Оглавление

Глава 2

Молекулярно-кинетическая теория

2.1 Строение вещества. Уравнение состояния

2.1.1 Пример – количество атомов

Плотность алюминия $2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3. Сколько атомов алюминия содержится в объеме 1 см^3? Молекулярная масса алюминия $27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.
Решение
Один моль (27 г) алюминия содержит $6 \cdot 10^{23}$ атомов. В 1 см^3 содержится 2,7 г, то есть в 10 раз меньше.
Ответ: $6 \cdot 10^{22}$ атомов.

2.1.2 Пример – химический состав

Найдите формулу соединения азота с кислородом, если его масса $m = 1$ г в газообразном состоянии в объеме $V = 1$ л создает при температуре $T = 17°$C давление $P = 3{,}17 \cdot 10^4$ Па.
Решение
Давление определяется из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Определим молекулярную массу соединения

$$\mu = \frac{mRT}{PV}.$$

Подставим числа, выразив их в системе единиц СИ: $m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), $V = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3, $P = 3{,}17 \cdot 10^4$ Па, $T = 290$ К. Отсюда

$$\mu = \frac{10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 290}{3{,}17 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3}} = 76 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} = 76 \text{ г/моль}.$$

Пусть в соединении содержится x атомов азота и y атомов кислорода. Молекулярная масса азота 14 г/моль, кислорода. 16 г/моль. Тогда должно выполняться равенство:

$$14x + 16y = 76.$$

Так как x и y - целые числа, легко найти, что $x = 2, y = 3$.
Ответ: соединение N_2O_3.

2.1.3 Пример – воздух в комнате

Температура воздуха в комнате объемом $V = 45$ м^3 повысилась от $t_1 =$ 17°C до $t_2 = 27$°C. На сколько уменьшилась масса воздуха в комнате? Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па постоянно. Молекулярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

Решение

Пусть m_1 масса воздуха, соответствующая начальной температуре $T_1 =$ 290 К, а m_2 – конечной $T_2 = 300$ К. Запишем уравнения состояния газа для начального и конечного состояний:

$$P_0 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \; P_0 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2.$$

Искомая масса воздуха $\Delta m = m_1 - m_2$.
Выражая массы из первых двух уравнений и подставляя в третье, получим

$$\Delta m = \frac{\mu P_0 V}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

Подставив числа, получим ответ $\Delta m = 1{,}8$ кг.

2.1.4 Пример – воздушный шар

Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если наполняющий его гелий заменить водородом? Весом оболочки шара пренебречь.

Решение

Пусть атмосферное давление P, температура T, объем воздушного шара V. Масса воздуха, содержащаяся при этих условиях в объеме V, определится из уравнения состояния

$$PV = \frac{m_0}{\mu_0} RT, \text{ или } m_0 = \frac{\mu_0 PV}{RT},$$

где μ_0 – молекулярная масса воздуха. Обозначим через μ_1 молекулярную массу водорода, а через μ_2 – молекулярную массу гелия. Тогда массы водорода m_1 и гелия m_2, содержащихся в объеме V, выразятся соотношениями

$$m_2 = \frac{\mu_2 PV}{RT},\ m_2 = \frac{\mu_2 PV}{RT}$$

Соответствующие подъемные силы определятся разницей веса воздуха и газа в объеме V:

$$F_1 = (m_0 - m_1)g,\ F_2 = (m_0 - m_2)g.$$

Подставив в последние уравнения выражения масс, получим для отношения подъемных сил

$$F_1/F_2 = (\mu_0 - \mu_1)/(\mu_0 - mu_2).$$

Подставляя численные значения $\mu_0 = 29$ г/моль, $\mu_1 = 2$ г/моль, $\mu_2 = 4$ г/моль, получим

$$F_1/F_2 = 27/25.$$

2.2 Термодинамика

2.2.1 Пример – давление и энергия идеального газа

Одноатомный идеальный газ изотермически расширяется из состояния с давлением $P = 10^5$ Па от объема $V_1 = 1$ м^3 до объема $V_2 = 5$ м^3. Какова внутренняя энергия и давление газа в конечном состоянии?

Решение

Внутренняя энергия идеального газа при изотермическом расширении не меняется. Поэтому ее можно найти из начального состояния. Для одноатомного газа

$$E = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}PV.$$

И из данных задачи получаем

$$E = \frac{3}{2}P_1V_1 = \frac{3}{2} \cdot 10^5 \cdot 1 = 1{,}5 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

При постоянной температуре $P_1V_1 = P_2V_2$. Откуда конечное давление

$$P_2 = P_1V_1/V_2 = 10^5/5 = 2 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

2.2.2 Пример – работа, тепло и внутренняя энергия

Газ в цилиндре получил тепло $Q = 1000$ Дж и, расширившись, совершил работу $A = 300$ Дж. На сколько изменилась при этом его внутренняя энергия?

Решение

Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии газа равно количеству тепла, полученного газом, минус работа, совершенная газом: $\Delta E = Q - \Delta A$.

Откуда $\Delta E = 1000 - 300 = 700$ Дж.

2.2.3 Пример – работа и КПД цикла

Один моль одноатомного идеального газа участвует в циклическом процессе, график которого, состоящий из двух изохор и двух изобар, представлен на рисунке 2.1. Температуры в точках 1 и 3 равны T_1 и T_3. Известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме. Определите работу, совершенную газом за цикл и КПД цикла.

Решение

Обозначим через V_1 минимальный объем, занимаемый газом (на изохоре 1,2), через V_2 – максимальный (на изохоре 3,4). Соответственно, через P_1 – минимальное (на изобаре 4,1), а через P_2 – максимальное (на изобаре 2,3) давление. Пусть температура в точках 2 и 3 равна T_2.

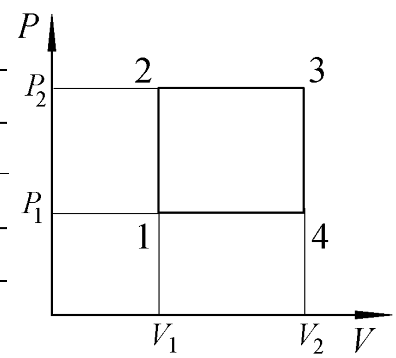

Рис. 2.1.

Работа газа за цикл определится как площадь на диаграмме:

$$A = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1) = P_2V_2 - P_1V_2 - P_2V_1 + P_1V_1. \qquad (2.1)$$

Из уравнения состояния идеального газа для одного моля имеем:

$$P_2V_2 = RT_3 \qquad (2.2)$$

$$P_1V_2 = RT_2 \qquad (2.3)$$

$$P_2V_1 = RT_2 \qquad (2.4)$$

$$P_1V_1 = RT_1. \qquad (2.5)$$

Подставляя (2.2) – (2.5) в (2.1), получим

$$A = R(T_3 + T_1 - 2T_2).$$

Теперь необходимо найти T_2. Для этого разделим почленно (2.2) на (2.3), а (2.4) на (2.5):

$$P_2/P_1 = T_3/T_2,\ P_2/P_1 = T_2/T_1.$$

Приравнивая правые части

$$T_3/T_2 = T_2/T_1.$$

Откуда

$$T_2 = \sqrt{T_1 T_3}.$$

Работа газа определится через заданные температуры

$$A = R\left(T_3 + T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3}\right) = R\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2.$$

Найдем теперь КПД цикла. Для этого надо найти тепло, переданное газу за цикл – Q. Газ получает от нагревателя тепло на участках 1,2 и 2,3. На остальных участках газ отдает тепло холодильнику.
При изохорическом процессе тепло, полученное газом:

$$Q_1 = c_V \Delta T.$$

Для одного моля одноатомного идеального газа $c_V = 3R/2$. Тогда

$$Q_l = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}R\left(\sqrt{T_1 T_3} - T_1\right) = \frac{3}{2}R\sqrt{T_1}\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right).$$

При изобарическом расширении газ получает тепло

$$Q_2 = c_P \Delta T,$$

где $c_P = c_V + R = 3R/2 + R = 5R/2$. То есть

$$Q_2 = \frac{5}{2}R(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}R\left(T_3 - \sqrt{T_1 T_3}\right) = \frac{5}{2}R\sqrt{T_3}\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right).$$

Полное количество тепла, полученного газом

$$Q_H = Q_1 + Q_2 = \frac{1}{2}R\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)\left(5\sqrt{T_3} + 3\sqrt{T_1}\right).$$

КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{R\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2}{\frac{1}{2}R\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)\left(5\sqrt{T_3} + 3\sqrt{T_1}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)}{5\sqrt{T_3} + 3\sqrt{T_1}}.$$

Пусть $T_3 = 900$ К, $T_1 = 400$ К. Тогда

$$A = 8{,}31\left(\sqrt{900} - \sqrt{400}\right)^2 = 8{,}31(30-20)^2 = 831 \text{ Дж}.$$

$$Q_H = \frac{8{,}31}{2}\left(\sqrt{900} - \sqrt{400}\right)\left(5\sqrt{900} + 3\sqrt{400}\right) = 8{,}725 \text{ кДж}.$$

$$\eta = 831/8725 = 0{,}095 \approx 10\%.$$

Заметим, что КПД обратимой машины, работающей с нагревателем температуры $T_3 = 900$ К, и холодильником с $T_1 = 400$ К определится из формулы

$$\eta_{\text{обр}} = (T_3 - T_1)/T_3 = (900 - 400)/900 = 5/9 \approx 0{,}56 = 56\%.$$

2.2.4 Пример – динамическое отопление

С помощью электрической плитки мощностью $N = 1$ кВт в комнате поддерживается температура воздуха $t_1 = 17°$C при температуре наружного воздуха $t_2 = -23°$C. Какая мощность потребовалась бы для поддержания в комнате той же температуры с помощью обратимой тепловой машины?

Решение

Для поддержания нужной температуры запустим тепловую машину по обратному циклу. Тогда наружный воздух будет играть роль нагревателя при $T_2 = 250$ К, а воздух в комнате – роль холодильника при $T_1 = 290$ К. Процесс пойдет таким образом: забрав тепло Q_2 от наружного воздуха и затратив некоторую работу A (например, с помощью электродвигателя), передадим тепло Q_1 внутрь комнаты. Пусть A, Q_1 и Q_2 относятся к единице времени (секунде). Тогда для поддержания той же температуры необходимо, чтобы переданное тепло Q_1 равнялось теплу, поступающему в первом случае:

$$Q_1 = N.$$

КПД тепловой машины

$$\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1.$$

Так как машина обратимая

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1.$$

Приравнивая правые части последних выражений, получим

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Мощность, которую необходимо затратить

$$A = Q_1 - Q_2 = Q_1(1 - T_2/T_1).$$

Подставляя $Q_1 = 10^3$ Вт и температуры, получим

$$A = 10^3(1 - 250/290) \approx 10^3 \cdot 0{,}137 = 137 \text{ Вт}.$$

При таком способе отопления затрачивается значительно меньше энергии! Вместо электрической мощности 1 кВт можно затрачивать для работы электродвигателя лишь 137 Вт. Такое отопление называется «динамическим». Идею использования динамического отопления выдвинул лорд Кельвин.

2.3 Фазовые переходы. Поверхностное натяжение

2.3.1 Пример – нагревание и кипение воды

В кастрюлю налили воду при температуре $t_0 = 10^\circ$C и поставили на плиту. Через $\tau = 10$ минут вода закипела. Через какое время она полностью превратится в пар?

Решение

Обозначим через c удельную теплоемкость воды. Будем считать, что теплоемкость при росте температуры не меняется: $c = 1$ кал/(г·град) $=$ $4{,}18 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град).

Пренебрежем потерями тепла, считая, что за единицу времени при любой температуре воде передается одинаковая энергия w. Пусть масса воды m. Тогда за время τ вода получила энергию $w\tau$, которая пошла на нагревание до температуры кипения $t = 100^\circ$ C:

$$w\tau = mc(t - t_0). \tag{2.1}$$

Для того, чтобы вода выкипела, она должна получить энергию mq, где $q = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота парообразования воды. Такое тепло вода получит за время τ_1:

$$w\tau_1 = mq. \tag{2.2}$$

Выразив массу из (2.1) и подставив в (2.2) получаем

$$w\tau_1 = \frac{w\tau q}{c(t - t_0)}.$$

Откуда

$$\tau_1 = \tau\frac{q}{c(t - t_0}.$$

Подставляя числа

$$\tau_1 = \tau\frac{2{,}26 \cdot 10^6}{4{,}18 \cdot 10^3(100 - 10)} = 6\tau = 60 \text{ минут} = 1 \text{ час}.$$

Ответ: вода полностью выкипит через час после закипания.

2.3.2 Пример – «пограничное» кипение

В стакан налиты две несмешивающихся жидкости: четыреххлористый углерод (CCl_4) и вода. При нормальном атмосферном давлении CCl_4 кипит при 76,7°C, вода – при 100°C. При равномерном нагревании стакана со смесью в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре 65,5°C. Определите, какая из жидкостей быстрее (по массе) выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз. Давление насыщенного пара воды при 65,5°C составляет 25,6 кПа.

Решение

При пограничном кипении газовые пузырьки растут на границе раздела жидкостей. При этом сумма парциальных давлений CCl_4 (P_1) и воды ($P_2 =$ 25,6 кПа) должна равняться атмосферному давлению (при нормальных условиях $P_0 = 1$ атм $= 100$ кПа):

$$P_0 = P_1 + P_2. \tag{2.1}$$

Масса m_1 четыреххлористого углерода, находящегося в некотором пузырьке объема V, определится из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT. \tag{2.2}$$

Здесь $\mu_1 = 154$ г/моль – молекулярная масса CCl_4, $T = 338{,}5$ К – абсолютная температура, соответствующая 65,5°C. Аналогично для воды

$$P_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT, \tag{2.3}$$

где $\mu_2 = 18$ г/моль.
Разделив почленно (2.2) на (2.3), имеем

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1 P_1}{\mu_2 P_2}. \tag{2.4}$$

Подставив в (2.4) давление P_1, выраженное из (2.1), получим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1 (P - P_2)}{\mu_2 P_2}.$$

Подставив числа, получим ответ

$$\frac{m_1}{m_2} \approx 25.$$

2.3.3 Пример – влажность воздуха

При одинаковой температуре смешали (объединив объемы) $V_1 = 1$ м^3 воздуха влажностью $\varphi_1 = 20\%$ и $V_2 = 2$ м^3 воздуха влажностью $\varphi_2 = 30\%$. Определите относительную влажность смеси.

Решение

Обозначим давление насыщенного пара при температуре T через P_0, парциальное давление водяного пара массы m_1 в объеме $V_1 = 1$ м^3 – через P_1, а водяного пара массы m_2 в объеме $V_2 = 2$ м^3 – через P_2.
По определению влажность (выраженная не в процентах) в первом объеме

$$\varphi_1 = P_1/P_0, \tag{2.1}$$

а во втором

$$\varphi_2 = P_2/P_0. \tag{2.2}$$

Параметры водяного пара в каждом случае определятся из уравнения Клапейрона-Менделеева

$$P_1 V_1 = \tfrac{m_1}{\mu} RT, \tag{2.3}$$
$$P_2 V_2 = \tfrac{m_2}{\mu} RT. \tag{2.4}$$

После объединения объемов установится парциальное давление водяного пара P, определяемое из уравнения

$$P(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{\mu} RT. \tag{2.5}$$

Выразив из (2.1) и (2.2) $P_1 = \varphi_1 P_0$ и $P_2 = \varphi_2 P_0$, а также m_1 и m_2 из (2.3) и (2.4) и подставив все в (2.5), получим

$$P = P_0 \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Относительная влажность воздуха определится как

$$\varphi = \frac{P}{P_0} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Подставляя числа

$$\varphi = \frac{0{,}2 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{0{,}8}{3} \approx 0{,}27.$$

Так как относительная влажность воздуха выражается в процентах, ответ $\varphi \approx 27\%$.

2.3.4 Пример – капля ртути

Какую работу против сил поверхностного натяжения нужно совершить, чтобы разделить сферическую каплю ртути радиуса $r_0 = 3$ мм на две одинаковые капли? Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}465$ Н/м.

Решение

Работа против сил поверхностного натяжения определяется изменением полной поверхности

$$A = \sigma \Delta S. \tag{2.1}$$

Начальная поверхность $S_0 = 4\pi r_0^2$. Обозначим радиус каждой из двух образовавшихся капель через r. Тогда полная поверхность двух капель $S = 2 \cdot 4\pi r^2$. Так как $\Delta S = S - S_0$, работа

$$A = 4\pi\sigma(2r^2 - r_0^2). \tag{2.2}$$

При разделении капли сохраняется полный объем ртути

$$\frac{4}{3}\pi r_0^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{2.3}$$

Откуда находится радиус образовавшихся капель. Подставив r из (2.3) в (2.2), получим

$$A = 4\pi\sigma r_0^2 \left(2^{1/3} - 1\right).$$

Подставляя числа, получим ответ

$$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}465 \cdot \left(3 \cdot 10^{-3}\right)^2 \left(2^{1/3} - 1\right) \approx 1{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$