$$2T\sin 30^\circ + (-mg) = 0,$$

откуда получаем ответ

$$T = mg.$$

1.7.2 Пример – цепочка

Цепочка массы m подвешена за концы так, что вблизи точек подвеса она образует с горизонталью угол α. Определите силу натяжения цепочки в ее нижней точке и в точках подвеса (рис. 1.12, а).

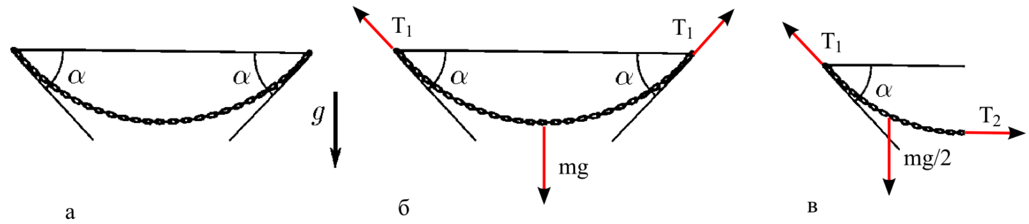

Рис. 1.12.

Для определения натяжения цепочки в точках подвеса приравняем нулю сумму вертикальных проекций сил (рис. 1.12, б)

$$2T_1\sin\alpha + (-mg) = 0,$$

откуда получаем ответ

$$T_1 = mg/(2\sin\alpha).$$

Для определения натяжения в нижней точке рассмотрим половину цепочки и приравняем сумму горизонтальных проекций сил нулю (рис. 1.12, в).

$$T_2 + (-T_1\cos\alpha) = 0,$$

откуда получаем ответ

$$T_2 = \frac{mg}{\sin 2\alpha}.$$

1.7.3 Пример – стержень в углу 1

Попробуем приставить однородный стержень длины L наклонно к стене комнаты.

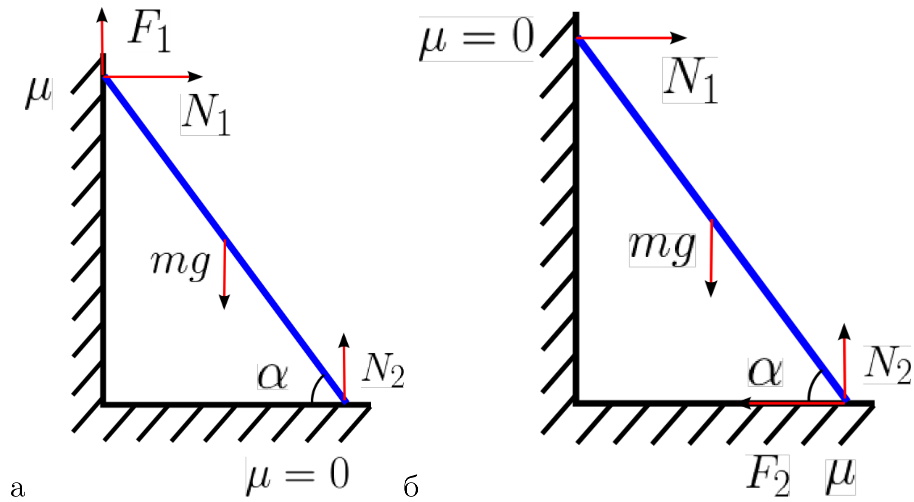

Рис. 1.13.

Пусть стержень составляет угол α с горизонтом и пол гладкий, то есть трения между стержнем и полом нет (рис. 1.13, а). Возможно ли равновесие?

На рисунке изображены силы, которые должны действовать на стержень со стороны Земли (mg), стенки (N_1 и F_1) и пола (N_2). Очевидно, что на ось X имеет отличную от нуля проекцию единственная сила – N_1 . Тогда уравнение равновесия сил может быть выполнено лишь при $N_1 = 0$. Следовательно, сила трения F_1 также равна нулю, а $N_2 = mg$.

Но тогда условие равенства нулю суммы моментов сил не выполняется. Выбрав ось вращения, например, проходящей через центр стержня, получим для момента силы N_2 :

$$M = \frac{mgL\cos\alpha}{2} \neq 0 \ .$$

Равновесие невозможно. Стержень непременно упадет на пол.

1.7.4 Пример – стержень в углу 2

Пусть между стержнем и полом есть трение, а стена гладкая. Возможно ли равновесие теперь?

Силы, действующие в этом случае, изображены на рисунке 1.13, б). Здесь через F_2 обозначена сила трения. Условие равновесия сил в проекциях на оси X и Y дает:

$$N_2 - mg = 0 \ ,$$

$$N_1 - F_2 = 0 \ .$$

Выберем ось вращения проходящей через нижнюю точку стержня (точка O на рисунке) и запишем условие равенства нулю суммы моментов сил:

$$N_1 L \sin\alpha - \frac{mgL\cos\alpha}{2} = 0 \ .$$

Из этих уравнений сразу получаются выражения для всех трех неизвестных сил:

$$N_1 = F_2 = \frac{mg}{2\mathrm{tg}\alpha} \ ; \quad N_2 = mg \ .$$

При малых углах $\mathrm{tg}\alpha$ мал, и сила трения F_2 из этого решения получится очень большой. Однако она не может превышать значения μN_2 – силы трения скольжения:

$$F_2 \leq \mu mg \ .$$

Значит, полученные формулы для N_1, F_2 могут выполняться лишь при углах не меньше некоторого критического α_*. Значение критического угла соответствует случаю, когда сила трения покоя максимальна:

$$F_2 = \mu N_2 \, , \qquad \text{или} \quad \frac{mg}{2\mathrm{tg}\alpha} = \mu mg \ .$$

Отсюда для критического угла получается соотношение:

$$\mathrm{tg}\alpha_* = \frac{1}{2\mu} \ .$$

Равновесие возможно лишь при углах больше критического.

Если попытаться установить стержень с меньшим углом, то есть ближе к горизонтальному положению, то формально равновесие возможно только при $F_2 > \mu mg$. Этого можно добиться, только удерживая стержень в нижней точке дополнительной внешней силой. Одно же трение будет неспособно обеспечить устойчивость, и стержень упадет.

1.7.5 Как выбрать ось вращения?

Для записи условия равновесия моментов сил в рассмотренной задаче можно было выбрать и любую другую ось. Так, для оси, проходящей через верхнюю точку стержня, для рис. 1.13, б) получим:

$$F_2 L \sin\alpha - N_2 L \cos\alpha + \frac{mgL\cos\alpha}{2} = 0 \ .$$

(Убедитесь, что ответ при этом не изменится).

Если тело не вращается (как должно быть в статике), то оно не вращается относительно любой неподвижной оси. Разумно выбирать ось так, чтобы уравнение моментов было максимально простым. Выбрав ось проходящей через точку O, мы автоматически обратили моменты двух из четырех сил в нуль, так как плечи сил N_2 и F_2 равны нулю.