

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Курс лекций для ФМШ

## ЭЛЕКТРОСТАТИКА

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

Мы начинаем изучение электродинамики. Это не просто новый раздел, что-то вроде усовершенствованной механики. Развитие физики – это развитие представлений людей о природе. Сейчас уместно вспомнить историю.

Основы **механики** заложили Галилей и Ньютон еще в XVII веке. Хотя современный вид эта наука приобрела в XVIII – XIX веках (Лагранж, Гамильтон), это было в основном развитие форм, методов и приемов. Механикой занимаются и до сих пор; нынешние продвижения – это новые решения, иногда даже новые неожиданные области (как динамический хаос). В механике есть сложные задачи, есть еще нерешенные, есть и такие, которые вряд ли удастся решить в обозримом будущем. Но все они в принципе уже содержатся в законах Ньютона. Механика в этом смысле проста и понятна. Она опирается на житейский здравый смысл и повседневный опыт каждого человека. Объекты механики тоже просты и привычны (кирпичи, повозки), а более сложные вещи (автомобили, самолеты) – это не более как комбинации простых деталей. Благодаря расцвету механики в XIX веке приобрела популярность концепция материи, в то время попросту понимаемой как вещество, и развелись во множестве философы-материалисты.

**Молекулярная физика** создана в основном в XIX веке. Такая задержка именно вызвана тем, что объекты «теплоты» более сложны и часто плохо доступны восприятию. Вначале появилась идея тепла как неосязаемой жидкости, которая как бы плещется в нагретых кирпичках и может из одного в другой перетекать. Прорыв начался, когда была осознана идея молекулярной структуры вещества, и всячески пытались свести теплоту к механике. Этот путь привел к частичному успеху (например, про горячее тело мы говорим не как бывало, что в нем избыток теплорода, а что его молекулы имеют много кинетической энергии). Но выявились проблемы следующего уровня: поведение теплоемкости, излучение... В прошлом семестре мы замели их под ковер, объявив, что это область квантовой механики и электродинамики. Возможно, преподавателям и не удалось в должной мере всех в этом убедить, но хорошо уже, если мы донесли, что тут не годится классическая механика. Впрочем, теплоемкость и фотоны – это некие тонкости, а есть проблема более грубая и зримая. Почему вещество делится на части только до масштаба порядка  $10^{-8}$  см, а не дальше? Откуда взялся этот размер, который мы называем атомным?

Для ответа на эти вопросы следует прежде всего изучить **электродинамику**. В течение XIX века было осознано (Фарадей, Максвелл, Герц и др.), что кроме вещества (того, что делится на атомы), есть в природе и другие сущности – **поля**, из которых предметом электродинамики являются **электрическое** и **магнитное** поле.

«На глаз» нельзя отличить провода «под током» и отключенные, что и приводит к электрическим поражениям. Но это не значит, что наши органы чувств не реагируют на поля. Электрическое поле мы прекрасно чувствуем: если оно присутствует в организме (одновременно идет ток), то непроизвольно сокращаются мышцы и возникают непривычные ощущения, памятные каждому, кто хоть раз хватался за провода. Ме-

нее сильное поле (от батарейки) ощущается на вкус. Связаны эти эффекты с тем, что управляющие сигналы в организме, в нервах и пр. – электрические. Магнитное поле человек не замечает: попробуйте отличить магнит и простой кусок железа, не прибегая к таким индикаторам, как гвозди. Однако некоторые птицы как будто ориентируются по довольно слабому земному магнитному полю. С другой стороны, свет – это чистое электромагнитное поле, больше в нем ничего нет, а именно свет мы только и видим. И вообще все наши ощущения на микроуровне формируются именно полями, в основном электрическое поле действует как передаточный ремень. Можно сказать, что наши ощущения нас обманывают. Мы чувствуем не то, что есть на самом деле.

Видно, что восприятие полей какое-то косвенное, оно резко отличается от восприятия грубо материальных предметов. Потому-то понятие поля возникло достаточно поздно, приблизительно с работ Фарадея (первая треть XIX века). Если теплота как-то свелась к механике, правда не всегда обычной, то электродинамика – вещь принципиально не механическая. Хоть электромагнитное поле имеет энергию и импульс, может воздействовать на «обычные»<sup>1</sup> макроскопические предметы с некоторой силой, но это воздействие никак не главное, а сами поля не имеют ничего общего с основой ньютоновской механики – материальными точками. Это гораздо более тонкие вещи. Напротив, на микроскопическом уровне все вещество пронизано и «скреплено» полями: в атомах в основном электрическое поле не дает электронам разбежаться.

---

<sup>1</sup>То есть не несущие заметного электрического заряда, см. п. 1.1.

# Глава 1

## ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### 1.1 Закон Кулона. Электрическое поле заряда

Притяжение/отталкивание «наэлектризованных» тел известно с древности. В 1785 г. Кулон установил закон взаимодействия

$$F = \frac{q_1 q_2}{R^2}, \quad (1.1)$$

похожий на закон тяготения. Разница с тяготением в том, что **заряд**  $q$  может быть положительным и отрицательным:  $(+,+)$  и  $(-,-)$  отталкиваются, а  $(+,-)$  притягиваются.

Из (1.1) размерность  $q$ : (сила)<sup>1/2</sup> · длина. Заряд 1 (г)<sup>1/2</sup> · (см)<sup>3/2</sup>/сек взаимодействует с таким же зарядом на расстоянии 1 см с силой в 1 дину. Кратко его называют единицей заряда СГС, или 1 CGS(Q).

В системе СИ вводится единица заряда – кулон (Кл); 1 Кл = 3 · 10<sup>9</sup> CGS(Q). Обратим внимание, что отличается не только единица заряда, но и форма записи закона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{R^2} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{R^2}. \quad (1.2)$$

Электрическая постоянная  $\epsilon_0$  (она же диэлектрическая проницаемость вакуума) равна 8,854 · 10<sup>-12</sup> Кл<sup>2</sup>сек<sup>2</sup>/(кг · м<sup>3</sup>), так что коэффициент  $k$  в (1.2) равен 9 · 10<sup>9</sup>. Сила взаимодействия зарядов в 1 Кл на расстоянии 1 км будет 9 · 10<sup>3</sup> Н, или 900 кГ. Часто полезность системы СИ видят в том, что в ней единицы «бытовой» величины. Видно, что кулон как единица нескомпенсированного заряда не подходит под это правило. В природе заряды порядка сотен кулон возникают разве что в грозовых облаках. Заметим, что не только кулон гораздо больше единицы заряда СГС, но у него и размерность другая. Строго говоря, основная единица в СИ – ампер<sup>1</sup> (А), 1 Кл = (1 А) · (1 секунду).

Существует элементарный заряд  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  СГС = 1,6 · 10<sup>-19</sup> Кл. Заряд электрона равен  $-e$ , протона  $+e$ . Любой заряд в природе «набирается» из таких единиц. Поскольку

---

<sup>1</sup>Ампер определяется как величина тока, который, проходя по двум тонким параллельным прямым проводникам, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает между этими проводниками силу, равную 2 · 10<sup>-7</sup> Н на каждый метр длины.

элементарный заряд мал, мы обычно не замечаем дробности заряда (так же как и дробности вещества), но чувствительные приборы реагируют на отдельный электрон.

Сейчас известно, что многие элементарные частицы (**адроны**) состоят из так называемых **кварков**, имеющих дробные заряды, именно  $\pm e/3$  и  $\pm 2e/3$ . Но кварки живут не в свободном виде, а тройками (**барионы**, например протон и нейтрон) либо парами кварк-антикварк (**мезоны**, например  $\pi$ -мезон), так что заряд наблюдаемой частицы всегда получается целый<sup>2</sup>. **Лептоны** (например, электрон) кварков не содержат; их заряд целый без всяких усложнений.

Заряд **сохраняется**. Сохранение заряда просто понять, учитывая его дробность: это означает, что электрон не может возникнуть из ничего или исчезнуть без следа. Однако возможно парное рождение в одной точке частиц с противоположными зарядами, например, электрона и позитрона из двух фотонов, либо обратный процесс – аннигиляция. Если в каком-то объеме изменился заряд, то он или прибыл извне (через границу), или удалился; и то и другое – в результате движения заряженных частиц.

В атомах электроны притягиваются к протонам. Атомы, молекулы, вирусы, медведи и т.п. скрепляются электрическими силами. В основном наш мир – электрическая система.

Электрическая сила между двумя протонами больше гравитационной в  $e^2/(Gm_p^2) \approx 10^{36}$  раз (здесь  $m_p$  – масса протона,  $G$  – постоянная всемирного тяготения). Отсюда следует, что заряды электрона и протона близки с очень хорошей точностью (по современным представлениям, точно равны). Иначе в сколько-нибудь заметном куске вещества заряды компенсировались бы не совсем, и гравитационное притяжение планет могло бы «забываться» электрическим взаимодействием.

Правильнее считать, что не заряды взаимодействуют непосредственно, а каждый из них создает в пространстве **электрическое поле**. Это поле и действует на второй заряд. По определению, если на неподвижный пробный<sup>3</sup> заряд  $q$  в некоторой области пространства действует сила, пропорциональная  $q$  и зависящая, вообще говоря, от времени и координат,

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

то в этой области имеется электрическое поле напряженности  $\mathbf{E}$ , или короче: электрическое поле равно  $\mathbf{E}$ . Можно сказать, что  $\mathbf{E}$  – это сила, действующая на единичный заряд. Поле может быть однородным (не зависеть от координат в некоторой конечной области), статическим (не зависеть от времени), но в общем случае  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . В этой главе мы рассматриваем простейший случай – **электростатические**, то есть не зависящие от времени, электрические поля. Строго говоря, это значит, что заряды должны быть неподвижны. Практически допустимы движения со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света (как и в ньютоновской механике).

<sup>2</sup>Найдены более редкие четырех- и пятикварковые частицы, также имеющие в сумме целый заряд.

<sup>3</sup>Пробным называют заряд, достаточно малый, чтобы не влиять на рассматриваемое поле.

Поскольку заряд – явный скаляр, поле  $\mathbf{E}$  – вектор. Из (1.2,1.3) следует, что напряженность поля, созданного зарядом  $Q$  в точке, куда «смотрит» радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , проведенный из этого заряда,

$$E = \frac{Q}{r^2}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.4)$$

в рамках электростатики нет разницы между набором уравнений (1.3),(1.4) и одним (1.1). Но позже мы узнаем, что поле может существовать отдельно от зарядов и поэтому является не лишним неизвестным, а реальным фактором. Например, при смещении одного из зарядов сила меняется не сразу, как можно ожидать из (1.1) (это называлось бы **дальнодействие**), а с некоторой задержкой. Сначала изменится поле в непосредственной близости от смещаемого заряда, а потом область этих изменений расширяется. Когда она «зацепит» второй заряд, изменится и сила (**близкодействие**). Мы увидим, что изменения поля распространяются со скоростью света. Можно представлять себе поле как некую среду, через которую взаимодействуют заряды.

Закон Кулона напоминает закон тяготения; аналогом электрического поля в гравитации является ускорение силы тяжести  $\mathbf{g}$  (сила на единичную массу).

## 1.2 Принцип суперпозиции

Этот принцип установлен на опыте и означает, что поля от нескольких зарядов складываются:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = \sum \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3}. \quad (1.5)$$

**В электростатике** электрическое поле создается зарядами и только ими (это также опытный факт). Любое электростатическое поле можно представить как сумму полей от некоторых зарядов. Говорят, что заряды – **источники** поля.

*Примеры.*

Кольцо радиуса  $R$  с зарядом  $q$ ; на расстоянии  $z$  от центра на оси кольца:

$E = qz/(R^2 + z^2)^{3/2}$ , направление – вдоль оси кольца.

Нить с зарядом  $\lambda$  на единицу длины: поле при  $\lambda > 0$  направлено «от нити». Разделив нить на элементы длины  $dx$ , заряды которых  $\lambda dx$ , суммируем проекции полей на поперечное к нити направление:

$$dE = \frac{\lambda \cdot dx}{(r^2 + x^2)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \Rightarrow E = \lambda r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2\lambda}{r}.$$

Плоскость с зарядом  $\sigma$  на единицу площади: режем на кольца площади  $dS = 2\pi R dR$ . Поле направлено по нормали и равно

$$dE = \frac{\sigma \cdot dS}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \Rightarrow E = 2\pi\sigma z \int_0^{\infty} \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi\sigma$$

независимо от расстояния  $z$  до плоскости. Для оценки можно считать, что поле создает кусок плоскости размером  $z$ , скажем круг такого радиуса. Его заряд  $\pi z^2 \sigma$ , расстояние до точки наблюдения порядка  $z$ , и поле должно быть порядка  $\pi z^2 \sigma / z^2 \sim \pi \sigma$ . Получилась ошибка в два раза, чего и следовало ожидать от оценки. Остальная часть плоскости имеет бесконечный заряд, но поля от удаленных участков направлены почти вдоль плоскости, поэтому их вклад невелик.

Важный случай – поле равномерно заряженной сферы. Эту задачу решил еще Ньютон (в гравитационном варианте). В силу аналогии закона Кулона и закона тяготения одновременно найдется и поле тяжести тонкого сферического слоя.

Легко показать, что внутри сферы поле равно нулю. На рис. 1.1 показаны два узких конуса с вершинами в произвольной точке наблюдения  $A$ , которые опираются на два противоположных малых участка поверхности. Площади этих участков  $dS_1$  и  $dS_2$  относятся как квадраты расстояний  $r_1$  и  $r_2$  (обратите внимание на подобие узеньких треугольников). Поля от участков  $dS_1$  и  $dS_2$  в точке  $A$  направлены вдоль отрезков  $r_1$  и  $r_2$ , и результат их сложения можно записать как

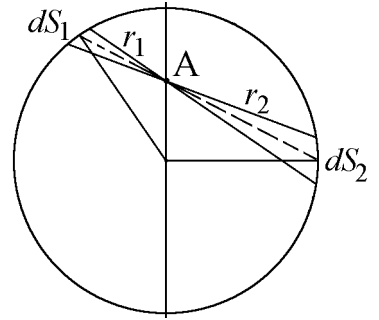


Рис. 1.1.

$$\sigma \left( \frac{dS_1}{r_1^2} - \frac{dS_2}{r_2^2} \right) = 0.$$

Отсюда нулевым будет и суммарное поле сферы, так как ее поверхность исчерпывается такими малыми участками.

Более сложно найти поле снаружи сферы. Решение Ньютона – пример математического изящества. Приведем его в современных обозначениях.

На рис. 1.2 на расстоянии  $R$  от центра сферы радиуса  $a$  расположена точка наблюдения (обозначенная также  $R$ ). Внутри сферы имеется так называемая сопряженная точка  $A$ , на расстоянии  $x = a^2/R$  от центра. Проведем через точку  $A$  прямую, пересекающую сферу в двух точках (верхняя обозначена  $B$ ). Прямая будет осью двух узких конусов, с телесным углом<sup>4</sup>  $d\Omega$ , вырезающих на сфере два участка поверхности. Треугольники  $AOB$  и  $BRO$  подобны, так как угол  $\alpha$  у них общий, а отношения соответственных сторон равны:  $x/a = a/R$ . Тогда и отношение  $r/l = a/R$ , а угол  $OBA$  равен  $\varphi$ . Заряд верхнего участка  $q_B = \sigma dS_B = \sigma r^2 d\Omega / \cos \varphi$ , поскольку  $r^2 d\Omega$  – элемент поверхности, перпендикулярной радиусу  $r$ ; деление на косинус учитывает наклон поверхности сферы к оси конуса. Поле в точке наблюдения из симметрии направлено горизонтально:

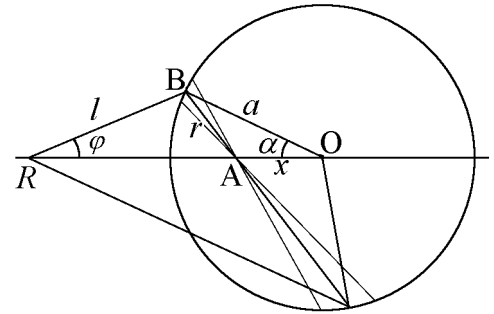


Рис. 1.2.

$$dE = \frac{q_B}{l^2} \cos \varphi = \frac{\sigma r^2 d\Omega}{l^2 \cos \varphi} \cos \varphi = \frac{\sigma a^2 d\Omega}{R^2}.$$

<sup>4</sup>Телесным углом называется отношение площади участка сферы, проведенной из данной точки, к квадрату радиуса.

Теперь суммируется очень просто: полный телесный угол (площадь любой сферы, деленная на квадрат ее радиуса) равен  $4\pi$ , а  $4\pi a^2\sigma$  есть заряд сферы  $Q$ . Отсюда

$$E = \frac{Q}{R^2}.$$

Снаружи сфера действует, как будто весь заряд расположен в ее центре. Значит, любое сферически симметричное распределение заряда создает снаружи такое же поле, как суммарный точечный заряд.

### 1.3 Потенциал

При движении пробного заряда в электростатическом поле изменяется его потенциальная энергия  $U$ . Поскольку электрическая сила – вторичное понятие, а основное – электрическое поле  $\mathbf{E}$ , или сила на единичный заряд, то в электростатике важна потенциальная энергия единичного заряда – **потенциал**  $\varphi$ . Для пробного заряда  $q$  по определению  $U = q\varphi$ . Соответствия:

$$F \iff U : \quad F = -dU/dx, \quad U(x_2) - U(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} F dx, \quad U(x) = - \int^x F dx$$

(от места, где  $U = 0$ )

$$E \iff \varphi : \quad E = -d\varphi/dx, \quad \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} E dx, \quad \varphi(x) = - \int^x E dx.$$

(от места, где  $\varphi = 0$ )

(**Не забывайте знак минус !!!**). В пространстве имеются три направления, которым соответствуют три частных производных:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Короче то же самое записывается в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \equiv -\text{grad}\varphi = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (1.6)$$

Здесь  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные векторы по осям,  $\nabla$  и  $\text{grad}$  – различные обозначения **дифференциального оператора градиента**:

$$\nabla \equiv \text{grad} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

который как бы умножается на функцию, стоящую справа от него. Если не пользоваться координатами, то градиент есть вектор, направленный в сторону быстрого изменения потенциала и равный производной потенциала вдоль этого направления.



Из (1.6) видна выгода использования потенциала – в одной функции содержится та же информация об электрическом поле, как в трех функциях – компонентах напряженности поля. Правда, эта информация присутствует в «свернутом» виде: чтобы ее извлечь, надо вычислить три производных. Далее мы увидим, что потенциал полезен не только для сокращения, но и сам по себе, как физическая величина.

Пока ниоткуда не следует, что потенциал – функция, которая обращает (1.6) в тождество – существует. В общем случае, для произвольного поля  $\mathbf{E}$ , это и неверно. Но в **электростатике** потенциал существует и даже (при известном расположении зарядов) выписывается явно. А именно, точечный заряд  $q$  на расстоянии  $r$  создает потенциал

$$\varphi = \frac{q}{r}. \quad (1.7)$$

Действительно,  $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -q\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial x} = qx(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{qx}{r^3}$ .  
Остальные компоненты отличаются тем, что  $x$  заменяется на  $y$  или  $z$ . Вектор поля

$$\mathbf{E} = q \left( \frac{\mathbf{i}x}{r^3} + \frac{\mathbf{j}y}{r^3} + \frac{\mathbf{k}z}{r^3} \right) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$$

в полном соответствии с (1.4). В силу принципа суперпозиции поле любого числа зарядов есть сумма элементарных полей вида (1.4), но тогда и потенциал суммарного поля можно найти как сумму элементарных потенциалов:

$$\varphi = \sum \varphi_i = \sum \frac{q_i}{r_i}. \quad (1.8)$$

Как и потенциальная энергия, потенциал определен с точностью до постоянной: выражение  $\varphi = q/r + 2007$  даст точно такое же поле. Другими словами, существует свобода выбора «нуля потенциала» – точки, где  $\varphi = 0$ . Иногда нуль потенциала фиксируется из соображений удобства, но часто имеется естественный выбор. Для точечного заряда и удобно, и естественно полагать потенциал равным нулю на бесконечности.

Обратный переход от поля к потенциалу в пространстве имеет вид

$$\varphi(2) - \varphi(1) = - \int_L (\mathbf{E}d\mathbf{L}), \quad (1.9)$$

где  $L$  обозначает любой путь, соединяющий точки 1 и 2, а  $d\mathbf{L}$  – векторный элемент длины этого пути. Такое выражение имеет определенное значение, если интеграл зависит от начальной и конечной точек, а не от пути между ними (**условие потенциальности**). Другая формулировка этого условия:

$$\oint (\mathbf{E}d\mathbf{L}) = 0, \quad (1.10)$$

где  $\oint$  – интеграл по **любому** замкнутому контуру, называемый также циркуляцией  $\mathbf{E}$ . В этом случае существует однозначно определенный потенциал.

Потенциальность поля точечного заряда легко установить и прямым интегрированием. Действительно, подставляя (1.4) в (1.9), можно заметить, что поперечные радиусы перемещения не дают вклада в интеграл, и его можно свести к интегралу вдоль радиуса. Для определенности выбираем  $\varphi(\infty) = 0$ :

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \frac{qdr}{r^2} = \frac{q}{r},$$

что совпадает с (1.7). Отметим, что «на заряде»  $\varphi = \infty$ ; реально заряд либо имеет размер, либо (на очень малых расстояниях) нарушается классическая электродинамика, то есть излагаемая теория; то же касается поля  $\mathbf{E}$ .

Складывать потенциалы по принципу суперпозиции (1.8) проще, чем поля, поскольку  $\varphi$  – скаляр. На оси кольца (пример 1 из п. 1.1)  $\varphi = \sum \Delta q / \sqrt{R^2 + z^2} = q / \sqrt{R^2 + z^2}$ . Проверим:  $E_z = -\partial\varphi/\partial z = qz / (R^2 + z^2)^{3/2}$ !

Сложнее ситуация с потенциалом заряженной нити (пример 2 из п. 1.1).

$$\varphi = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{1/2}} = 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{1/2}} = 2\lambda \ln \left( \sqrt{x^2 + r^2} + x \right) \Big|_0^{\infty}.$$

Подставляя пределы, получим бесконечность (интеграл расходится). Но бесконечных заряженных нитей не бывает. Пусть длина нити  $2L$  велика, но конечна. Заменим предел на  $L$ :

$$\varphi = 2\lambda \ln \left( \sqrt{x^2 + r^2} + x \right) \Big|_0^L = 2\lambda \ln \left( \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{r} \right).$$

Потенциал обращается в бесконечность при  $r = 0$  и  $L = \infty$ . Первая расходимость – это по существу бесконечность на точечном заряде, ослабленная размазанностью линейного распределения. Вторая вызвана бесконечной длиной нити и для реальных задач несущественна. Полученным выражением уже можно пользоваться, в частности, дифференцировать его:

$$E = -2\lambda \frac{d}{dr} \ln \left( \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{r} \right) = \frac{2\lambda L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{r}.$$

При  $L \rightarrow \infty$   $E = 2\lambda/r$ , как и при прямом суммировании полей. Можно также писать  $\varphi = 2\lambda \ln(r_0/r)$ , при любом значении радиуса фиксации нуля потенциала  $r_0$ . Здесь «естественный» нуль потенциала (расстояния, значительно большие длины нити) не очень удобен.

Единица потенциала в СГС –  $(\text{г})^{1/2} \cdot (\text{см})^{1/2}/\text{сек}$ , в СИ – вольт. С учетом всех  $\varepsilon_0$   
1 CGS(U) = 300 В.

Это число легко запоминается и полезно для перевода других единиц. Пример:  $q\varphi = U$ ; 1 Дж = (1В)·(1Кл) = (1/300)·1 Кл =  $10^7$ ;  $\rightarrow$  1 Кл =  $3 \cdot 10^9$ . Поле в СИ выражают в В/м, часто удобна внесистемная единица В/см. Воздух пробивается при  $E \cong 30$  кВ/см = 100 СГС.

## 1.4 Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Для наглядного изображения поля введем геометрические образы. От точечного заряда  $q$  проведем прямые лучи. Это и будут **силовые линии** в простейшем случае (рис. 1.3). Полезно запомнить нехитрые правила: направление силовых линий совпадает с направлением поля в каждой точке, а **густота** отображает величину поля. Густотой назовем число силовых линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную им, или отношение  $\Delta N/\Delta S$ . Убедитесь, что при таком определении для точечного заряда  $q$  силовые линии нигде не прерываются и не возникают (кроме как на самом заряде).

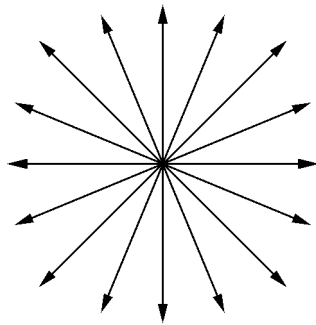


Рис. 1.3.

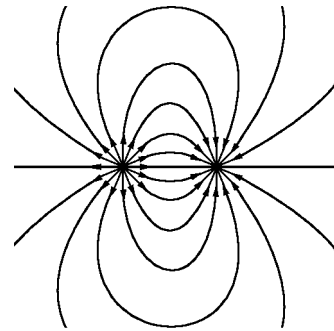


Рис. 1.4.

Очевидно, силовые линии в общем случае не могут пересекаться (позднее это уточним). Для двух зарядов разного знака и равной величины силовые линии выходят из «+» и входят в «-» (рис. 1.4). Число линий должно быть пропорционально величине заряда. При рисовании полезно следить сначала за картиной вблизи зарядов, затем на бесконечности, и наконец совместить изображения на средних расстояниях. Заряды одного знака с большого расстояния напоминают суммарный заряд, так что все силовые линии уходят на бесконечность (рис. 1.5). Опять видно, хотя пока не доказано, что силовые линии начинаются и кончаются только на зарядах.

**Уточнение.** На рис. 1.5 между зарядами одного знака есть не только пересечение, а даже «столкновение» силовых линий. Легко видеть, что такая особая точка всего одна, а поле в ней нулевое. Нулевой вектор способен иметь любое направление. Строго говоря, в эту точку не следовало бы тянуть силовую линию, так как здесь их густота обращается в нуль; присутствие здесь линий – дань симметрии.

**Эквипотенциальные поверхности** – это поверхности одинакового потенциала. Для точечного заряда  $q$  это будут концентрические сферы. Если условиться рисовать их через одинаковое значение потенциала, допустим через 1 СГС, то эквипотенциали будут густо располагаться в областях, где поле велико. Поэтому для точечного заряда такая программа невыполнима, так как эквипотенциальных поверхностей понадобится бесконечное число. Здесь, как и при рисовании силовых линий, необходим компромисс между строгостью и выполнимостью. Применимы те же рекомендации, что и для силовых линий. Заметим, что эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым

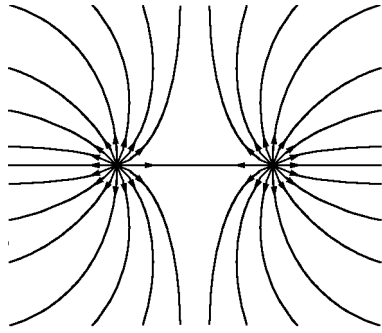


Рис. 1.5.

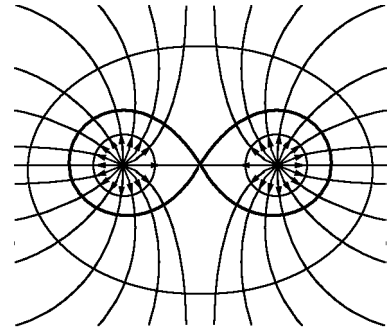


Рис. 1.6.

линиям (опять кроме особых точек, см. рис. 1.6).

## 1.5 Теорема Гаусса

Уточним качественные рассуждения п. 1.4. Окружим точечный заряд  $q$  концентрической сферой радиуса  $R$  (рис. 1.7). Поскольку густота линий пропорциональна величине поля, число линий через  $1 \text{ см}^2$   $\Delta N/\Delta S \sim q/R^2$ . Для определенности вместо пропорциональности примем равенство:  $\Delta N/\Delta S = E = q/R^2$ . Через всю сферу проходит  $S \cdot \Delta N/\Delta S = 4\pi R^2 q/R^2 = 4\pi q$  силовых линий. Это число не зависит от радиуса сферы. Значит, силовые линии, хотя бы в этом простом случае, не прерываются и не возникают в пустом месте.

Переходя от геометрических образов к алгебраическим, можно записать на языке поля:

$$\sum E \Delta S = 4\pi q.$$

Пока мы видим, что это верно для концентрической сферы любого радиуса.

Но очевидно, что для **одного точечного заряда** концентричность не важна. Можно даже брать и не сферу. Для любой замкнутой поверхности  $S$ , содержащей внутри заряд  $q$ , число выходящих силовых линий **тоже** равно  $4\pi q$ ! Это ясно из картины силовых линий, известной нам в этом случае точно, см. рис. 1.7. Замкнутая поверхность обязательно пересечет их все, если заряд сидит внутри. Форма поверхности может быть довольно замысловатой (например, памятник Пушкину).

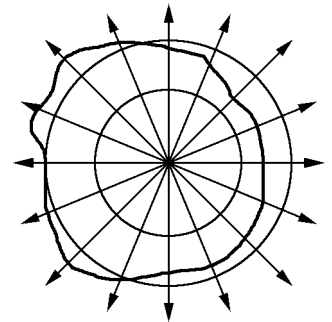


Рис. 1.7.

Снова переключимся на язык поля. В общем случае вектор поля будет под углом к поверхности, и надо брать площадку, перпендикулярную  $\mathbf{E}$ . Число линий дается произведением  $E \Delta S_{\perp} = E_{\perp} \Delta S = E \Delta S \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между  $\mathbf{E}$  и нормалью к площадке  $\mathbf{n}$ . То же самое можно записать как скалярное произведение  $(\mathbf{E}_n \Delta S)$  или еще короче:  $(\mathbf{E} \Delta \mathbf{S})$ . Под вектором  $\Delta \mathbf{S}$  понимается вектор, длина которого равна площади элемента

поверхности  $\Delta S$ , а направление совпадает с внешней нормалью  $\mathbf{n}$  данного элемента, разумеется, малого и практически плоского<sup>5</sup>.

Окончательно для одного заряда  $q$  имеем

$$\sum_S (\mathbf{E} \Delta \mathbf{S}) = 4\pi q$$

для любой замкнутой поверхности  $S$ , содержащей в себе этот заряд. Выражение вида  $\sum_S (\mathbf{E} \Delta \mathbf{S})$  называется **поток**ом вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность  $S$ . Название – из гидродинамической аналогии: если заменить  $\mathbf{E}$  на вектор  $\mathbf{V}$  скорости несжимаемой жидкости, то поток  $\mathbf{V}$  – это синоним расхода ( $\text{см}^3/\text{сек}$ ).

Наконец, если заряд внутри поверхности не один, то полное поле – сумма полей отдельных зарядов  $q_i$ . Для каждого из них поток равен  $4\pi q_i$ , а для всех вместе

$$\sum_S (\mathbf{E} \Delta \mathbf{S}) = 4\pi \sum q_i = 4\pi Q, \text{ или } \oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi Q \quad (1.11)$$

где  $Q$  – полный заряд внутри  $S$ . Это и есть **теорема Гаусса**.

Надо осознать, что если один из зарядов выйдет из  $S$  наружу, то сразу после пересечения  $S$  он перестанет вносить вклад в полный заряд. Для этого может быть достаточно сколь угодно малое смещение, то есть поток изменится скачком. Еще замечание: поток через **незамкнутую** поверхность, скажем, половинку сферы, ничему замечательному не равен. Тут не ясно, что находится внутри, стало быть, и внешняя нормаль плохо определена. Конечно, какое-то число получится, но никакого уравнения типа (1.11) ожидать не приходится.

Теорема Гаусса – второе из полученных нами **уравнений Максвелла** (первым было условие потенциальности (1.10)). Оба они есть уравнения в **интегральной форме** и оба не являются локальными уравнениями, связывая значения поля в разных местах. Существует и **дифференциальная форма** этих уравнений, которая уже локальна (связывает величины, относящиеся к данной точке пространства).

*Примеры.*

Известное уже поле нити: выбираем в качестве поверхности  $S$  цилиндр радиуса  $R$  и длины  $L$ , для которого нить является осью. Из симметрии потока через «доньшки» цилиндра нет. На боковой поверхности цилиндра поле всюду одинаково по величине и направлено по нормали. Отсюда

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = E \cdot 2\pi RL = 4\pi Q = 4\pi \lambda L \implies E = 2\lambda/R.$$

Сфера радиуса  $R$ , равномерно заряженная по поверхности зарядом  $q$ : опять из симметрии поток равен  $4\pi r^2 E$  через любую концентрическую сферу. При  $r < R$  внутри

<sup>5</sup>Во избежание путаницы: перпендикулярность линии либо вектора к поверхности означает их параллельность нормали и вектору площади.

контрольной сферы заряда нет,  $\Rightarrow E = 0$ , при  $r > R$  весь заряд находится внутри контрольной поверхности,  $\Rightarrow E = q/r^2$ . Вспомним, что получить последний результат суммированием полей (п. 1.2) было не так просто. Заметим, что на поверхности сферы происходит скачок поля, равный  $q/R^2 = 4\pi \cdot (q/4\pi R^2) = 4\pi\sigma$ , где  $\sigma = \Delta q/\Delta S = q/4\pi R^2$  – поверхностная плотность зарядов на сфере.

Если заряд  $q$  равномерно распределен по шару радиуса  $R$ , то снаружи шара поле точно такое же:  $E = q/r^2$ ; вообще любое сферически симметричное распределение зарядов снаружи дает поле, как точечный суммарный заряд. Внутри шара поток по-прежнему записывается как  $4\pi r^2 E$ , а заряд внутри контрольной поверхности равен  $qr^3/R^3$  из подобия; получаем  $4\pi r^2 E = 4\pi qr^3/R^3 \Rightarrow E = qr/R^3$ . На поверхности шара никакого скачка нет. И в общем случае для скачка поля необходима конечная поверхностная плотность заряда  $\sigma$ , т.е. бесконечная объемная плотность  $\rho$ .

Теперь вернемся к силовым линиям. Если в каком-то месте силовые линии оборвались или, наоборот, возникли, то окружаем эту область замкнутой поверхностью. Так как числа входящих и выходящих линий не равны, имеется поток поля и внутри поверхности будет некомпенсированный заряд. Мы убедились, что силовые линии начинаются и оканчиваются только на зарядах.

## 1.6 Проводники в электрическом поле. Метод изображений

Для симметричного распределения зарядов электрическое поле удастся найти с минимальными затратами, применяя теорему Гаусса. Такие случаи, разумеется, сравнительно редки. При произвольном, но известном расположении зарядов нахождение поля требует только применения принципа суперпозиции. Однако распределение зарядов не всегда известно. Метод изображений – это полезный частный прием для систем, включающих известные заряды и проводники.

В **проводниках** электрические заряды движутся свободно. Если внести проводник в поле, оно начнет перемещать заряды (другими словами, пойдет ток). Легко видеть, что заряды перемещаются так, чтобы компенсировать внешнее поле. Иначе в куске металла<sup>6</sup> неопределенное время протекал бы ток из-за того только, что к нему поднесли заряд (вечный двигатель). Реально токи идут короткое время, пока не исчезнет поле внутри металла. После установления равновесия в проводнике  $\mathbf{E} = 0$ . Следовательно, в **электростатике** проводники будут эквипотенциалами при любой форме и независимо от распределения зарядов снаружи. (Конечно, конкретные значения потенциалов зависят от этих факторов). Типичная задача электростатики и состоит в нахождении поля

---

<sup>6</sup>Металлы – это наиболее типичные проводники, но есть и много других видов проводников. В принципе, любой материал, хотя бы плохо, проводит ток, но не любой годится для изготовления проводов.

и/или потенциала в области, по крайней мере часть границ которой образована проводниками с известными потенциалами. Электрическое поле всегда перпендикулярно поверхности проводника, как эквипотенциали.

Еще одно свойство проводников: внутри проводника не может находиться нескомпенсированный заряд. Действительно, при нулевом поле нулевым будет и поток через любую замкнутую поверхность, которая уместается целиком внутри проводника. Тогда согласно (1.11) заряд внутри такой поверхности нулевой. Это не значит, что проводник нельзя зарядить. Избыточные заряды на проводнике – совершенно обычное дело, но все они «выталкиваются» на поверхность проводника. Если в проводнике имеется полость, не содержащая зарядов, то и внутри полости поле равно нулю (экранировка).

Поднесем заряд  $q$  к металлической плоскости. Он притянет заряды обратного знака на обращенную к нему поверхность. Силовые линии выходят из заряда и оканчиваются на плоскости перпендикулярно к ней (рис. 1.8). Точно такая же картина поля будет у зарядов  $q$  и  $-q$  (сравните с рис. 1.4). Посредине проходит плоская эквипотенциаль  $\varphi = 0$ . Если на ее место вставить металлическую пластину, поле не изменится. После этого  $-q$  можно убрать. Следовательно, такая же картина поля получится и возле тонкой пластины (целое полупространство не обязательно).

Распределение зарядов на плоскости имитирует заряд  $-q$ , находящийся для наблюдателя с другой стороны плоскости – **изображение** заряда  $q$ . Например, наблюдатель, находящийся с той же стороны, что и  $q$ , чувствует воздействие настоящего  $q$  и фиктивного ( $-q$ ) в симметричном положении за плоскостью. На рис. 1.8 линии поля справа, сходящиеся к фиктивному заряду, показаны пунктиром. На самом деле в металле поля и тем более заряда, симметричного  $q$ , нет. Наблюдатель, расположенный внутри проводника, «видит» настоящий  $q$  и  $-q$ , «наложенный» на него: в итоге получается 0, как и должно быть ( $\mathbf{E} = 0$ ). Из теоремы Гаусса поле на границе  $E = 4\pi\sigma$ , откуда плотность поверхностных зарядов  $\sigma = (1/2\pi)qh/(h^2 + r^2)^{3/2}$ ; здесь  $h$  – расстояние от  $q$  до плоскости,  $r$  – радиус из центра симметрии. Сила взаимодействия заряда с плоскостью такая же, как с фиктивным зарядом:  $F = q^2/4h^2$ . Попробуйте получить эту силу, интегрируя взаимодействия  $\sigma$  и  $q$ .

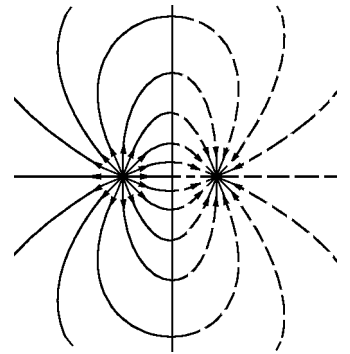


Рис. 1.8.

В общем, если удалось решить задачу с известным распределением зарядов и найти форму эквипотенциалей, то тем самым решен еще класс задач о взаимодействии куска металла в форме любой из этих эквипотенциалей со всеми зарядами, кроме попавших внутрь этого куска. Последние теперь сидят на поверхности, но действуют в наружной области точно, как внутренние. Говорят, что они являются «изображением» внешних зарядов, которые в куске металла видны, как в зеркале (в общем случае кривом).

Например, что «видит» заряд  $q$  в металлическом шаре радиуса  $a$ , находясь на рас-

стоянии  $R > a$ ? Вначале рассмотрим шар с нулевым потенциалом, т.е. заземленный. Известно, что в выпуклом зеркале (самовар, елочный шар) мы видим уменьшенное зеркальное изображение. Попробуем, следуя этой аналогии, поместить внутрь шара, напротив  $q$ , заряд  $-q'$  на некотором расстоянии  $x$  от центра. Взяв любую точку на шаре, расстояния от которой до зарядов  $r_1$  и  $r_2$ , запишем условие  $\varphi = 0 = q/r_1 - q'/r_2$ , откуда  $r_1/r_2 = q/q'$ . В п. 1.2 мы видели, что при  $x = a^2/R$  отношение  $r_1/r_2 = R/a$  для любой точки на сфере. Получаем  $q' = qa/R$ : изображение подобрано. Простое решение получилось благодаря счастливой форме шара; для куба, например, потребуется бесконечное число изображений. Еще раз отметим, что шар при нулевом потенциале (заземленный) имеет ненулевой заряд  $-q'$ ; он пришел из земли, притянутый зарядом  $q$ .

Незаряженный шар получим, поместив дополнительно в центр заряд  $+q'$ . При этом эквипотенциальность не нарушится. В действительности заряды обоих изображений сидят на поверхности шара, создавая некоторую плотность заряда, и кажутся точечными только снаружи. Заметим, что незаряженный шар притягивается к заряду  $q$  (изображение обратного знака находится ближе).

## 1.7 Поле и потенциал диполя

«Голый» заряд встречается в быту не так часто, иначе вокруг постоянно ударяли бы молнии. Обычно заряд компенсирован (например, в атомах). Однако следы распределения заряда и в этом случае могут проявляться. На близких расстояниях не может быть общих и в то же время простых зависимостей, и мы займемся полем системы зарядов на больших расстояниях.

Рассмотрим **диполь**: два заряда  $q$  и  $-q$  на расстоянии  $d$  (рис. 1.9). На большом расстоянии  $R$  расстояния  $r_1$  и  $r_2$  от зарядов до точки наблюдения близки. Потенциал  $\varphi = q \cdot (1/r_1 - 1/r_2) = q(r_1 - r_2)/r_1 r_2 \cong qd \cos \theta / R^2$ . Произведение  $qd$  называют **дипольным моментом**  $p$ . Поскольку входит угол  $\theta$ , естественно считать  $p$  вектором, направленным от  $(-q)$  к  $(+q)$ :  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ . В векторном виде  $\varphi = (\mathbf{p}\mathbf{R})/R^3$ . Поле считается как  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ; в сферических координатах

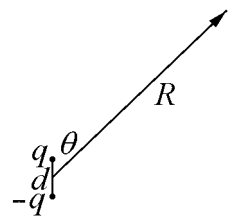


Рис. 1.9.

$$E_R = 2p \cos \theta / R^3, \quad E_\theta = p \sin \theta / R^3.$$

Иногда нужны проекции на направление вдоль оси диполя и перпендикулярное к нему:

$$E_z = p(3 \cos^2 \theta - 1)/R^3, \quad E_\perp = p \cdot (3 \cos \theta \sin \theta)/R^3.$$

Можно было бы получить  $\mathbf{E}$  прямым сложением полей от зарядов, учитывая их почти одинаковую величину и почти противоположное направление. Заметим, что  $\varphi$  и  $E$  спадают с расстоянием быстрее, чем в кулоновском случае.



Для произвольной системы зарядов  $\varphi = \sum q_i/r_i$ . На больших по сравнению с размером системы расстояниях пишем (в том же приближении)

$$r_i = R - \frac{(\mathbf{R}\mathbf{X}_i)}{R},$$

где  $\mathbf{X}_i$  – радиус-вектор заряда  $q_i$ . Получаем

$$\varphi = \frac{\sum q_i}{R} + \frac{\sum q_i(\mathbf{R}\mathbf{X}_i)}{R^3} = \frac{Q}{R} + \frac{(\mathbf{R} \cdot \sum q_i \mathbf{X}_i)}{R^3} = \frac{Q}{R} + \frac{(\mathbf{R}\mathbf{p})}{R^3}.$$

Видно, что дипольный момент системы дается суммой  $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{X}_i$ . Проверьте, что для простейшей системы ( $\pm q$ )  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ . Дипольный момент не зависит от положения начала координат (откуда отмеряются векторы  $\mathbf{X}_i$ ), если полный заряд системы  $Q = 0$ . Если  $Q \neq 0$ , то зависимость будет. К счастью, в этом случае дипольный момент не так нужен, так как первое слагаемое на больших расстояниях преобладает.

Бывает, что и  $Q$  и  $\mathbf{p}$  равны нулю (например, два навстречу направленных одинаковых диполя). Тогда поле спадает еще быстрее и надо учитывать так называемый квадрупольный момент, и т.д. В этом и состоит смысл утверждения, что разноименные заряды компенсируются. Полная компенсация будет только при сферически симметричном распределении заряда, а при любом отклонении поле просто спадает быстрее, чем кулоновское. По сравнению с кулоновским дипольные и более симметричные поля называют короткодействующими. Поэтому, скажем, водяной пар можно считать идеальным газом, хотя у молекул есть заметный дипольный момент. Газ из заряженных частиц (плазма) с далекодействующими кулоновскими силами будет идеальным при сравнительно больших температурах, нежели газ нейтральных молекул.

## 1.8 Конденсаторы. Энергия электрического поля. Электрические натяжения

Простейший – плоский – конденсатор состоит из двух разноименно заряженных пластин (заряды  $\pm\sigma$  на  $\text{см}^2$ ) площади  $S$ , разделенных расстоянием  $d$ . Снаружи системы поле нулевое, внутри  $E = 4\pi\sigma$ . Найдем силу притяжения пластин. Писать  $F = q^2/d^2$  неверно, так как заряды не точечные; правильная сила  $F = q \cdot 2\pi\sigma = qE/2 = 4\pi\sigma^2 S/2$ . Для каждой пластины надо брать внешнее поле – от другой пластины; либо надо учесть, что на заряд  $q$  действует среднее поле по толщине слоя, в котором этот  $q$  распределен. От нуля до  $4\pi\sigma$  среднее как раз  $2\pi\sigma$ .

На единицу площади придется  $F/S = 2\pi\sigma^2 = E^2/8\pi$ . Эту величину, зависящую только от  $E$ , иногда называют давлением электрического поля. Однако это «давление» отрицательно – сила направлена в ту сторону, где поле есть (пластины притягиваются). Правильнее говорить о **натяжении** электрического поля. Можно представлять себе линии поля как некие резинки, растянутые с силой  $E^2/8\pi$  на единицу площади.

Пусть вначале конденсатор был «сплюснен», имея  $d \cong 0$ , а затем его растянули до зазора  $d$ . При этом придется произвести работу  $W = PSd = E^2 Sd/8\pi = (E^2/8\pi) \cdot V$ , где  $V$  – объем конденсатора. Поскольку в системе нет других изменений, кроме появления в объеме поля  $E$ , эту работу следует считать израсходованной на создание энергии электрического поля. Следовательно, энергия единицы объема поля  $E$  равна  $w = E^2/8\pi$ . Если  $E$  переменна в пространстве, полная энергия поля

$$U = \int \frac{E^2}{8\pi} dV . \quad (1.12)$$

*Пример.* Энергия поля сферы радиуса  $r$ , на поверхности которой равномерно распределен заряд  $q$ :  $E = \frac{q}{R^2}$ ,  $U = \int \frac{q^2}{8\pi R^4} \cdot 4\pi R^2 dR = \frac{q^2}{2} \cdot \int_r^\infty \frac{dR}{R^2} = \frac{q^2}{2r}$ .

Как быть с точечными зарядами? Например, у электрона размера пока найти не удалось, а энергия поля в проверенном объеме гораздо больше, чем электрону полагается (забегая вперед: полагается  $mc^2$ ). Реально на малых расстояниях и при больших полях неправильна электростатика (как и вообще классическая электродинамика; это уже отмечалось в п. 1.3).

Казалось бы, вместо (1.12) естественнее написать энергию поля как  $U = \sum q\varphi = \int \rho\varphi dV$ . Проверим: для сферы потенциал на поверхности  $\varphi = q/r$ , весь заряд при этом потенциале,  $\rightarrow U = q^2/r$ . Получилось вдвое больше, поскольку так мы каждое взаимодействие учитываем дважды. Окончательно **в электростатике** формула

$$U = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV \quad (1.13)$$

тоже верна, если правильно выбран потенциал ( $\varphi = 0$  на  $\infty$ ). Подразумевается, что потенциал  $\varphi_i$  в месте расположения заряда  $q_i$  создается всеми зарядами, кроме него самого. Формула (1.12) обычно удобнее и к тому же верна и вне рамок электростатики. Заметим, что для рассмотренного примера  $\rho\varphi/2$  «концентрировано» на поверхности шара, совсем не там, где настоящая плотность энергии поля  $E^2/8\pi$ .

Для плоского конденсатора  $U = 2\pi\sigma^2 Sd = q^2/2C$ . Здесь  $C = S/(4\pi d)$  – **емкость** конденсатора. Емкость имеет размерность длины (в СГС). Вместо плоских одинаковых пластин можно взять любые два куска металла (обкладки), заряд  $q$  с одного переносится на другой и тоже получается конденсатор. Поле в пространстве в общем пропорционально  $q$ , а энергия опять  $q^2/2C$ , причем емкость  $C$  зависит только от геометрии (формы и расположения обкладок). Для простой формы емкость будет порядка размеров; плоский конденсатор ( $d \ll S^{1/2}$ ) не подходит под это правило.

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора. Если текущее напряжение  $V$ , то работа для увеличения заряда на  $dq$  будет  $V dq$ . С другой стороны, эта величина равна изменению энергии конденсатора  $d(q^2/2C) = qdq/C$ . Получаем равенства

$$q = CV, \quad U = \frac{q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2},$$

верные для конденсатора любой формы.

Чтобы найти емкость, конденсатор мысленно заряжают. Затем вычисляется напряжение и по связи  $q = CV$  – емкость. Можно задавать напряжение и рассчитывать заряд, а также определять энергию по заряду либо напряжению.

*Примеры:*

Сферический конденсатор с концентрическими обкладками радиусов  $r$  и  $R$ . Надо интеграл в прошлом примере взять в пределах от  $r$  до  $R$ ,  $U = (q^2/2)(1/r - 1/R)$ , откуда  $C = rR/(R - r)$ . Проверьте, что при малом зазоре  $R - r$  это переходит в формулу для плоского конденсатора. При  $R = \infty$  имеем  $C = r$ . Можно говорить о емкости шара (равной радиусу), имея в виду емкость между ним и землей, эквивалентной бесконечно удаленной второй сфере.

Цилиндрический конденсатор. Радиусы те же, длина  $L$ . Заряжаем зарядом  $q$  внутреннюю обкладку, на внешней  $-q$ . Внутри поле  $2\lambda/r = 2q/(Lr)$ , снаружи нуль. Напряжение  $V = \int 2q/(Lr)dr = (2q/L) \ln(R/r)$ . Емкость  $C = L/(2 \ln(R/r))$ .

Способность конденсаторов накапливать энергию ограничена опасностью пробоя. Если между пластинами воздух, то предельное  $E < 30$  кВ/см, или 100 СГС, откуда  $w < 500$  эрг/см<sup>3</sup> = 50 Дж/м<sup>3</sup>. Разные ухищрения увеличивают плотность энергии не более чем на 1 ÷ 2 порядка. Зато конденсаторы содержат высококачественную энергию в отличие от дров и т.п. и развивают при разряде большую мощность.

В СИ емкость измеряется в **фарадах**. Эту единицу<sup>7</sup> можно найти, зная вольт:  $\Phi \cdot \text{В}^2 = \text{Дж}$ , откуда  $1 \Phi = 10^7 \cdot 300^2 = 9 \cdot 10^{11}$  см. Емкость человека около 30 ÷ 50 см или почти столько же пФ. Пико ( $10^{-12}$ ) – это, без сомнения, довольно редкая приставка, т.е. фарада – крайне неудобная единица.

Последовательное соединение  $C_1$  и  $C_2$ :  $q$  один, а  $V$  складываются;  $\rightarrow 1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ . Параллельное:  $C = C_1 + C_2$ . Еще бывают **никакие** соединения (не сводящиеся к параллельному и последовательному). Тогда нужно честно находить состояние каждого конденсатора в цепи, из тех условий, что суммарный заряд в узлах равен нулю (или заданному  $q$  для входного и выходного узла) и сумма напряжений по любому замкнутому контуру нулевая. Затем делим  $q$  на суммарное напряжение между входным и выходным узлом.

Рассмотрим металлическую пластину, помещенную в плоский конденсатор (рис. 1.10). Пусть на обкладках конденсатора помещены заряды  $\pm q$ . Энергия системы  $U = q^2/2C(x)$ , где  $C(x)$  – емкость, зависящая от расстояния  $x$ , на которое вставлена пластина:

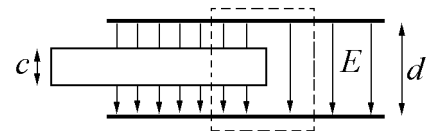


Рис. 1.10.

$$C(x) = \frac{b}{4\pi} \left( \frac{x}{d-c} + \frac{a-x}{d} \right) = \frac{ab}{4\pi d} + \frac{bx}{4\pi} \left( \frac{1}{d-c} - \frac{1}{d} \right),$$

$a$  – длина обкладок,  $b$  – ширина обкладок (перпендикулярно плоскости рисунка). По-

<sup>7</sup>В последнее время (где-то между 1977 и 1980 г.) фарада «сменила пол» и теперь называется фарад. Мы предпочитаем женский род, как в старину, в основном потому, что дольные единицы: один микрофарад, один пикофарад звучат несколько дико.

сколькx энергия уменьшается с возрастанием  $x$ , пластина втягивается с силой

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx} = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx} = \frac{V^2 b}{8\pi} \left( \frac{1}{d-c} - \frac{1}{d} \right).$$

В таком направлении силы легко убедиться, рассмотрев картину силовых линий вблизи торца пластины. Замечательно, что втягивание – в чистом виде краевой эффект, но энергетический подход позволил решить задачу, не рассматривая неоднородностей поля явно (область неоднородности смещается вместе с пластиной, и связанная с неоднородностью часть энергии поля постоянна).

Рассмотрим ту же задачу, используя электрическое давление. Поле в свободной части конденсатора  $E = E_y = V/d$ , тогда в зоне пластины  $E_1 = V/(d-c)$ . Выделяем поверхность с границами вне зоны краевого эффекта (показана пунктиром). Сила справа  $bdE^2/8\pi = bV^2/8\pi d$ , сила слева  $b(d-c)E_1^2/8\pi = bV^2/8\pi(d-c)$ , их разность  $(bV^2/8\pi)(1/(d-c) - 1/d)$ . Выходит тот же результат, что и при энергетическом подходе; правильный знак силы (пластина втягивается) получается, если силовым линиям приписать давление  $E^2/8\pi$  поперек их направления. Обратите внимание, что сила, вычисляемая по натяжениям, приложена «к пустому месту», а реально втягивающая сила действует на торец металлической пластины, где собираются поляризационные заряды. Следовательно, действие электрических давлений/натяжений на элементарную площадку физического смысла не имеет, а правильный результат получается только для полной замкнутой поверхности.

Таким образом, электрическое поле можно рассматривать как некоторую упругую среду, для которой не выполняется закон Паскаля: вдоль силовых линий действует натяжение  $E^2/8\pi$  (как будто это натянутые резинки), а поперек – давление  $E^2/8\pi$  (как будто резинки друг от друга отталкиваются).

Сейчас уместно вспомнить об элементарном заряде. Милликен помещал маленькие электрически заряженные капли в конденсатор. Без поля капли падают с постоянной скоростью  $mg/(6\pi\eta R)$ , которую можно измерить непосредственно. Затем, включая поле, можно капли уравновесить или заставить их падать вверх. По величине напряжения на конденсаторе определяется уравновешивающая сила  $qE$ . Оказалось, что заряд капли меняется только квантами величины  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  СГС.

В заключение напомним основные уравнения электростатики:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q \quad \text{по любой замкнутой поверхности } S$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{L} = 0 \quad \text{по любому контуру } L.$$

Это – два из **уравнений Максвелла** (для случая электростатики). Дальше мы увидим, как они изменятся в более общем случае и как к ним добавятся новые.

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Курс лекций для ФМШ

ДИЭЛЕКТРИКИ

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

## Глава 2

# ДИЭЛЕКТРИКИ

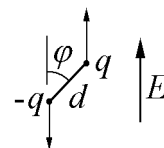
Противоположностью проводникам являются **изоляторы**, или **диэлектрики**, в которых заряды не могут свободно двигаться по всему объему. Однако любой атом или молекула состоят из электрических зарядов, которые, разумеется, реагируют на электрическое поле. Поэтому и диэлектрик как целое взаимодействует с полем. Механизмы такого взаимодействия и его следствия рассмотрены в этой главе.

## 2.1 Поляризуемость

### 2.1.1 Диполь во внешнем поле

Некоторые диэлектрики **полярны** – состоят из молекул, имеющих дипольный момент. Естественный масштаб дипольного момента – произведение заряда электрона  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  СГС на атомный размер  $a \simeq 10^{-8}$  см<sup>1</sup>. Реально «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов разнесены на меньшее расстояние, и типичное значение  $p$  порядка  $10^{-18}$  СГС. Эта внесистемная единица называется **дебай**. Например, дипольный момент молекулы воды 1,85 дебая.

На диполь в поле  $\mathbf{E}$  будет действовать пара сил, разворачивающая его вдоль поля. Момент сил  $\tau = qEd \sin \varphi = pE \sin \varphi$  (угол  $\varphi$  от направления  $E$ ). Потенциальная энергия диполя, отсчитанная от «нейтрального» положения поперек поля:



$$U = -q(d/2) \cos \varphi \cdot E - q(d/2) \cos \varphi \cdot E = -pE \cos \varphi = -(\mathbf{pE}). \quad \text{Рис. 2.1.}$$

Это не значит, что все диполи повернутся вдоль поля. Тепловое движение препятствует этой ориентации. С учетом столкновений молекул в дипольном газе установится равновесие. Теория и опыт показывают, что в типичных условиях диполей, ориентированных вдоль поля, лишь немного больше, чем тех, которые «смотрят» против поля. Средняя проекция дипольного момента на направление поля

$$\langle p \rangle = \alpha_1 E,$$

<sup>1</sup>Единица длины  $10^{-8}$  см, удобная для атомных явлений, называется ангстрем (Å).

т.е. пропорциональна полю. Коэффициент  $\alpha_1$  зависит от вида молекулы (ее дипольного момента) и температуры. В поле 30 кВ/см молекула воды в среднем ориентирована на  $\cong 10^{-3}$ . Эта малая, по видимости, доля достаточна, чтобы существенно изменить поле в среде, из-за относительно большой величины дипольного момента  $p$ .

### 2.1.2 Наведенная поляризация

Бывают также **неполярные** диэлектрики, молекулы которых не имеют собственного дипольного момента. Таковы, например, симметричные молекулы типа  $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}_2$ . Однако во внешнем поле заряды неизбежно «разъедутся», и некоторый дипольный момент появится (**наведенная** поляризация).

Простая модель – атом Томсона: электрон  $e^-$  сидит в центре шара, равномерно заряженного зарядом  $e^+$ . Внешнее поле  $E$  сместит электрон из центра на расстояние  $x$ . В равновесии  $E = ex/a^3$ , где  $a$  – радиус атома. Смещение  $x = Ea^3/e$ , а наведенный дипольный момент

$$p = ex = \alpha_2 E,$$

где коэффициент  $\alpha_2 = a^3$ . Это, разумеется, приблизительная оценка. Но точные расчеты и опыт подтверждают, что в неполярных веществах  $\alpha_2$  порядка объема молекулы.

Следовательно, в обоих типах диэлектриков во внешнем поле  $E$  молекула приобретает дипольный момент

$$p = \alpha E.$$

Коэффициент  $\alpha$  зависит от вещества и называется **поляризуемостью**.

В однородном поле суммарная сила, действующая на диполь, нулевая. В неоднородном, например вблизи заряда  $q$ , диполь ориентируется так, чтобы притягиваться к  $q$  (т.е. втягиваться в область сильного поля).

## 2.2 Поле в среде. Векторы поляризации и электростатической индукции

Каждая молекула диэлектрика в поле  $E$  приобретет момент  $p = \alpha E$ . Если молекулы заметно не влияют друг на друга, то дипольный момент единицы объема

$$\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E} = \chi\mathbf{E}.$$

Здесь  $n$  – плотность, или концентрация молекул (штук в  $\text{см}^3$ ).  $\mathbf{P}$  называется **вектором поляризации**; его размерность такая же, как у поля. Безразмерная величина  $\chi$  – **диэлектрическая восприимчивость**. В следующем параграфе мы увидим, что  $\chi$  не точно равно  $n\alpha$  из-за взаимного влияния молекул, но равенство  $\chi = n\alpha$  не так существенно. Важно, что  $\mathbf{P}$  пропорционален  $\mathbf{E}$ .

Поляризовать диэлектрик можно, внося его в заряженный конденсатор (рис. 2.2). Пластины создают поле  $E_{\text{out}}$ ; в диэлектрике возникнет поляризация  $P$ . Суммарный дипольный момент диэлектрика будет  $PV = PSd$ , где  $S$  – площадь,  $d$  – толщина образца диэлектрика. С другой стороны, если каждая молекула поляризуется, т.е. заряды в ней разойдутся, то справа на поверхности диэлектрика «вылезет» поляризационный поверхностный заряд  $+\sigma_p$ , а слева будет  $-\sigma_p$ . Внутри же диэлектрик будет нейтральным. Дипольный момент образца можно написать и как  $(\sigma_p \cdot S) \cdot d$ , откуда  $\sigma_p = P$ . Если вектор  $\mathbf{P}$  направлен под углом к поверхности, надо брать нормальную составляющую; окончательно  $\sigma_p = P_{\perp}$ .

Из рис. 2.2 ясно, что поляризационные заряды ослабляют поле в диэлектрике. Снаружи<sup>2</sup>  $E_{\text{out}} = 4\pi\sigma$ , а внутри  $E_{\text{in}} = 4\pi(\sigma - \sigma_p)$ . Вспомним, что  $\sigma_p = P$  и что в вакууме  $P = 0$ , так как вакуум не поляризуется. Тогда можно записать равенство:

$$(E + 4\pi P)_{\text{out}} = (E + 4\pi P)_{\text{in}},$$

то есть вектор  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  в данном случае одинаков внутри диэлектрика и вне его. В то время как поле  $\mathbf{E}$  ослабляется поляризационными зарядами,  $\mathbf{D}$  их «не чувствует».

Рассмотрим теорему Гаусса для поверхностей, показанных пунктиром на рис. 2.3. Для поля  $\mathbf{E}$  считается **весь** заряд, сидящий внутри, включая поляризационный (случай а):

$$ES = 4\pi Q = 4\pi(\sigma S - \sigma_p S).$$

Если поверхность не захватит диэлектрик, в правой части будет другая величина:  $4\pi\sigma S$  (случай б). Теперь напишем то же для вектора  $\mathbf{D}$ :

$$DS = (ES + 4\pi PS) = 4\pi(\sigma S - \sigma_p S) + 4\pi\sigma_p S = 4\pi\sigma S$$

независимо от того, захватывает замкнутая поверхность диэлектрик или нет.  $\mathbf{D}$  называют **вектором электростатической индукции** (короче – вектором индукции), иногда – вектором смещения (англ. displacement); он устроен так, что его источниками являются только **свободные** заряды. Окончательно теорема Гаусса для  $\mathbf{D}$  имеет вид:

$$\oint (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = 4\pi Q_{\text{своб}}, \quad (2.1)$$

где  $Q_{\text{своб}}$  – полный свободный заряд внутри  $S$ . Никакие поверхности диэлектриков с поляризационными зарядами на них, даже попавшие внутрь  $S$ , не влияют на правую часть теоремы Гаусса (2.1) для  $\mathbf{D}$ .

<sup>2</sup>Снаружи диэлектрика, но, конечно, внутри конденсатора.

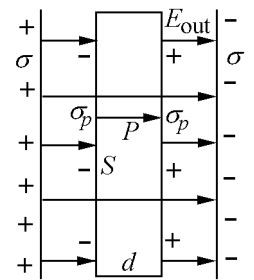


Рис. 2.2.

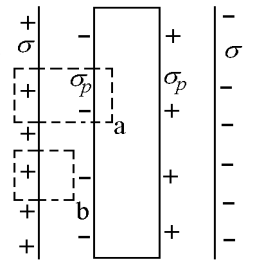


Рис. 2.3.



## 2.3 Диэлектрическая проницаемость. Условия на границе двух сред

Введение нового неизвестного  $D$  упрощает решение некоторых задач. Пусть свободный заряд  $q$  окружен диэлектрическим шаром радиуса  $R$ . Как найти поле, сразу не ясно: оно зависит в том числе от неизвестных заранее поверхностных зарядов. Индукция же  $D$  находится легко из (2.1):  $D = q/r^2$  как внутри, так и вне шара.

Чтобы найти поле  $E$ , запишем  $D = E + 4\pi P = E + 4\pi\chi E = (1 + 4\pi\chi)E = \varepsilon E$ . Видно, что вещество удобнее характеризовать не диэлектрической восприимчивостью  $\chi$ , а **диэлектрической проницаемостью**  $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ . У вакуума  $\varepsilon = 1$ , у воды 80, у воздуха 1,00057. В нашем примере внутри шара с проницаемостью  $\varepsilon$ :  $E = q/(\varepsilon r^2)$ , вне его  $E = q/r^2$ . В конденсаторе из предыдущего параграфа  $D = 4\pi\sigma$ ,  $\rightarrow E = 4\pi\sigma$  вне диэлектрика,  $E = 4\pi\sigma/\varepsilon$  внутри диэлектрика.

Простота этих примеров позволяет легко впасть в заблуждения, вроде того, что индукция вообще не зависит от диэлектрика и равна полю, которое создавали бы свободные заряды в вакууме. Рассмотрим диэлектрический шар в однородном внешнем поле  $E_0$ . Шар поляризуется, и на его поверхности возникают поляризационные заряды; внутри поле будет ослаблено. Попробуем аналогию с металлическим шаром. Для него снаружи поле было суммой внешнего  $E_0$  и дипольного, а внутри нулевое.

Теперь внутри, конечно, не нуль; мы предположим, что будет однородное поле  $E_1$  (рис. 2.4). Тогда вектор поляризации  $P = \chi E_1$  и дипольный момент шара  $p = 4\pi R^3 \chi E_1/3$ . Потенциал снаружи у поверхности:  $\varphi(R+0) = -E_0 R \cos \theta + p \cos \theta/R^2$ . Внутри  $\varphi(R-0) = -E_1 R \cos \theta$ . Приравняем их и учтем выражение для  $p$ ; имеем  $E_1 = E_0/(1 + 4\pi\chi/3) = 3E_0/(\varepsilon + 2)$ . Поскольку  $\varepsilon > 1$ , поле ослабляется, но отнюдь не в  $\varepsilon$  раз; соответственно индукция  $D = \varepsilon E = 3\varepsilon E_0/(\varepsilon + 2)$  вовсе не равна полю свободных зарядов  $E_0$ .

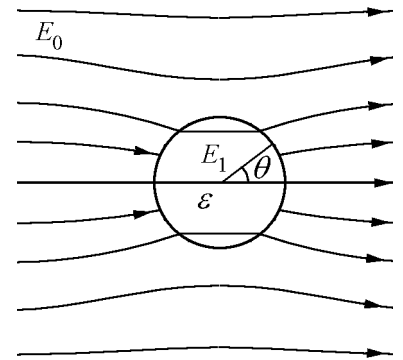


Рис. 2.4.

Неверно, что индукция не зависит от поляризационных зарядов; правильнее сказать, что поляризационные заряды **не являются ее источниками** (не входят в теорему Гаусса). Отсюда следует, что на поверхности раздела диэлектриков нормальная (перпендикулярная) составляющая  $D$  остается непрерывной. Это легко показать, поместив границу внутрь замкнутой поверхности и применив теорему: поток  $D$  нулевой, так как нет свободных зарядов. Параллельная (тангенциальная) компонента  $D$  может испытывать скачок на границе раздела. Наоборот, тангенциальная компонента обычного поля  $E$  непрерывна (иначе можно сделать вечный двигатель, гоня заряд по замкнутому контуру вблизи поверхности). Выпишем условия на границе раздела:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2},$$

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2} \quad . \quad (2.2)$$

Второе условие мы использовали уже в прошлом примере, приравнивая потенциалы.

Еще часто думают, что диэлектрик всегда ослабляет поле внутри себя, а снаружи не меняет. Но у полюсов того же шара снаружи поле усиливается: подобно металлу, диэлектрик собирает на себя часть силовых линий и «выдает» их с другой стороны. Проводник можно трактовать как диэлектрик с  $\varepsilon = \infty$ .

Не лишне добавить, что индукция  $\mathbf{D}$  – это не настоящее поле, а величина, вводимая для удобства, чтобы решать задачи. Настоящее среднее поле в веществе  $\mathbf{E}$ ; в частности потенциал  $\varphi$  связан именно с ним:  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ .

Часто важно знать поле внутри полости в диэлектрике. Если имеется узкая щель поперек поля, то по первому из условий (2.2) внутри  $E_{in} = \varepsilon E = E + 1 \cdot 4\pi P$ ; в случае узкой продольной щели из второго условия  $E_{in} = E = E + 0 \cdot 4\pi P$ . Для сферической полости будет нечто среднее, а именно

$$E + 4\pi P/3 = E + (\varepsilon - 1)E/3 = (\varepsilon + 2)E/3.$$

Коэффициент при  $4\pi P$  не так важен, но ясно, что поле в полости **больше** среднего в диэлектрике. Примерно такое поле действует на молекулу внутри вещества. Тогда дипольный момент этой молекулы  $p = \alpha(\varepsilon + 2)E/3$ , а дипольный момент единицы объема – вектор поляризации  $P$  – будет  $n\alpha(\varepsilon + 2)E/3$ . Он также равен  $(\varepsilon - 1)E/4\pi$ , откуда получаем формулу Клаузиуса-Моссотти:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi n\alpha}{3} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{1 + 8\pi n\alpha/3}{1 - 4\pi n\alpha/3}.$$

При большой плотности  $n$  проницаемость  $\varepsilon$  может быть гораздо больше, чем примитивное приближение  $1 + 4\pi n\alpha$  (знаменатель может быть близок к нулю: в конденсированных веществах доля объема, занимаемая молекулами,  $n\alpha \sim 1$ ). В некоторых кристаллах – сегнетоэлектриках – достигается  $\varepsilon$  порядка 10000.

## 2.4 Энергия поля в среде

Рассмотрим конденсатор, заполненный диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ . При заряде  $q$  поле будет  $E = 4\pi q/\varepsilon S$ , напряжение  $V = 4\pi qd/\varepsilon S$ . Емкость  $C = q/V = \varepsilon S/4\pi d$  возросла в  $\varepsilon$  раз. (Поэтому-то некоторые конденсаторы имеют неожиданно, для их размеров, большую емкость).

Если на конденсаторе имелось напряжение  $V$ , то увеличение заряда на  $\Delta q$  требует работы  $\Delta A = V\Delta q$ , а работа по зарядке конденсатора от нуля

$$A = \int_0^q V dq = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C}.$$

Эта формула не чувствительна к присутствию диэлектрика. Учитывая теперь зависимость  $C$  от  $\varepsilon$ , получим, что при том же заряде  $q$  (который определяет индукцию  $D$ ) энергия уменьшается в  $\varepsilon$  раз, так что плотность энергии

$$w = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

Второе равенство показывает, что при заданном напряжении  $V$  (которое определяет поле  $E$ ) энергия конденсатора с диэлектриком в  $\varepsilon$  раз больше. Выражение  $w = \varepsilon E^2/(8\pi)$  нетривиально. Раз настоящее среднее поле – это  $E$ , как будто должна быть энергия  $E^2/8\pi$ . Здесь влияют два фактора: средний квадрат больше квадрата среднего, а кроме того,  $w$  по смыслу вычисления включает работу растяжения диполей. Например, в газе уместно пренебречь концентраторами поля типа Клаузиуса-Моссотти; электрическая энергия  $w_e = E^2/8\pi$ , а упругая  $w_y = nkx^2/2$ , если диполи растягиваются как пружинки. Но  $eE = kx$ ,  $w_y = neEx/2 = npE/2 = n\alpha E^2/2 = (\varepsilon - 1)E^2/8\pi$ . Полная  $w = w_e + w_y = \varepsilon E^2/8\pi$ .

Силы в диэлектриках тоже изменяются. Возьмем конденсатор с вертикально расположенными пластинами размера  $a \times b$ , частично заполненный (снизу до уровня  $x$ ) жидким диэлектриком. Емкость его

$$C(x) = \frac{\varepsilon xb}{4\pi d} + \frac{(a-x)b}{4\pi d} = C_0 \cdot \left(1 + \frac{(\varepsilon - 1)x}{a}\right).$$

Зарядим конденсатор зарядом  $q$ . При смещении уровня жидкости на  $dx$  изменение энергии  $dU = (dU/dx) \cdot dx$ . Сила  $F = dU/dx = (q^2/2C^2) \cdot dC/dx$ , или  $(V^2/2) \cdot C_0(\varepsilon - 1)/a = (\varepsilon - 1) \cdot (E^2/8\pi) \cdot bd$ . Диэлектрик втягивается в конденсатор (сила положительна, энергия уменьшается при увеличении  $x$ ). Можно усмотреть разность электрических давлений, приложенную на площади  $bd$ :  $E$  одинаково, сверху  $E^2/8\pi$ , снизу  $\varepsilon E^2/8\pi$ . Обратите внимание, что проводник (меньших габаритов) тоже втягивается, но по другой причине: появляются заряды на верхней грани, см. п. 1.8. Диэлектрик этих зарядов не имеет ( $E$  параллельно поверхности); но у него зато диполи втягиваются в поле (в нижней части конденсатора, где поле неоднородно).

Если начать с формулы  $U = CV^2/2$ , считая  $V$  постоянным, сила будет другого знака (при втягивании энергия растет). Это потому, что не учтена работа источника, поддерживающего разность потенциалов  $V$ :  $\Delta A = V\Delta q = V^2\Delta C$ . Если ее учесть, все будет в порядке.

Уменьшенное значение энергии  $q^2/(2C_0\varepsilon)$  мы должны получить, растягивая заряженный конденсатор, залитый диэлектриком. Значит, при том же заряде  $q$  сила притяжения пластин уменьшится в  $\varepsilon$  раз<sup>3</sup>. Натяжение вдоль линий поля можно записать как  $D^2/8\pi\varepsilon = \varepsilon E^2/8\pi = ED/8\pi$ .

<sup>3</sup>Это верно и для любых зарядов в неограниченной диэлектрической среде.

Выпишем, как основной результат главы, электростатические уравнения Максвелла в присутствии диэлектрика:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi q \quad (q - \text{свободный заряд внутри замкнутой поверхности } S),$$
$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{L} = 0 \quad \text{по любому контуру } L,$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

На границах раздела выполняются условия:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}, \quad E_{\tau 1} = E_{\tau 2}.$$

## Глава 3

# ПОСТОЯННЫЙ ТОК

### 3.1 Электрический ток. Сопротивление. Закон Ома

Ток через некоторую площадь  $S$  (допустим, сечение проводника) определяется, как заряд, проходящий сквозь эту  $S$  в единицу времени:

$$I = dq/dt .$$

В СИ как раз основная единица не кулон, а ампер:  $1 \text{ A} = 1 \text{ Кл/с} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГС}$ . **Плотность тока**  $j$  – это ток через  $1 \text{ см}^2$ ,

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad \text{или} \quad I = \int_S (j dS) .$$

Поверхность  $S$ , через которую идет ток, обычно (но не всегда) **не** замкнутая. Из второй формулы видно, что  $\mathbf{j}$  – это вектор; первая же определяет, собственно, перпендикулярную к площадке  $\Delta S$  компоненту  $\mathbf{j}$ . Ток  $I$  – скаляр, тем более что  $S$  не обязательно плоская (для которой велико искушение считать ток вектором). Например, ток может растекаться вообще во все стороны от заряда, помещенного в проводящую среду. Легко заметить, что

$$\mathbf{j} = nev ,$$

где  $n$  – концентрация шт/см<sup>3</sup> носителей заряда величины  $e$ ;  $\mathbf{v}$  – их средняя скорость.

В поле  $\mathbf{E}$  на электрон действует сила  $e\mathbf{E}$ . За время  $t$  электрон наберет скорость  $v = eEt/m$ . В каждом нормальном проводнике по истечении времени свободного пробега  $\tau$  происходит соударение с препятствием (в металле – с ионами кристаллической решетки), и электрон «забывает» направление скорости. Средняя скорость  $\langle v \rangle$  будет порядка  $a\tau = eE\tau/m$ . Плотность тока  $j = ne\langle v \rangle = (ne^2\tau/m) \cdot E = \sigma E$ . **Электропроводность**  $\sigma$  – свойство вещества – измеряется (в СГС) в обратных секундах. Равенство

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

называется **законом Ома** в дифференциальной форме.

В проводе сечения  $S$  ток  $I = jS$ , напряжение  $V = EL$ , так что

$$I = V \cdot (\sigma S/L) = V/R .$$

Это – **интегральная** форма закона Ома. Сопротивление  $R = L/\sigma S$  в СГС имеет размерность с/см. Удельное сопротивление  $\rho = 1/\sigma$ .

В металле, казалось бы, из-за тесноты электропроводность должна быть мала (сопротивление велико). Но оказывается, что электроны рассеиваются не на атомах, а на колебаниях решетки. Поэтому сечение рассеяния  $s \sim x^2$  ( $x$  – амплитуда колебаний атомов) гораздо меньше квадрата атомных размеров. Энергия колебаний (т.е.  $x^2$ ) пропорциональна абсолютной температуре  $T$ . Поэтому в чистых металлах электропроводность обратно пропорциональна  $T$ . Для меди при нормальных условиях  $\sigma = 5,5 \cdot 10^{17}$  1/с. Провод в 1 м сечением 1 мм<sup>2</sup> имеет сопротивление  $2 \cdot 10^{-14}$  с/см.

Форма закона Ома в СИ такая же, как в СГС; единица сопротивления Ом = В/А = 1/(9 · 10<sup>11</sup>) с/см; сопротивление рассмотренного выше провода будет  $2 \cdot 10^{-2}$  Ом, т.е. при токе 1 А на проводе будет напряжение 0,02 В. Медь – один из лучших проводников.

Пусть два хороших проводника помещены в среду, электропроводность которой  $\sigma$  сравнительно невелика. На проводниках имеются заряды  $\pm q$ , создающие поле  $\mathbf{E}$  и, значит, ток через поверхность, содержащую один из проводников,  $I = \oint \sigma \mathbf{E} d\mathbf{S} = \sigma \cdot 4\pi q$ . Напряжение  $V = q/C$ . Получаем  $I = (4\pi\sigma C) \cdot V$ , то есть сопротивление  $R$  связано с емкостью  $C$ :

$$4\pi\sigma RC = 1 .$$

Если измерить  $R$  между проводниками, тогда легко находится и  $C$  (которую измерять обычно сложнее).

Оценим время  $\Delta t$  рассасывания скопления избыточного заряда  $\Delta q$  внутри однородного проводника. Ток опять будет  $\sigma \cdot 4\pi\Delta q = dq/dt \sim \Delta q/\Delta t$ . Время  $\Delta t = 1/(4\pi\sigma)$ . Даже в таких плохих проводниках, как дистиллированная вода ( $\sigma \sim 10^{-6}$  Ом<sup>-1</sup>см<sup>-1</sup>  $\simeq 10^6$  1/сек) заряд исчезнет мгновенно, но в хороших диэлектриках может держаться часами. Зная время разрядки статических зарядов, можно оценить электропроводность изоляторов. Абсолютных изоляторов не бывает, в отличие от абсолютных проводников. В любом изоляторе, хотя бы в малом количестве, имеются носители заряда, которые и приводят к постепенной разрядке.

## 3.2 Сторонняя эдс. Источники тока

В электростатике работа  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру нулевая. Аналогично при катании на санках нельзя по замкнутому пути все время ехать под действием тяжести. Нужно внешнее воздействие (например, канат подъемника), чтобы вернуть сани на гору.

В источниках тока именно и действует внешняя, или сторонняя, сила неэлектростатического происхождения. Работа этой силы в расчете на единичный заряд при прохождении через источник и называется **электродвижущей силой**, кратко эдс. Размерность эдс – как у напряжения. «Неправильным» названием не надо смущаться, так как еще недавно кинетическую энергию называли живой силой. Можно представить себе внутри источника каких-то человечков, которые толкают заряды против поля.

Вне источника трение (сопротивление) уравнивается электрическим полем. Внутри, поскольку  $\oint \mathbf{E}d\mathbf{L} = 0$ , электрическое поле направлено против тока, а движение зарядов против трения и поля  $\mathbf{E}$  обеспечивает эдс (рис. 3.1).

Обозначаем стороннюю силу на один электрон  $f_{\text{СТ}}$ , силу трения в источнике  $f_{\text{ТР}}$ . Уравнение постоянства тока:

$$f_{\text{СТ}} = eE + f_{\text{ТР}} .$$

Деля на  $e$  и умножая на толщину  $L$  слоя, где генерируется сторонняя сила в источнике, получаем

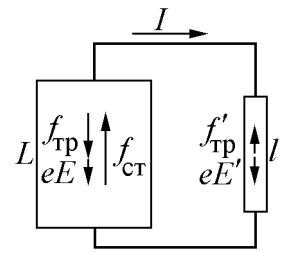


Рис. 3.1.

$$f_{\text{СТ}}L/e = EL + f_{\text{ТР}}L/e .$$

$EL$  – это напряжение, набранное в источнике; из потенциальности электрического поля оно такое же, как  $E'l$  на внешней цепи. Если источник замкнут на сопротивление  $R$ , то напряжение на этом сопротивлении  $E'l = RI$  по закону Ома. Так как в сопротивлении уравновешены электрическая сила и трение:  $eE' = f'_{\text{ТР}}$ , это же напряжение  $RI$  можно записать как  $E'l = f'_{\text{ТР}}l/e$ . Поэтому слагаемое  $f_{\text{ТР}}L/e$  естественно обозначить  $rI$ ;  $r$  называется **внутренним сопротивлением** источника. Наконец,  $f_{\text{СТ}}L/e$  – это и есть эдс  $\mathcal{E}$ . Выходит так называемый закон Ома для замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = I \cdot (R + r) .$$

Мощность, развиваемая при прохождении тока  $I$  через ветвь, на которой имеется напряжение  $V$ , будет  $N = I \cdot V$ , поскольку  $V$  – это работа на единичный заряд, а  $I$  – заряд в единицу времени. Если ток идет через сопротивление  $R$ , получаем закон Джоуля-Ленца:

$$N = RI^2 = \frac{V^2}{R} .$$

Для простейшей замкнутой цепи на сопротивлении нагрузки  $R$

$$N = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} .$$

Она достигает максимума при  $R = r$ . Максимум кпд равен 1 при  $R = \infty$ .

### 3.3 Правила Кирхгофа

В любых цепях постоянного тока выполняются правила, или законы Кирхгофа:

$$\sum I_i = 0 \quad \text{в любом узле} \quad (1 \text{ правило})$$

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum (RI)_i \quad \text{по любому замкнутому контуру} \quad (2 \text{ правило}).$$

Правило 1 выражает ненакопление заряда в узлах, 2 – обобщение закона Ома для замкнутой цепи. Разумеется, необходим учет знаков.

При последовательном соединении сопротивлений  $R = R_1 + R_2$ , при параллельном  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ . Это легко получить из законов Кирхгофа. Важно, что, как и с конденсаторами, бывают «никакие» соединения, не сводящиеся к параллельным и последовательным. Для таких сложных цепей и приходится применять законы Кирхгофа. Уравнений легко получить больше, чем неизвестных, поэтому уравнения надо подбирать из соображений простоты и независимости.

Разберем пример. На схеме рис. 3.2 сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  можно понимать как внутренние для источников  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , а  $R$  – общая нагрузка. Допустим, что к лампочке подсоединили параллельно две разные батарейки. Законы Кирхгофа имеют вид:

$$I = I_1 + I_2, \quad \mathcal{E}_1 = r_1 I_1 + RI, \quad \mathcal{E}_2 = r_2 I_2 + RI.$$

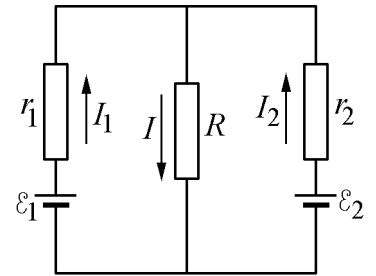


Рис. 3.2.

Решение:

$$I_1 = \frac{(R + r_2)\mathcal{E}_1 - R\mathcal{E}_2}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}, \quad I_2 = \frac{(R + r_1)\mathcal{E}_2 - R\mathcal{E}_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}, \quad I = \frac{r_2 \mathcal{E}_1 + r_1 \mathcal{E}_2}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Иногда полезны модификации этих законов. В **методе контурных токов** разыскиваются токи не в ветвях, а в контурах. Токи в ветвях – это суммы контурных токов для всех контуров, содержащих данную ветвь. Уравнения для контурных токов  $J_1$  и  $J_2$  для той же схемы (рис. 3.3):

$$\mathcal{E}_1 = r_1 J_1 + R(J_1 + J_2), \quad \mathcal{E}_2 = r_2 J_2 + R(J_1 + J_2).$$

Видно, что уравнений получается меньше. Для такой простой схемы выгода невелика, но в более сложных случаях сокращение числа уравнений очень помогает. Конечно, реальные токи через сопротивления получатся те же самые (здесь контурные токи  $J_1$  и  $J_2$  совпадают с токами в боковых ветвях  $I_1$  и  $I_2$ , а ток через нагрузку – их сумма).

В **методе суперпозиции**, когда имеется много батареек, находится вклад в суммарный ток от каждой из них, причем остальные заменяются внутренними сопротивлениями (в простейшем случае, когда внутренние сопротивления малы, батарейки просто



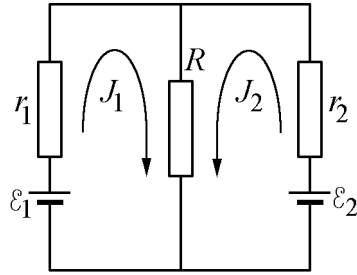


Рис. 3.3.

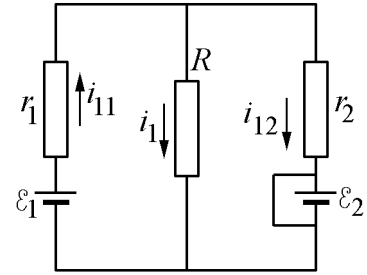


Рис. 3.4.

закорачиваются). Например, закоротим  $\mathcal{E}_2$  (рис. 3.4). Это настолько упрощает схему, что уже можно применять «последовательно-параллельные» формулы. Сразу находим три тока, порождаемых первой батареей (о чем говорит индекс 1):

$$i_{11} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + Rr_2/(R + r_2)} = \frac{\mathcal{E}_1(R + r_2)}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)},$$

$$i_1 = \frac{i_{11}r_2}{R + r_2} = \frac{\mathcal{E}_1r_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}, \quad i_{12} = \frac{i_{11}R}{R + r_2} = \frac{\mathcal{E}_1R}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Теперь надо убрать закоротку  $\mathcal{E}_2$  и закоротить  $\mathcal{E}_1$ . Для токов  $i_{22}$ ,  $i_2$ ,  $i_{21}$ , созданных второй батареей, получатся такие же формулы с очевидными заменами. И, наконец, надо сложить действие батареек. Например, ток в нагрузке

$$I = i_1 + i_2 = \frac{\mathcal{E}_1r_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)} + \frac{\mathcal{E}_2r_1}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Разумеется, это совпадает с током, полученным из обычных уравнений Кирхгофа.

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Курс лекций для ФМШ

## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

## Глава 4

# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

С древности известны постоянные магниты. Их особые свойства объясняются присутствием нового (для нас) – **магнитного** поля  **$H$** .

При изучении магнитного поля полезна аналогия с электрическим. Магнитное поле, разумеется, не точно подобно электрическому (тогда в нем не было бы надобности), а служит дополнением к  **$E$** , вызывая явления не в точности обратные, а как бы «перпендикулярные». Далее мы увидим, что  **$H$**  и  **$E$**  – это проявления (приблизительно – разные компоненты) единого **электромагнитного** поля.

### 4.1 Сила Лоренца. Движение заряда в однородном магнитном поле

Увидеть действие магнитного поля можно в опыте с осциллографом. Это прибор, в котором пучок электронов рисует графики на экране. Можно, в частности, добиться, чтобы на экране была видна яркая точка. Значит, все электроны летят с той стороны стекла и попадают в одно и то же место. Если рядом окажется источник электрического поля, например заряд, пятно будет отклоняться либо к нему, либо от него. Это понятно и не очень интересно. Но если поднести к экрану плоский магнит<sup>1</sup>, мы увидим неожиданную вещь. Пятно отклоняется вбок! Когда магнит лежит на ладони снизу экрана, пятно съезжает, например, влево. Чем ближе магнит, тем сильнее этот сдвиг.

Но может быть, вокруг того, что мы называем магнитом, есть электрическое поле, параллельное его плоскости, которое и толкает электроны вбок? Это можно проверить, вращая магнит вокруг вертикальной оси. Электрическое поле при этом тоже должно крутиться вместе с зарядами, но на сдвиг пятна повороты эти никак не влияют. Такой эксперимент ясно показывает, что данный предмет создает нечто, связанное с нормалью

---

<sup>1</sup>Здесь слово «магнит» – только условное бытовое обозначение, раз мы пока толком не знаем, что оно значит. Можно было бы сказать «продолговатый тяжелый черный брусок, подвергнутый специальной обработке», но это выйдет длинно.

к своей плоскости, так как только эта ось при вращении неподвижна. Если магнит перевернуть, пятно отклонится в обратную сторону. При данной ориентации магнита не важно, подносить его сверху или снизу. Значит, речь идет о векторе, который подобно гвоздю торчит из плоскости бруска. Этот вектор действует на электрон, отклоняя его как бы дважды вбок, то есть перпендикулярно как своему собственному направлению, так и скорости электрона. Вот эта субстанция и называется магнитным полем.

Поле  $\mathbf{E}$  вводилось, как сила, действующая на единичный заряд. Так же можно ввести и поле  $\mathbf{H}$ . Опыты, подобные описанному выше, показали, что на движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  заряд  $q$  действует так называемая **сила Лоренца**:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] . \quad (4.1)$$

(Вспомним, что квадратные скобки – знак векторного произведения; порядок сомножителей важен!). В (4.1) буква  $c$  – так называемая электродинамическая постоянная, с размерностью скорости. Экспериментальная ее величина (на август 1973) была  $2,99792458(12) \cdot 10^{10}$  см/с. Пока мы не можем доказать (но не видно и смысла скрывать), что это – скорость света, а шире – скорость электромагнитных волн<sup>2</sup>. Поскольку размерности скоростей сокращаются, магнитное поле  $\mathbf{H}$  имеет ту же размерность, что и электрическое (в СГС). Величина же электродинамической постоянной обеспечивает равенство единиц измерения полей. Единица измерения магнитного поля в СГС называется **эрстед** (э); по историческим причинам такая же точно единица для электрического поля осталась без названия. Если присутствует еще и электрическое поле, в (4.1) добавится уже знакомое слагаемое  $q\mathbf{E}$ .

В системе СИ ни размерности, ни единицы полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не совпадают. Мало того, что в формуле не будет скорости  $c$ :

$$\mathbf{F} = q \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] ,$$

но и вместо магнитного поля войдет **магнитная индукция**  $\mathbf{B}$ ; единица измерения  $\mathbf{B}$  называется тесла (Тл, 1 Тл =  $10^4$  гаусс =  $10^4$  эрстед). Отложим прояснение этой ситуации до п. 4.6; пока заметим, что для магнетизма система СИ крайне неудобна.

В электрическом поле заряд двигался примерно как масса в поле тяжести (в однородном – по параболе, в центральном кулоновском – по кеплеровым орбитам. Только случай отталкивания зарядов одного знака будет чем-то новым, но тоже получается гипербола, только центр поля будет в другом фокусе). Чтобы освоиться с понятием магнитного поля  $\mathbf{H}$ , для начала выясним, как движется частица в однородном магнитном поле. Пусть вектор поля направлен по оси  $z$ . Сила Лоренца перпендикулярна и скорости, и магнитному полю и всегда лежит в плоскости  $xy$ . Проще всего, если скорость  $\mathbf{v}$  лежит в этой же плоскости. Вспомним, что поперечная скорости сила величины

<sup>2</sup>Напомним, что с 1983 г. по международному соглашению скорость света зафиксирована:  $c = 299792458$  м/с точно.

$v$  не изменяет, а только поворачивает вектор скорости. Получаем движение по кругу:

$$mv^2/R = qvH/c, \text{ откуда ларморовский радиус } R = mvc/qH.$$

Период обращения  $T = 2\pi R/v = 2\pi mc/qH$  и частота  $\omega = qH/mc$  не зависят от скорости. Это используется в циклотронах, где заряженные частицы летают по круговым орбитам в магнитном поле и дважды за период разгоняются переменным напряжением постоянной частоты.

Пусть теперь скорость имеет составляющую  $v_z$  вдоль оси  $z$ . Параллельная  $\mathbf{H}$  скорость не влияет на силу; результатом будет движение по винтовой линии радиуса  $mv_{\perp}c/qH$  вокруг силовой линии магнитного поля.

Рассмотрение движений в более сложных полях требует ясного представления о том, какие же магнитные поля бывают в природе. Вернемся к этим задачам в конце главы (п. 4.7).

## 4.2 Закон Био – Савара

В старину, когда не было осциллографов, магнитное поле обнаруживалось по отклонению стрелки компаса. Долгое время «источниками магнетизма» считались исключительно постоянные магниты. Как мы увидим ниже, в п. 4.6, постоянные магниты, и тем более их взаимодействие – это довольно сложные вещи, почему долгое время и не удавалось построить теорию магнитных явлений. Однако в 1820 г. Эрстед открыл, что электрический ток, протекающий по проводам, также действует на магнитную стрелку. Подобно тому, как  $\mathbf{E}$  создается зарядами,  $\mathbf{H}$  определяется движением зарядов – **электрическими токами**<sup>3</sup>. Сразу после Эрстеда произошел решающий сдвиг. Вместо магнитов стали изучать взаимодействие проводов с током, и в том же 1820 г. были сформулированы закон Био – Савара и закон Ампера.

Естественно воспользоваться примером электростатики. Но провод – объект по меньшей мере линейный, совсем непохожий на точечный заряд. Поэтому разумно разбить провод на малые отрезки – **элементы тока** и рассмотреть их по отдельности. Сейчас мы рассматриваем статическое (постоянное во времени) магнитное поле. Поэтому провода, а с ними и их элементы, предполагаются неподвижными, а токи – постоянными. Эти предположения не особенно ограничительны: многие выводы сохранятся и для бытового переменного тока.

Плотность тока  $\mathbf{j}$  в магнетизме аналогична плотности заряда  $\rho$  в электростатике. Если  $\mathbf{E}$  создается зарядами  $dq = \rho dV$ , то  $\mathbf{H}$  должно определяться величинами типа  $\mathbf{j}dV$ . Поскольку это векторы, а должен еще входить радиус-вектор  $\mathbf{R}$  из  $dV$  в точку

<sup>3</sup>В п. 4.6 будет показано, что постоянный магнит – это очень своеобразный вариант постоянно циркулирующего тока, не требующего розеток и батареек (молекулярный ток).

наблюдения, естественно ожидать возникновения формулы с векторным произведением. Предположим, что искомое выражение для  $\mathbf{H}$  похоже, насколько это возможно, на известное нам кулоновское для поля  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \int \frac{\rho \mathbf{R} dV}{R^3}, \\ \mathbf{H} &= \int \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{R}] dV}{cR^3}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

В (4.1) добавлена электродинамическая постоянная  $c$ , чтобы «исправить» размерность:  $\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$ ;  $ne$  – это по размерности плотность заряда. Интегралы берутся по всему пространству, заполненному зарядами либо токами.

Важен случай, когда ток сосредоточен в проводках несущественной толщины. Тогда  $\mathbf{j} \parallel d\mathbf{L}$  – элементу длины провода,  $\mathbf{j}dV = jSd\mathbf{L} = Id\mathbf{L}$  и формула упрощается: поле провода с током  $I$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{c} \cdot \int \frac{[d\mathbf{L} \times \mathbf{R}]}{R^3}.\quad (4.2)$$

Обе формулы (4.1, 4.2) для магнитного поля, аналогичные в электростатике суммированию кулоновских полей распределенных зарядов, называются **законом Био – Савара** (иногда Био – Савара – Лапласа). Разумеется, никаким доказательством наши рассуждения по аналогии назвать нельзя. Но они иллюстрируют, как в физике возникают гипотезы. Далее их проверяют в эксперименте. Закон Био–Савара экспериментом подтверждается.

Казалось бы, есть более прямолинейный путь – начать со взаимодействия движущихся точечных зарядов. Против ожидания, оно оказывается заметно сложнее по следующим причинам:

1. Оно слишком близко к кулоновскому: основная сила для двух зарядов – электрическая, и на ее фоне трудно заметить вклад магнитного взаимодействия. Провод не заряжен (заряды обоих знаков компенсируют друг друга), поэтому электрическая сила отсутствует; но ток имеется, так как движутся заряды одного знака (обычно электроны).
2. Взаимодействие точечных зарядов в принципе нестационарно из-за их движения. Для постоянных токов эта нестационарность не важна: в каждой точке пространства ток не изменяется, хотя и создается движением все новых зарядов.
3. Практически все токи в технике идут вдоль тонких проводов, реже – распределены по объему проводников (такой вариант обычно встречается в природе). Сосредоточить в пустоте движущиеся заряды, которые давали бы заметное магнитное поле – это задача совсем не простая (пример – пучки заряженных частиц в ускорителях).

По этим соображениям и лучше формулы (4.1, 4.2), которые вместо движущихся зарядов оперируют стационарными токами. Неприятности, встречающиеся на пути, начинающемся с точечных зарядов, иллюстрируются в Приложении 1.

*Примеры.*

Поле кольца радиуса  $R$  с током  $I$  на расстоянии  $z$  от центра: элемент поля  $dH = IdL/c(R^2 + z^2)$ ; надо взять компоненту вдоль оси  $\rightarrow H = 2\pi IR^2/c(R^2 + z^2)^{3/2}$ . В центре  $H$  максимально (у заряженного кольца в центре  $E = 0$ ). Силовая линия, проходящая через центр – это попросту ось кольца (рис. 4.1).

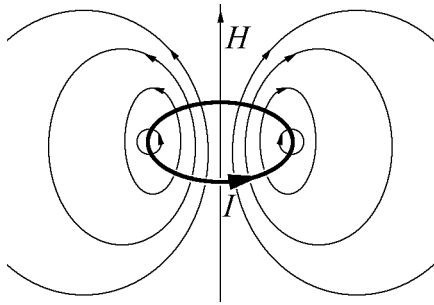


Рис. 4.1.

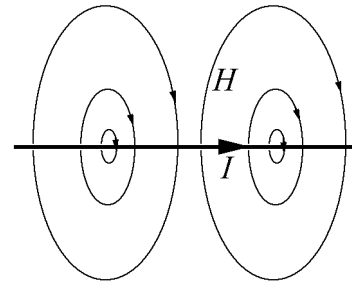


Рис. 4.2.

Поле прямого провода на расстоянии  $r$  :

$$H = \frac{Ir}{c} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{I}{cr} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{2I}{cr} .$$

Похоже на электрическое поле заряженной нити, но направлено не от провода, а перпендикулярно к расстоянию  $r$ . Силовые линии – круги, «надетые» на провод (рис. 4.2). Вернемся к кольцевому току. Вблизи провода его кривизна несущественна, и линии поля – также приблизительно круговые. Между крайними случаями прямой осевой линии и малых кругов вблизи провода располагаются линии «общего положения» (рис. 4.1).

Вообще мы увидим, что линии  $H$  в простых случаях замкнуты (если не уходят на бесконечность). Поля, в которых возможны замкнутые силовые линии (таково поле  $H$ ), кратко называют **соленоидальными**<sup>4</sup>, в противоположность потенциальным полям, типа электростатического.

Однако не следует думать, что силовые линии магнитного поля всегда замкнуты. Это – распространенное заблуждение, проникшее даже в учебники. Замкнуты линии  $H$ , например, у кольцевого витка с током  $I$  (рис. 4.3). Но если пропустить через виток провод с малым током  $i$ , добавится малое поле  $h$ , перпендикулярное начальному. Силовая линия суммарного поля станет спиралью, бесконечно навивающейся на кольцо, и замкнуться может только случайно. При «общем» соотношении токов и при произвольной их геометрии практически все линии будут незамкнуты, причем вполне заметно. Если же специально добиваться замкнутости, это свойство легко разрушится даже малыми внешними полями. Следовательно, замкнутость – редкое исключение, примерно как рациональные числа в континууме.

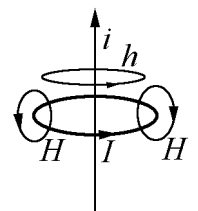


Рис. 4.3.

<sup>4</sup>Это, конечно, не определение соленоидальности. Определение дано ниже, в п. 4.4.

Направление магнитного поля проще всего определять по правилу буравчика (правого винта): если вворачивать винт, штопор и т.п. вдоль тока, точки на головке винта либо ручке штопора вращаются вдоль магнитного поля. Правила левой и правой рук способны сильно запутать и не рекомендуются (руки, в отличие от винтов, обычно встречаются парами).

Труба с аксиальным током  $i$  на продольный см. Режем на кольца с токами  $idz$  :

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi idzR^2}{c(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi R^2 i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{4\pi i}{c} = \frac{4\pi I}{cL} .$$

Пока можно только сказать, что такое поле на оси трубы, но далее обнаружится, что поле в трубе однородно. Для катушки длины  $L$  с током  $I$  можно считать  $i = NI/L$ , где  $N$  – число витков, и внутри катушки поле  $H = 4\pi NI/cL$ .

Плоская шина ширины  $L$  : на расстоянии  $h$  над ней поле

$$H = \frac{2I}{cL} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h dx}{h^2 + x^2} = \frac{2\pi I}{cL} = \frac{2\pi i}{c} ,$$

где  $i = I/L$  – погонный ток. Опять похоже на  $E$  плоскости, но не перпендикулярно ей, а вдоль поверхности: силовая линия обходит шину вокруг тока.

Две параллельных плоских шины с противоположно направленными токами (т.е. соединенные на одном их концов): поле

$$H = \frac{4\pi I}{cL} = \frac{4\pi i}{c} \text{ между шинами, } H = 0 \text{ в остальном пространстве.}$$

Напоминает электрическое поле плоского конденсатора. Вместо плотности поверхностных зарядов  $\sigma$  входит  $i/c = I/cL$  – погонный (на единицу ширины) ток, разделенный на  $c$  для размерности.

### 4.3 Формула Ампера

Найдем силу, действующую на ток в магнитном поле. При простейшей геометрии (провод длины  $L$  перпендикулярен полю) сила

$$F = \frac{evH}{c} \cdot (\text{число электронов}) = \frac{evH}{c} \cdot (nsL) = \frac{nevs}{c} \cdot H \cdot L = \frac{ILH}{c} .$$

На малый элемент тока  $I d\mathbf{L}$  в поле  $\mathbf{H}$  действует **сила Ампера**:

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{L} \times \mathbf{H}] . \quad (4.3)$$

Два параллельных провода на расстоянии  $R$  будут взаимодействовать с силой

$$F_{12} = 2 \frac{I_1 I_2}{c^2 R} L ; \quad (4.4)$$



провода притягиваются при параллельных токах и отталкиваются при антипараллельных. Величина силы для проводов длиной 1 м на расстоянии 1 см при токе 1 А будет  $2 \cdot (3 \cdot 10^9)^2 \cdot 100 / (9 \cdot 10^{20} \cdot 1) = 2$  дины. Столь слабое взаимодействие токов трудно увидеть (например, незаметно притяжение или отталкивание включенных компьютеров). Но при токах 1 кА получится в миллион раз больше – 2 кГ. Благодаря ряду специальных мер, именно на силе Ампера работают электромоторы. В них потребляемый ток не так велик, но взаимодействуют много проводов (витков); кроме того, поле усиливается благодаря использованию магнитных материалов (железо, сталь). На электрических же силах техника работает плохо – эти силы ограничены пробоем. Впрочем, есть применения в струйных принтерах, ксероксах, где электрические поля управляют движением частиц красящего порошка, и т.п.

Поле  $\mathbf{H}$  само создается некоторыми токами. Если вспомнить закон Био – Савара, то кажется очевидным, что два элемента тока:  $I_1$  длины  $d\mathbf{L}_1$  и  $I_2$  длины  $d\mathbf{L}_2$  взаимодействуют с силой

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2 R^3} \cdot [d\mathbf{L}_1 \times [d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{R}]] , \quad (4.5)$$

точнее, это сила действия 2 на 1;  $\mathbf{R}$  протянут от 2 к 1. Формула (4.5) – аналог закона Кулона.

Оба выражения (4.3, 4.4), а иногда и (4.5), для  $F$  называют **законом**, или **формулой, Ампера**. Исторически взаимодействие проводов с током обнаружено, разумеется, раньше силы Лоренца, для которой надо уже иметь понятие о поле  $\mathbf{H}$  и о носителях заряда в проводнике. Излагать же проще в принятом нами порядке, в чем можно убедиться хотя бы из последней формулы.

Элемент  $d\mathbf{L}_1$  тоже действует на  $d\mathbf{L}_2$  с силой

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{I_1 I_2}{c^2 R^3} \cdot [d\mathbf{L}_2 \times [d\mathbf{L}_1 \times (-\mathbf{R})]] .$$

Легко видеть, что возможно и даже обычно неравенство  $\mathbf{F}_{12} \neq -\mathbf{F}_{21}$ . Например, при совпадении направлений  $d\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{R}$  первый элемент не создает поля в месте дислокации второго и на него не действует, тогда как 2 действует на 1 (рис. 4.4).

Третий закон Ньютона не выполняется. Другими словами, не сохраняется импульс.

Долгое время этот парадокс пытались обойти, «спасая» взаимность сил различными способами (см. ниже). Но выяснилось, что третий закон Ньютона действительно нарушается. Однако закон сохранения импульса оказывается более живучим. Мы уже видели, что поле имеет энергию. Оказывается, оно может иметь и импульс. Сохраняется сумма импульсов частиц и поля.

В законе Кулона, на первый взгляд, не было никаких проблем со взаимностью сил. Впрочем, и закон Кулона в динамике непригоден. Скажем, при перемещении одного

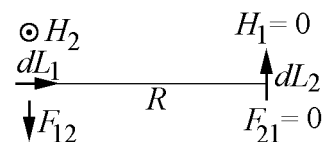


Рис. 4.4.

из зарядов второй почувствует это не сразу, а через время, нужное для прохода электромагнитной волны (расстояние, поделенное на скорость света). Взаимность также нарушается. В быту мы наблюдаем такой эффект по запаздыванию сигнала при телефонных переговорах на больших расстояниях. Сигнал, то есть речь, «зашифрован» именно в движении зарядов в передающих антеннах.

Пытались исправить закон Ампера, заявляя, что взаимодействуют не элементы, а элемент с полем в этом месте. Поле же создает не один элемент тока, а весь провод – замкнутый контур. Силу, действующую на элемент 1, найдем, интегрируя (4.5) по  $d\mathbf{L}_2$ , и получим (4.3).

И эта сила не обладает свойством взаимности: убедитесь, что прямой провод  $I_2$  действует на элемент  $I_1 d\mathbf{L}_1$  вниз на рис. 4.5, а элемент дает нулевую силу на провод (хотя и ненулевой момент сил, крутящий по часовой стрелке).

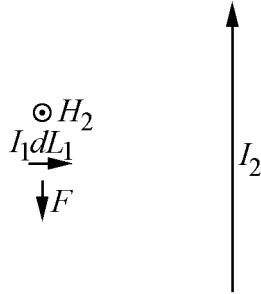


Рис. 4.5.

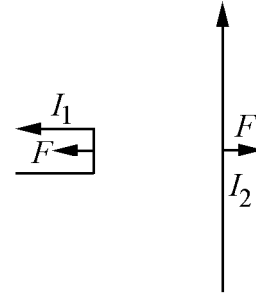


Рис. 4.6.

Опять можно сказать, что действует на провод 2 не элемент 1, а магнитное поле всего контура, в который он входит. Два контура взаимодействуют с силой, проинтегрированной по  $d\mathbf{L}_1$  и по  $d\mathbf{L}_2$ ; такая сила уже подчиняется третьему закону Ньютона. На рис. 4.6 показаны два контура (один – все тот же прямой провод), для которых очевидно взаимное притяжение: вклад горизонтальных участков провода 1 компенсируется.

Действительно, разложим двойное векторное произведение по формуле

$$[\mathbf{a}[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}) \quad (4.6)$$

(читается «бац минус цап»; эта формула выводится в Приложении 2). Из (4.5) выходит

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2 R^3} \cdot [d\mathbf{L}_1 \times [d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{R}]] = \frac{I_1 I_2}{c^2} \left( d\mathbf{L}_2 \left( d\mathbf{L}_1 \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) - \frac{\mathbf{R}}{R^3} (d\mathbf{L}_1 d\mathbf{L}_2) \right).$$

Вся несимметрия «сидит» в первом слагаемом. Но при интегрировании по  $d\mathbf{L}_1$  он дает нуль, так как интегрируется кулоновское поле  $\mathbf{R}/R^3$ . Аналогично из  $\mathbf{F}_{21}$  после интегрирования выпадет слагаемое  $d\mathbf{L}_1(d\mathbf{L}_2\mathbf{R})/R^3$ .

С XIX века думали, что формула Ампера буквально неверна. Нет смысла рассуждать о силе между элементами тока, если они всегда складываются в замкнутые контуры. Поэтому (4.5) надо понимать не как реальную силу, а как материал для последующего интегрирования<sup>5</sup>. Настоящая же сила между элементами тока, если допустить, что есть такая вещь, может отличаться на слагаемое, которое обращается в нуль при интегрировании по замкнутому контуру.

<sup>5</sup>И до сих пор в некоторых учебниках можно встретить такие утверждения.

Что такие **ненулевые** векторные поля возможны, ясно хотя бы на примере электрического поля.

Сам Ампер как раз был сторонником такой позиции и нашел выражение, которое давало ту же силу для замкнутых контуров, но не нарушало третий закон Ньютона.

Но теперь мы знаем, что элементы тока именно бывают. Например, это могут быть два электрона, и их магнитное взаимодействие не взаимно. Как уже говорилось выше, выполняется более фундаментальный закон сохранения импульса, с учетом импульса поля.

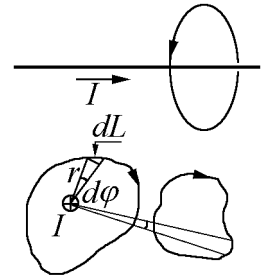
## 4.4 Теорема Стокса

Продолжая аналогию с электростатикой, вспомним, что в симметричных случаях вместо принципа суперпозиции полезна была теорема Гаусса. И для магнитного поля можно написать аналогичное уравнение, с той только разницей, что магнитных зарядов нет:

$$\oint (\mathbf{H} d\mathbf{S}) = 0.$$

Теоретически допустимы «отдельные» полюса, так называемые монополи Дирака, но практически их никто не наблюдал. Поле, имеющее нулевой поток через любую замкнутую поверхность, называют соленоидальным. Линии такого поля не имеют начала и конца: они либо замкнуты, либо приходят с бесконечности и на бесконечность же уходят, либо заполняют в пространстве поверхности (типичный случай, см. п. 4.2.)

Мы видели (п. 1.3), что циркуляция электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю. Поскольку силовые линии  $\mathbf{H}$  бывают замкнуты, для магнитного поля явно возможна ненулевая циркуляция. Возьмем контур – окружность вокруг прямого провода с током  $I$  (рис. 4.7). Поскольку контур совпадает с силовой линией,



$$\oint (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = H \cdot 2\pi R = (2I/cR) \cdot 2\pi R = 4\pi I/c.$$

Рис. 4.7.

Результат не зависит от формы контура, лишь бы он охватывал провод. Действительно, для поля  $H = 2I/cr$  и контура, лежащего для простоты в плоскости, перпендикулярной проводу,  $(\mathbf{H} d\mathbf{L}) = (2I/c)dL_{\perp}/r = (2I/c)d\varphi$ , где  $\varphi$  – плоский угол с вершиной на оси провода (рис. 4.7). Если контур охватывает провод,  $\oint d\varphi = 2\pi$ , если же провод вне контура, то при обходе угол вернется к прежнему значению,  $\oint d\varphi = 0$ .

Контур не обязан быть плоским, так как все равно мы проектируем  $d\mathbf{L}$  на силовую линию, лежащую для прямого провода в плоскости. Через контур, рядом с ним и в отдалении может проходить любое число прямых проводов, тогда

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I_L}{c}, \quad (4.7)$$

где  $I_L$  – это суммарный ток, протекающий через контур, с учетом знаков. Если рядом течет огромный ток, но не через контур  $L$ , то этот ток не входит в правую часть.

Вряд ли стоило тратить столько усилий, будь это соотношение верно только для прямых проводов. Однако можно показать, что то же выполняется и для «кривых» токов (рис. 4.8), и для распределенных в пространстве. К сожалению, в рамках интегральной формы уравнений простого доказательства, видимо, не существует. Довольно длинный вывод приведен в Приложении 3 в конце главы.

Уравнение (4.7) можно назвать магнитной **теоремой Стокса**<sup>6</sup>.

Если проводов несколько, то  $I_L$  – это суммарный ток с учетом знаков. Положительным направлением тока для контура считается то, которое образует с направлением обхода контура правовинтовую систему. На рис. 4.8 положителен ток  $I_1$ , а суммарный ток  $I_L = I_1 - I_2 + I_2 - I_2 = I_1 - I_2$ . Проследить за суммированием токов можно, отмечая пересечение ими незамкнутой поверхности, опирающейся на контур интегрирования. Поскольку токи в статике замкнуты, годится любая такая поверхность. Можно представить себе растяжимую пленку, «надетую» на контур; пленку эту можно как угодно деформировать, все равно токи будут ее «пронизывать».

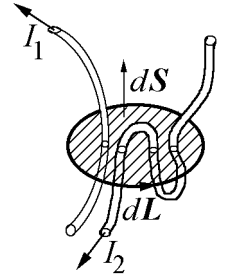


Рис. 4.8.

Обратите внимание, как **разумно** устроено основное уравнение магнитостатики – теорема Стокса.  $\mathbf{H}$  вызывается токами, которые можно «поймать» в контуры. Аналогично (насколько тут возможна аналогия)  $\mathbf{E}$  создается зарядами, которые ловятся в мешки – замкнутые поверхности.

*Примеры употребления:*

**Катушка** длины  $L$  из  $N$  витков, с током  $I$ . Берем контур, захватывающий весь ток – как бы нитку, продетую в катушку и завязанную снаружи. Внутри поле  $H$ ; снаружи те же силовые линии заполняют  $\infty$  площадь, т. е. снаружи  $H = 0$ . Получаем  $HL = 4\pi NI/c$ ;  $H = 4\pi NI/cL$ . Для длинной катушки поле однородно: положение контура внутри не важно. При учете концевых эффектов появится поле снаружи (для длинной катушки – слабое) и неоднородность внутри вблизи концов. Катушка аналогична конденсатору в электростатике: концентрирует в себе магнитное поле.

**Поле внутри провода с током:**  $H \cdot 2\pi r = (4\pi I/c) \cdot (r^2/R^2)$ : доля тока  $r^2/R^2$  идет через контур радиуса  $r$ . Получаем  $H = 2Ir/cR^2$  – похоже на  $E$  заряженного объемно цилиндра.

**Шина с током:**  $2HL = 4\pi I/c$ ;  $H = 2\pi I/cL = 2\pi i/c$ , как и получалось из закона Био – Савара.

<sup>6</sup>Имеется большое разнообразие названий (4.7): теорема о циркуляции, или закон полного тока, или закон/формула/теорема Ампера, или называют уравнением Максвелла (одним из), или вообще избегают называть. Название «теорема Стокса» неофициальное, но вполне подходящее. Оно напоминает о родстве уравнения (4.7) с общей математической теоремой Стокса, симметричном родстве электрической теоремы Гаусса и математической теоремы Гаусса – Остроградского (см. Приложение 3). Закон Ампера лучше отнести к взаимодействию проводников (4.3,4.4) во избежание путаницы.

Мы имеем уже 4 уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) &= 4\pi Q_S, & \oint_S (\mathbf{H} d\mathbf{S}) &= 0, \\ \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) &= 0, & \oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) &= 4\pi I_L/c. \end{aligned}$$

Как уже говорилось, между ними есть симметрия, но не совпадение. Пока что уравнения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  независимы. Позднее появятся слагаемые, которые из электрического поля будут делать магнитное и наоборот.

## 4.5 Магнитный момент в магнитном поле

Из первого примера п. 4.2 – поля кольца – видно быстрое спадание магнитного поля с удалением от создающей его системы. При  $z \gg R$  имеем  $H = 2\pi R^2 I / cz^3$ . На оси электрического диполя:  $E = 2p/z^3$ . Напрашивается аналогия: учитывая, что размерности  $H$  и  $E$  совпадают, вводим магнитный дипольный момент  $m = \pi R^2 I / c$  (короче – **магнитный момент**); тогда  $H = 2m/z^3$ .

Поскольку нет магнитных зарядов, магнитный диполь дает наиболее медленно спадающее поле. (Поле провода  $\sim 1/r$ , но оно найдено вблизи провода, а на больших расстояниях, когда будет видна замкнутость тока, закон спада станет дипольным или еще быстрее). Поэтому магнитный диполь – даже более важный объект для магнетизма, чем электрический диполь в электростатике. Приблизительно (по важности) он соответствует электрическому заряду.

Можно показать из закона Био – Савара, что аналогия с электрическим диполем выполняется не только на оси. Оказывается, на большом расстоянии  $R$  от плоского контура с током  $I$  выполняются зависимости

$$H_R = \frac{2m \cos \theta}{R^3}, \quad H_\theta = \frac{m \sin \theta}{R^3}, \quad \text{где } m = \frac{IS}{c},$$

точно подобные полученным для электрического диполя в п. 1.7.  $S$  – это площадь контура, обтекаемого током  $I$  (рис. 4.9). Доказательство можно провести сначала для малого квадратного контура, применяя формулу Био – Савара<sup>7</sup>. Произвольный (но малый по сравнению с  $R$ ) контур эквивалентен набору малых квадратных контуров, обтекаемых током в одном направлении. Везде внутри токи от соседних квадратиков будут взаимно уничтожаться, на границе же они дадут обтекание исходного контура. Поскольку элементарное поле квадратика пропорционально его площади ( $dm = IdS/c$ ), при сложении получится магнитный момент, в который войдет суммарная площадь.

Магнитный момент (как и электрический дипольный момент) – вектор. Направлен он по движению штопора, ручку которого крутят по току. В векторном виде  $\mathbf{m} = I\mathbf{S}/c$ :

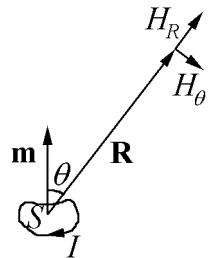


Рис. 4.9.

<sup>7</sup>В электростатике мы вычисляли таким способом потенциал; магнитное поле не имеет, вообще говоря, скалярного потенциала «из-за теоремы Стокса» и приходится честно считать поле.

вдоль вектора площади<sup>8</sup>.

Внесем магнитный момент в виде квадратного контура со стороной  $L$  в поле  $\mathbf{H}$ . На сторону, перпендикулярную полю, действует сила  $F = ILH/c$ . Получаем пару сил, разворачивающих  $\mathbf{m}$  вдоль  $\mathbf{H}$ . Силы на другие две стороны (ближнюю и дальнюю) только пытаются растянуть контур и компенсируют друг друга.

Момент сил (рис. 4.10):

$$\tau = 2F \cdot (L/2) \cdot \sin \theta = mH \sin \theta = [\mathbf{m} \times \mathbf{H}]$$

в полном соответствии с электростатикой. Мы можем ввести и потенциальную энергию магнитного момента в поле:

$$U = -mH \cos \theta = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) .$$

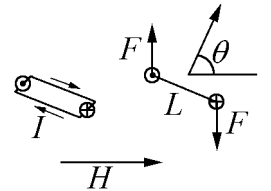


Рис. 4.10.

Как и электрическое, магнитное поле старается ориентировать моменты вдоль себя.

Существуют вещества (например, кислород), молекулы которых имеют собственные магнитные моменты; этим они похожи на электрические диполи типа молекул воды. В магнитном поле будет возникать упорядоченная ориентация совершенно так же, как и в электрическом случае, с заменой  $p \rightarrow m$ ,  $E \rightarrow H$ . Такие вещества с положительной магнитной поляризуемостью называются **парамагнетиками**.

Но большинство знакомых нам веществ получают в поле момент  $\mathbf{m}$ , обратный направлению  $\mathbf{H}$  (та же вода). Особенно удивляться этому не надо, потому что магнитное поле все же не электрическое: оно действует довольно сложным образом, изменяя орбиты электронов (а точнее, их состояния) в молекулах. Мы не будем пока вдаваться в детали взаимодействия. Вещества такого типа называют **диамагнетиками**.

Есть еще **ферромагнетики** (железо и ряд сплавов), аналогичные сегнетоэлектрикам; в ферромагнетиках соседние магнитные моменты заставляют друг друга ориентироваться в одном направлении. Поэтому материал имеет собственную намагниченность. Есть также **антиферромагнетики** (твердый кислород, магний, хром), у которых соседние моменты ориентируются навстречу и компенсируют друг друга. Нечто среднее между ферромагнетиками и антиферромагнетиками представляют **ферримагнетики** (многие ферриты – соединения типа  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). У них соседние моменты антипараллельны, но не равны по величине.

## 4.6 Магнитное поле в среде. Намагниченность. Вектор магнитной индукции

Оценим величину магнитного момента молекулы. Пусть электрон летает по кругу радиуса  $R$ ; ток  $I = e/T$ . Момент  $m = I \cdot \pi R^2/c = (eR/2) \cdot (v/c)$ , где  $v = 2\pi R/T$  – скорость электрона. Отношение  $v/c \ll 1$ , а магнитный момент получается малым

<sup>8</sup>Если контур не плоский, момент записывается так:  $\mathbf{m} = (I/2c) \cdot \oint [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}]$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор из начала координат в место расположения элемента длины контура  $d\mathbf{l}$ . Проверьте, что добавление к  $\mathbf{r}$  постоянного вектора не меняет результат (т.е.  $\mathbf{m}$  не зависит от положения начала координат), и что для плоских контуров обе формулы равносильны.

по сравнению с характерным электрическим  $eR \sim 10^{-18}$  СГС. Соответственно магнитные эффекты в поле той же величины малы по сравнению с электрическими. Но, правда, поле  $H$  можно сделать гораздо больше  $E$ . Оценивая магнитное поле внутри атома по формуле для витка с током, получим  $H \simeq 2\pi I/(cR) = (e/R^2) \cdot (v/c)$ . Множитель  $e/R^2 = 4,8 \cdot 10^{-10}/(10^{-8})^2 = 4,8 \cdot 10^6$  СГС  $= 1,36 \cdot 10^8$  В/см – это типичное внутриатомное электрическое поле. Магнитное же поле меньше на фактор  $v/c$ , т.е. примерно на два порядка. Однако по нашим масштабам это поле ( $4,8 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} = 4,8 \cdot 10^4$  эрстед) достаточно велико. Если все атомы «выстроены» в одном направлении, примерно таким будет среднее поле в любой точке плотного вещества. Действительно, поля, создаваемые сильными магнитами, порядка  $10^4$  эрстед.

Само собой, в веществе, состоящем из магнитных моментов, внешнее магнитное поле создаст упорядоченную ориентацию. Можно ввести магнитную поляризуемость  $\alpha_H$ , так что  $\langle \mathbf{m} \rangle = \alpha_H \cdot \mathbf{H}$ . Возникнет магнитный момент единицы объема, или **намагниченность**:  $\mathbf{M} = n\langle \mathbf{m} \rangle = n\alpha_H \cdot \mathbf{H} = \chi \mathbf{H}$ . Коэффициент  $\chi$  называется **магнитной восприимчивостью**. Она положительна для парамагнетиков, но для диамагнетиков  $\chi < 0$ .

Как и в электростатике, для собственных магнитных моментов средняя проекция на направление поля  $\langle \mathbf{m}_H \rangle \sim m \cdot (mH/kT)$ . Учитывая, что  $m \sim eR \cdot (v/c)$ , получаем, что магнитная поляризуемость меньше электрической в  $(v/c)^2$  раз. То же соотношение верно и для вещества из наведенных магнитных диполей. Поэтому мы и не видим заметного взаимодействия веществ типа воды даже с сильным магнитным полем. Но есть вещества, где из-за взаимного влияния атомов намагничивание будет существенным.

Рассмотрим намагниченное вещество. Каждый магнитный момент – это замкнутый ток. Внутри вещества эти молекулярные токи компенсируются (как было и с зарядами электрических диполей). Но по поверхности образца компенсации нет, и сложение молекулярных токов эквивалентно некоторому току  $I$  (рис. 4.11), обтекающему образец так, чтобы усилить внешнее поле (для веществ с  $\chi > 0$ ).

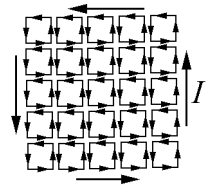


Рис. 4.11.

Суммарный магнитный момент образца площадью  $S$  и высотой  $L$ :  $\mathcal{M} = n\langle \mathbf{m} \rangle SL = \mathbf{M} \cdot SL$  равен, с другой стороны,  $IS/c$ , так что поверхностный ток  $I = cML$ . На сантиметр поверхности придется погонный ток  $i = cM$ . Если вектор  $\mathbf{M}$  направлен под углом к поверхности, то надо брать его параллельную составляющую (тангенциальную). Эта зависимость похожа на связь  $\mathbf{P}$  и  $\sigma$  в электростатике.

Пусть в однородное магнитное поле  $H_{out}$ , например, в катушку с током, внесено вещество, способное намагничиваться (рис. 4.12). Намагниченность, она же поверхностный ток, изменит поле внутри образца. Аксиальный ток  $i = cM$  создает внутри добавочное поле  $4\pi i/c$ ; тогда внутри будет  $\langle H_{in} \rangle = H_{out} + 4\pi M$ . В этой разнице легко убедиться и для любой формы образца из теоремы Стокса для «узкого» контура:

$$\langle H_{in} \rangle L - H_{out} L = 4\pi i L/c = 4\pi M L \quad \text{или} \quad \langle H_{in} \rangle - H_{out} = 4\pi M .$$

Для определенности рассмотрим случай ( $\chi > 0$ , парамагнетик), когда внутреннее поле больше наружного. Конечно, имеется в виду среднее поле в веществе, что подчеркивают угловые скобки. Как видно из теоремы для «широкого» контура, оно создается вместе током катушки и поверхностным током:  $\langle H_{in} \rangle = 4\pi i_k / c + 4\pi M$ .

Напрашивается как-то назвать вектор  $\langle H_{in} \rangle - 4\pi M$ , который в теореме Стокса чувствовал бы только «настоящие» токи проводимости (в нашем случае – ток катушки). Принято среднее поле в веществе  $\langle H_{in} \rangle$  называть не магнитным полем, а **магнитной индукцией  $B$** . Тогда искусственный, но удобный вектор будет  $B - 4\pi M$ . Как бы специально для запутывания студентов эту величину назвали полем  $H$ .

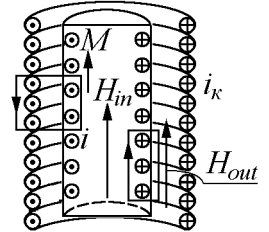


Рис. 4.12.

В новых обозначениях имеем  $B = H + 4\pi M$ . Это похоже на  $D = E + 4\pi P$  (даже больше, чем следовало бы ожидать: в электричестве настоящее среднее поле как раз  $E$ ). Теперь можно написать теорему Стокса в присутствии магнетиков:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{L} = 4\pi I_L / c \quad (I - \text{свободный ток}) .$$

Она выглядит по-старому, но смысл ее другой:  $H$  – вспомогательный вектор, хотя и называется полем. Для случая образца в катушке  $H$  попросту одинаково внутри и вне образца:

$$HL = 4\pi NI / c ; \quad H = 4\pi NI / cL .$$

Намагниченность  $M$  поэтому принято выражать через  $H$ :  $M = \chi H$ , то есть магнитная восприимчивость определяется не через истинное среднее поле  $B$ , а через  $H$ , которое проще задать (в простой геометрии зависит только от тока в катушке, а не от свойств и вообще присутствия магнетика). Тогда магнитная индукция  $B = H + 4\pi M = (1 + 4\pi\chi) \cdot H$ , что принято писать в виде

$$B = \mu H . \quad (4.8)$$

Коэффициент  $\mu$  – свойство вещества – называется **магнитной проницаемостью**. Например, для парамагнетиков – воздуха при нормальных условиях  $\mu = 1 + 3,8 \cdot 10^{-7}$ , для жидкого кислорода  $\mu = 1 + 3,4 \cdot 10^{-3}$ ; для воды (диамагнетик)  $\mu = 1 - 9 \cdot 10^{-6}$ . Как уже говорилось, в большинстве случаев магнитная поляризация гораздо слабее электрической (сравните со значениями  $\epsilon - 1$  для тех же веществ в п. 2.3). Однако для ферромагнетиков  $\mu$  может быть порядка тысяч.

Разумеется, теорема Гаусса в магнетизме должна записываться через среднее поле  $B$ . Запишем уравнения магнитного поля в среде:

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I_L}{c} \quad \text{по любому замкнутому контуру } L$$



$$\oint_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}) = 0 \quad \text{по любой замкнутой поверхности } S . \quad (4.9)$$

( $I_L$  – ток свободных зарядов) ;

Видно, что «нелогичные» переименования полей сделаны, чтобы форма уравнений напоминала электростатическую. Зато при этом несколько страдает смысл, но сейчас, пожалуй, уже поздно для перестройки.

Уравнения (4.9) дополняются граничными условиями на поверхностях разрыва, вытекающими из самих уравнений:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{\tau1} = H_{\tau2}, \quad (4.10)$$

а если имеется поверхностный свободный ток  $i$ , тангенциальные поля отличаются на  $4\pi i/c$ . Кроме того, должны быть заданы свойства вещества. При постоянной магнитной восприимчивости годится прямая пропорциональность (4.8), в более общем нелинейном случае

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad (4.11)$$

но бывает и так, что однозначной зависимости индукции от поля не существует: индукция определяется не только полем в данный момент времени, но и всей историей намагничивания (значениями  $\mathbf{H}$  во все предшествующие моменты). Такая «память» называется **гистерезисом**.

В частности, гистерезис ярко проявляется в ферромагнетиках, из которых изготавливаются **постоянные магниты**: у них как раз внешний, или свободный, ток равен нулю и их поле создается только поверхностными молекулярными токами (рис. 4.11). Проследим, как получается, что эти токи, т.е. намагниченность, могут существовать без внешнего поля. Оказывается, поле все же нужно, но на сравнительно недолгое время. Затем внешнее поле можно выключить, но намагниченность не спадает до нуля<sup>9</sup>.

Как уже говорилось, в ферромагнетике соседние магнитные моменты ориентируют друг друга в одном направлении. Образец разбивается на кусочки – **домены**<sup>10</sup>. Размеры доменов зависят от образца и его истории, но обычно находятся в диапазоне  $10^{-4} \div 10^{-2}$  см. Внутри домена все магнитные моменты полностью ориентированы в одном направлении из-за сильного взаимодействия атомов. В макроскопически однородном (так называемом размагниченном) состоянии направления соседних доменов закономерным или случайным образом варьируются, так что суммарный магнитный момент образца невелик. Действительно, если весь кусок будет намагничен однородно, то и внутри него, и снаружи будет значительное магнитное поле, что энергетически невыгодно. А при разбиении внутри доменов поле, конечно, есть, но снаружи образца оно практически зануляется. Когда действует внешнее поле, то вначале домены,

<sup>9</sup>Так студент может помнить часть изученного материала даже и после сдачи экзамена.

<sup>10</sup>От франц. domaine – владение. Карта владений феодалов в средневековье напоминала магнитную структуру.

направленные более или менее вдоль поля, разрастаются за счет соседних «неправильных». По сравнению с обычными парамагнетиками эта коллективная реакция на поле очень сильна. Поэтому-то взаимодействие ферромагнетиков с полем (стальных гвоздей и т.п.) такое заметное. При больших внешних полях начинает поворачиваться уже ориентация внутри доменов, приближаясь к параллельной полю. В результате намагничивание идет по другому пути: после выключения поля домены вполне могут разориентироваться не полностью; получается остаточная  $M \neq 0$  при  $H = 0$  (и даже при не очень больших отрицательных полях). Естественно, степень необратимости зависит от материала.

Интересно, что в плоском магните, намагниченном в перпендикулярном направлении,  $\mathbf{H}$  внутри направлено против  $\mathbf{M}$ : снаружи  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$  и поле имеет дипольный вид; но без свободных токов  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{L} = 0$ . Поэтому, двигаясь вдоль силовой линии, мы непременно должны иметь участок, на котором  $\mathbf{H}$  направлено против  $d\mathbf{L}$ , что может быть только внутри материала (рис. 4.13). Магнитная же индукция в материале направлена вдоль  $\mathbf{M}$  и, значит, против  $\mathbf{H}$  внутри, поскольку ее нормальная компонента не меняется при переходе из магнетика в воздух.

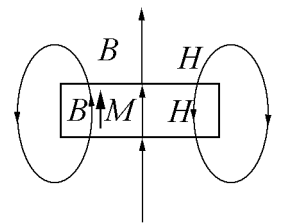


Рис. 4.13.

Существенная разница между постоянными магнитами и сегнетоэлектриками в том, что электрическое поле наэлектризованного сегнетоэлектрика вызывает движение зарядов. Идеальных изоляторов нет, и слабые токи в диэлектрике либо воздухе принесут на поверхность свободные заряды, которые скомпенсируют поле поляризации. Поэтому поляризованность может проявиться только после некоторых усилий, например, деформации образца, меняющей поляризацию. Постоянные же магниты, если их не греть и не ударять, сохраняют свое действие неопределенно долго (компасы и т.п.). В частности, по намагничиванию горных пород судят о направлении магнитного поля Земли, каким оно было сотни миллионов лет назад. Это еще раз доказывает практическое отсутствие магнитных зарядов.

Гвозди, ключи и т.п., попадая в поле, приобретают свой момент (намагничиваются) и втягиваются в область сильного поля так же, как диэлектрики втягиваются в электрическое поле. Но диамагнетики, напротив, выталкиваются из магнитного поля (например, вода). В них направление поверхностных токов противоположное, и  $\mathbf{B}$  уменьшается. Идеальные диамагнетики – это сверхпроводники: в них вообще нет поля (точнее, индукции), оно полностью экранировано поверхностными токами. Для сверхпроводников  $\mathbf{B} = 0$ , эффективное  $\mu = 0$ ,  $\chi = -1/4\pi$ . Ток в обычном проводнике идет по сечению, а в сверхпроводнике – по поверхности. Переход в сверхпроводящее состояние при замораживании как раз наблюдают по эффекту Мейснера – выталкиванию сверхпроводника из поля.

**Вопрос.** Поле диполя одинаково в электричестве и магнетизме. Поведение диполя в

поле тоже одинаково – ориентируется. Почему же в электростатике диэлектрик обычно уменьшает поле, а среднее поле  $B$  в парамагнетике возрастает?

В СГС все поля  $(E, D, P, B, H, M)$  имеют одинаковую размерность и одинаковую единицу измерения  $\text{г}^{1/2}/(\text{см}^{1/2} \cdot \text{сек})$ . Напомним, что единица магнитного поля называется эрстед; однако применительно к индукции  $B$  в СГС та же самая единица называется гаусс. Как уже упоминалось в п. 4.1, единица электрического поля в СГС осталась без своего имени; то же относится к единицам  $D, P, M$ .

В СИ  $E$  измеряется в В/м, а  $B$  – в Тл (тесла, или Вб/м<sup>2</sup>, Вб – вебер – единица магнитного потока). Различие в размерностях  $E$  и  $D$ ,  $B$  и  $H$  еще добавляет разнообразия. В вакууме в системе СИ

$$D = \varepsilon_0 E, \quad B = \mu_0 H.$$

Поэтому коэффициенты  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$ , о котором мы еще не упоминали, называют электрической и магнитной проницаемостями вакуума;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,256 \cdot 10^{-6}$  (Гн/м). Кроме того, что они не равны 1, это еще и размерные величины<sup>11</sup>! В среде надо еще домножить на уже известные  $\varepsilon$  и  $\mu$ .

Рекомендуется расчеты делать в СГС, а в СИ переводить результат (что иногда все-таки нужно). Это можно сделать, помня основные формулы в обеих системах. Например, сила Лоренца в СИ  $F = qVB$ , зная кулон, ньютон и метр, получим 1 Тл = 10<sup>4</sup> СГС. Магнитное поле в СИ редко нужно, так как почти везде в формулах будет  $B$ , но можно запомнить, что поле прямого провода в СИ равно  $H = I/2\pi R$ , то есть измеряется в амперах на метр. (Размерность  $D$  соответственно Кл/м<sup>2</sup>, и тоже редко нужна, так как настоящее поле  $E$ ).

## 4.7 Движение в неоднородном поле\*

Представим себе порядки величины. Если электрон со скоростью порядка  $0,1 \cdot c$  вращается в земном поле  $H \sim 1$  эрстеда, то радиус орбиты  $R = mvc/eH \sim 200$  см. Для протона той же скорости будет около 4 км – мало по сравнению с размерами Земли. Поэтому захваченные Землей космические частицы, имеющие обычно скорость и вдоль поля, практически движутся вдоль силовой линии, «наматываясь» на нее. Удар в атмосферу вблизи мест сгущения силовых линий – полюсов вызывает полярные сияния.

Можно сказать, что поле Земли велико (сильно закручивает частицы). Поэтому от большей части космических лучей Земля нас экранирует. Поток заряженных частиц от Солнца тормозится на расстоянии порядка 10 радиусов Земли, где возникает ударная волна в этом **солнечном ветре**. Галактические магнитные поля полностью искажают направления космических лучей (кроме незаряженных  $\gamma$ ).

Рассмотрим модель неоднородного в направлении  $x$  поля  $H_z$  – со скачком  $\Delta H$  при  $x = 0$  (рис. 4.14). Слева радиус вращения (частицы, пущенной горизонтально) будет  $R = mvc/eH$ ,

<sup>11</sup>В последнее время эти несколько одиозные названия заменены более нейтральными – электрическая и магнитная постоянные, что, впрочем, не меняет сути дела.

а справа

$$R + \Delta R = mvc/e(H - \Delta H) \approx (mvc/eH) \cdot (1 + \Delta H/H) .$$

За оборот, время которого  $T = 2\pi mc/eH$ , смещение частицы вдоль оси  $y$  равно  $2\Delta R = 2(mvc/eH^2) \cdot \Delta H$ . Средняя скорость смещения, или **дрейфа**, в направлении  $y$ :  $V_y = v\Delta H/\pi H$ . При плавном изменении поля надо задать градиент  $dH/dx$  и положить  $\Delta H \sim R \cdot dH/dx$ . Скорость дрейфа будет  $V_y \sim (mv^2c/eH^2) \cdot dH/dx$ . Как всегда, движется поперек (куда не ждешь). Поэтому, кроме основного наматывания на силовую линию, всегда есть поперечный дрейф из-за неоднородности. В тороидальных устройствах по крайней мере одна из неприятностей – этот самый дрейф.



Рис. 4.14.

Оценим характерные параметры термоядерных устройств. Для термоядерной реакции нужна минимальная температура 10 кэВ или  $10^8$  К. Скорость ядра дейтерия будет  $v = \sqrt{3kT/m} \sim 10^8$  см/с. Радиус вращения  $R = mv_{\perp}c/eH \sim 1$  см при  $H = 10^4 = 1$  Тл. Меньшее поле невыгодно, так как должно быть  $R \ll$  размера установки; большее трудно получить в большом объеме. Плотность энергии  $H^2/8\pi \sim 5 \cdot 10^6 = 0,5$  Дж/см<sup>3</sup>, давление 5 атм. В **токамаке** – термоядерном реакторе в виде бублика с сечением камеры  $2 \cdot 3$  м<sup>2</sup> и радиусом плазмы 5 м запасено 90 МДж, как в  $\sim 20$  кг взрывчатого вещества. Основное (тороидальное) поле создается катушками, намотанными на бублик снаружи.

Давление плазмы  $nkT$  должно быть заметно меньше магнитного, откуда  $n \sim 5 \cdot 10^6 / (10^8 \cdot 1,4 \cdot 10^{-16}) / 10 \sim 3 \cdot 10^{13}$  1/см<sup>3</sup>. Еще необходимо выполнение **критерия Лоусона**:  $n\tau > 10^{14}$ , то есть время удержания  $\tau$  должно быть порядка 3 с.

Скорость дрейфа в тороидальной ловушке

$$V_{dr} \sim (mv^2c/eH^2) \cdot dH/dx \sim v \cdot (R/H) \cdot dH/dx .$$

Для простого тора поле обязательно неоднородно; силовые линии разной длины надеты на один ток,  $dH/dx \sim H/x$ . Тогда  $V_{dr} \sim vR/x \sim v/500 \sim 2 \cdot 10^5$  см/с. Через  $10^{-3}$  с частицы выскочат на стенки камеры.

Здесь и помогает способность магнитного поля иметь незамкнутые силовые линии (п. 4.2). В частности, в токамаке возбуждают ток вдоль плазменного шнура, располагающегося по оси тора. Возникает еще полоидальное поле вокруг этого тока, и в результате силовая линия завивается в спираль. На магнитных поверхностях, тоже в виде бубликов, длины этих линий (точнее, пути вдоль них, если линия незамкнута) одинаковы, поле более однородно и орбиты частиц устойчивы. Заодно ток греет плазму.

Но как пустить ток по круговому плазменному кольцу, не прикасаясь к нему? По оси бублика проходит магнитопровод трансформатора. Через первичную обмотку – ряд катушек – пропускают ток, создавая изменяющийся магнитный поток через сечение кольца и, следовательно, ток во вторичной обмотке – плазменном шнуре.

Возможна неоднородность поля вдоль самого себя:  $dH_x/dx$ . Силовые линии при этом сгущаются в виде такой магнитной бутылки (рис. 4.15). Это сгущение считаем малым, так что основное движение – опять вокруг силовой линии.

Из-за малого наклона  $\theta$  силовой линии на частицу действует сила  $F_x = -eV_{\perp}H \sin \theta/c$ , тормозящая ее движение в область сильного поля. Если угол  $\theta$  соответствует радиусу  $R$ , то при

смещении на  $dx$  те же силовые линии займут круг радиуса  $R - dx \cdot \sin \theta$ . Поток магнитного поля через любое сечение такой магнитной трубки, или магнитной поверхности, одинаков:

$$R^2 H = (R - dx \cdot \sin \theta)^2 (H + dH),$$

откуда  $\sin \theta = (R/2H) \cdot dH/dx$ . Работа  $F_x \cdot dx = -(eV_{\perp} R/2c) \cdot dH$  и равна изменению поступательной части кинетической энергии  $d(mV_x^2/2)$ . Скорость вдоль поля уменьшается.

С другой стороны, магнитное поле не производит работы, так что «поперечная» энергия должна так же возрастать:

$$d\left(\frac{mV_{\perp}^2}{2}\right) = \frac{eV_{\perp} R}{2c} \cdot dH$$

Подставляем значение  $R$  – радиуса орбиты  $mV_{\perp} c/eH$  и получаем

$$\frac{dV_{\perp}^2}{V_{\perp}^2} = \frac{dH}{H},$$

откуда  $V_{\perp}^2 \sim H$  или  $V_{\perp}^2/H = \text{const}$ . Можно усмотреть, что постоянно и произведение  $R^2 H$ , т.е. магнитный поток через орбиту частицы: она всегда движется по одной магнитной поверхности.

Пусть в области слабого поля  $V_{\perp} = V_0 \sin \varphi$ ,  $H = H_0$ . Тогда частица способна добраться до такого места, где  $V_0^2 \sin^2 \varphi / H_0 = V_0^2 / H$ . Определяется конус угла потерь:  $\sin^2 \varphi = H_0 / H_{max}$ . Частицы, попавшие в этот конус, то есть в слабое поле имевшие наклон скорости к силовой линии меньше  $\varphi$ , пролезут через магнитную пробку, а остальные отразятся и двинутся по спирали назад. Если с другой стороны тоже есть пробка, получится **открытая ловушка**. Из-за столкновений частицы постоянно попадают в конус потерь и уходят из ловушки, а то бы давно работали термоядерные реакторы. Кстати, сгущение линий земного поля у полюсов тоже создает магнитную ловушку (радиационные пояса ван-Аллена). Из-за этих поясов пилотируемые полеты приходится проводить на небольшой высоте, где остатки воздуха не позволяют частицам концентрироваться. Зато трение о воздух сокращает жизнь космических станций.

Недостаток открытых ловушек – разные поля. Увеличивать поле трудно, и приходится большую часть объема заполнять малым полем. Соответственно растут размеры. Зато открытая ловушка не боится дрейфа. В ИЯФ СО АН СССР (ныне СО РАН) предложены много-пробочные ловушки, в которых уход частиц имеет тип диффузии, а также амбиполярные, где потери тормозятся электрическим полем при разных температурах ядер и электронов.

Сейчас ясна принципиальная возможность осуществления управляемой термоядерной реакции (вопрос денег). Не ясно, успеет ли из этого развиваться энергетика (вопрос времени, оставшегося из-за экологических и демографических проблем).

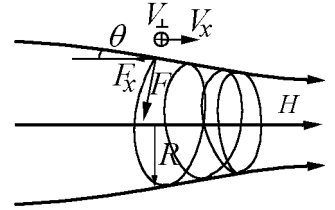


Рис. 4.15.

## Приложение. Вывод формулы двойного векторного произведения\*

Требуется доказать равенство

$$[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Два вектора  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  случайно могут быть параллельны. При этом  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = 0$ , но легко убедиться, что тогда и правая часть будет равна нулю: угол между  $(\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C})$  и между  $(\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B})$  один и тот же.

Переходим к более общей ситуации, когда  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  определяют некоторую плоскость. Векторное их произведение перпендикулярно этой плоскости. Вектор  $\mathbf{A}$  в принципе может иметь компоненту, выходящую из плоскости, но она не дает вклада в результат, так как параллельна  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$ . Влияет только лежащая в плоскости компонента  $\mathbf{A}$ , которую мы назовем  $\mathbf{A}_{||}$ , и в той же плоскости будет лежать результат ее умножения на  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$ . Поэтому нам достаточно плоского чертежа (рис. 4.16).

Изобразим векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , а также  $\mathbf{A}_{||}$ . Проведем пунктиром вспомогательные оси, перпендикулярные  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  соответственно, и разложим вектор  $\mathbf{A}_{||}$  (для краткости обозначим его длину просто  $A$ ) по этим осям. Сначала полезно проецировать на  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , получится  $A \cos \beta$  и  $A \cos \alpha$ , а потом уже на перпендикулярные оси, учитывая, что отмеченные в точках пересечения углы равны  $\alpha + \beta$ .

Теперь можно записать векторное произведение в виде

$$[\mathbf{A}_{||} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = [\mathbf{A}_{\perp B} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] + [\mathbf{A}_{\perp C} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]].$$

Перемножая  $\mathbf{A}_{\perp B}$  на  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$ , мы получим вектор, направленный вдоль  $\mathbf{B}$ , а произведение  $\mathbf{A}_{\perp C}$  на  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$  направлено против  $\mathbf{C}$ , что видно из рисунка. Учитывая еще, что модуль  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$  равен  $BC \sin(\alpha + \beta)$ , можем переписать последнее равенство:

$$[\mathbf{A}_{||} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \frac{A \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot BC \sin(\alpha + \beta) - \frac{\mathbf{C}}{C} \cdot \frac{A \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot BC \sin(\alpha + \beta).$$

Сокращая лишнее и учитывая, что косинусы – это атрибуты скалярного произведения, наконец получаем

$$[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

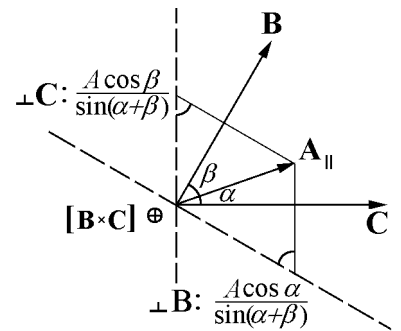


Рис. 4.16.

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Курс лекций для ФМШ

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

# Глава 5

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

### 5.1 Закон Фарадея

В уравнениях, которые мы рассматривали до сих пор, электрическое и магнитное поля были независимы (не считая того, что  $E$  поддерживало источники магнитного поля – токи). Но существует и непосредственная связь между полями.

Пусть имеется два «рельса» – проводника, по которым скользит со скоростью  $u$  проводящая же перекладина. Магнитное поле  $H$  перпендикулярно плоскости рисунка и существует слева от пунктирной линии (например, это внутренность катушки). Все это имеет место в системе отсчета, которую мы назовем исходной, а обозначим К.

На заряд  $e$  внутри движущегося проводника действует сила Лоренца  $F_L = euH/c$ , направленная вверх (чтобы не запутаться, берем положительный носитель заряда). Пусть проводник начал двигаться только что. Заряды в нем начнут перемещаться вверх. Постепенно верхний рельс и верхняя обкладка конденсатора  $C$  зарядятся положительно, а нижние рельс и обкладка – отрицательно. Возникнет электрическое поле  $E$ , направленное вниз и противодействующее силе Лоренца (рис. 5.1).

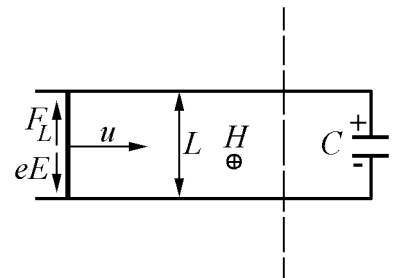


Рис. 5.1.

Равновесие между электрической и магнитной силой возникнет при условии  $euH/c + eE = 0$ , то есть достигнется поле  $E = uH/c$  (по величине), напряжение на конденсаторе  $V = uHL/c$ , где  $L$  – длина движущегося проводника. Заметим, что внутри проводника есть электрическое поле, к чему мы не привыкли: законом на самом деле преследуется не поле  $E$  в проводнике, а существование полной силы, действующей на подвижный заряд. Между крыльями самолета, летящего в земном магнитном поле  $H \sim 1$  эрстед, возникнет напряжение  $2 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10^{-3}$  СГС = 0,6 В. Внутри самолета использовать это напряжение нельзя, так как провода тоже движутся.

Перейдем теперь в систему отсчета  $K'$ , сопровождающую перекладину. Теперь она



стоит на месте, а граница магнитного поля едет со скоростью  $-u$  налево (вместе с магнитом или катушкой, создающими поле). Двигутся также рельсы и конденсатор. Разумеется, заряды на обкладках конденсатора от перехода в другую систему не исчезнут, и на конденсаторе будет то же самое напряжение  $V$  (рис. 5.2).

Что же будет внутри перемычки? Силы Лоренца в системе отсчета  $K'$  нет как таковой (теперь в материале  $u = 0$ ). Если при этом в проводнике будет электрическое поле, заряды в нем начнут ускоряться, чего быть не может: в этой цепи все давно установилось и от смены системы отсчета ток не пойдет. Приходится признать, что в проводнике  $E = 0$ .

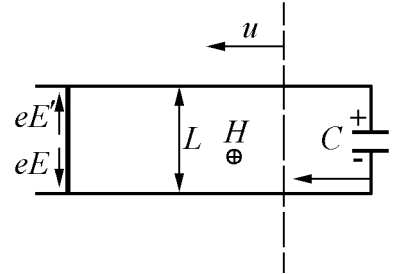


Рис. 5.2.

Куда исчезло электрическое поле? Ведь на рельсах сидят те же самые заряды, создававшие  $E = uH/c$  вниз. Снаружи магнитного поля они действуют по-прежнему. Остается признать, что тут влияет магнитное поле. Например, можно предположить, что движение источников поля  $H$  (катушек либо магнитов) создает поле  $E'$ , направленное в нашем случае вверх, а по величине тоже равно  $uH/c$ ; в результате сложения обоих электрических полей получается нуль и заряды в проводнике будут неподвижны, чего мы и добиваемся. Это дополнительное поле заменяет исчезнувшую силу Лоренца. Поскольку же нужна сила, действующая на покоящиеся заряды, это будет именно электрическое поле.

Не все ли равно, пропало поле  $E$  или добавилось противоположное поле  $E'$ ? И если верно второе, то откуда это  $E'$  возьмется? Мы привыкли, что электрическое поле создается зарядами. Где заряды – источники компенсирующего поля  $E'$ ?

Оказывается, такие заряды есть и сидят они там же, где токи, создающие магнитное поле. В движущемся магните компенсация зарядов нарушается, и он становится электрически поляризованным. Это релятивистский (связанный с теорией относительности) эффект. Мы доберемся до него в конце курса, а пока примем на веру<sup>1</sup>. Можно было бы предположить влияние других полей, но это противоречит опыту. Например, поле тяжести тут никак не меняется. Придумывать же специальное поле с теми же свойствами, как у электрического – это пустое занятие.

Получается интересная ситуация. Вольтметр, находящийся вне магнитного поля, покажет напряжение между рельсами  $V$ , а такой же вольтметр внутри магнитного поля покажет нуль, если он неподвижен в системе отсчета, сопровождающей перемычку. (Это – прямое доказательство возникновения поля  $E'$ ). До сих пор электрическое поле у нас было потенциальным:  $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L})$  был равен нулю. Теперь в системе  $K'$  это нарушается. Возьмем контур, проходящий через перемычку, рельсы и замыкающийся вне поля  $H$  (хотя бы через конденсатор или где-то рядом). При проходе по часовой стрелке  $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = V = uHL/c$ , так как электрическое поле есть только справа.

<sup>1</sup>Косвенный признак, за которым проглядывается теория относительности – присутствие в формулах магнетизма электродинамической постоянной  $c$ .

Мы почти уже получили замену одного из уравнений Максвелла – бывшего условия потенциальности электрического поля, причем  $E$  связалось с  $H$ . Осталось выразить правую часть через более подходящие величины. Заметим, что  $uL = -dS/dt$ , где  $S$  – площадь внутри контура, пронизанная магнитным полем. Тогда в правой части можно написать  $-H \cdot dS/dt$  или  $-d(HS)/dt$ , так как у нас величина  $H$  от времени не зависит. Величина  $\Phi = HS$  или в более общем виде  $\Phi = \int (\mathbf{H} d\mathbf{S})$  по **незамкнутой** поверхности  $S$ , натянутой на некоторый контур, называется **магнитным потоком** через поверхность  $S$ . Окончательно имеем **закон Фарадея**:

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \quad \text{где } \Phi = \int_{S_L} (\mathbf{H} d\mathbf{S}). \quad (5.1)$$

Здесь  $L$  – произвольный контур,  $S_L$  – опирающаяся на него поверхность, а направление вектора  $d\mathbf{S}$  выбирается в сторону, куда двинется буравчик (правый винт), вращаемый по направлению обхода контура  $L$ . Поверхность  $S$ , имеющая границей контур  $L$ , в остальном произвольна. Поток от деформации  $S$  не зависит в силу теоремы Гаусса (все силовые линии все равно пройдут насквозь).

Закон (5.1) выполняется также, когда меняется не  $S$ , а магнитное поле. В эксперименте 29 августа 1831 г. Фарадей именно открыл этот закон, включая и выключая поле в катушке. Контуром, через который менялся магнитный поток, была такая же катушка, намотанная поверх (но изолированная от первой) и замкнутая на гальванометр. И нам можно было считать  $L$  и  $S_L$  фиксированными, а поле  $H$  – переменным (уменьшающимся до нуля в узкой переходной зоне, которая перемещается со скоростью  $-u$ ).

В нашем примере при обходе по часовой стрелке  $\oint (\mathbf{E} d\mathbf{L}) > 0$ , так как справа поле  $\mathbf{E}$  направлено вниз, а слева  $E = 0$ . Буравчик, вращаемый по выбранному пути, двинется «в лист», то есть направления  $\mathbf{H}$  и  $d\mathbf{S}$  совпадают. Сам  $\int (\mathbf{H} d\mathbf{S}) > 0$ , но он уменьшается:  $d\Phi/dt < 0$ . Минус в правой части исправляет равенство. По-другому можно определить направление  $\mathbf{E}$  из **правила Ленца**: токи, вызываемые электрическим полем в контуре, стремятся компенсировать изменение магнитного потока. Если конденсатор заменить сопротивлением, ток пойдет по часовой стрелке и создаст дополнительное поле  $\mathbf{H}'$  того же направления, что исходное  $\mathbf{H}$ . Это поле компенсирует (вообще говоря, частично) уменьшение основного магнитного потока.

В исходной системе К поле  $E$  потенциально,  $\oint (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$ . Уравнение (5.1) также выполняется, если мы рассматриваем неподвижный в системе К контур, поскольку через него магнитный поток не меняется: правая часть (5.1) равна нулю. Но через **подвижный контур**, одна из сторон которого движется вместе с проводником, магнитный поток будет уменьшаться. Принята и другая форма записи закона Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\mathcal{E}$  – это **электродвижущая сила**, возникающая в меняющемся контуре (в данном случае – из-за силы Лоренца,  $\mathcal{E} = \oint (\mathbf{F}_L/e) d\mathbf{L}$  по контуру). Эта сторонняя, т. е. неэлек-

трическая, э.д.с.  $\mathcal{E}$  вызывает токи в цепи совершенно так же, как любой источник тока. Например, если сопротивление замкнутого контура  $R$ , пойдет ток  $\mathcal{E}/R$ .

Величины  $\mathcal{E}$  и  $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L})$ , хотя численно и равные, существуют в разных системах отсчета. В то же время они не совсем чужие, так как поля  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  родственны. Мы видим, что при переходе в другую систему из магнитного поля делается электрическое.

Изменяя магнитный поток через контур (двигая проводники или меняя поля от других контуров), можно вызвать в контуре токи. На этом основана современная электротехника, если не считать приборов типа карманного фонаря, где сторонние силы – химического происхождения. Генераторы, грубо говоря, – это рамки, вращаемые внешними силами в магнитном поле.

Рассмотрим катушку, через которую пропускается возрастающий ток (разрез показан на рис. 5.3). Внутри катушки будет возрастающее магнитное поле. Если взять контур в виде соосного круга, то через него будет возрастающий магнитный поток,  $d\Phi/dt > 0$ . Тогда по закону Фарадея появится ненулевая циркуляция  $\mathbf{E}$  по контуру:  $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) < 0$ , если двигаться по часовой стрелке. Из симметрии надо считать  $\mathbf{E}$  направленным вдоль окружности и на ней постоянным по величине. Получаем **электрическое** поле вполне соленоидального характера с **замкнутыми** силовыми линиями. Случай, когда круг имеет больший радиус, чем катушка (показанный на рис. 5.3) интересен тем, что в близкой окрестности электрической силовой линии магнитного поля нет, что не мешает возникновению электрического поля.

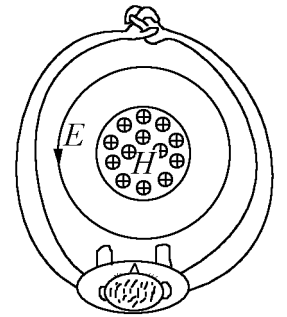


Рис. 5.3.

Такое поле нельзя сделать **никаким** распределением зарядов, так как от каждого заряда поле будет потенциально. Поэтому рассуждения о поляризации проводов и магнитов в начале параграфа, собственно, не так важны. Вывод: изменяющееся магнитное поле способно порождать электрическое. Опять видим, что основные объекты – это поля.

Эффекты непотенциальности поля  $\mathbf{E}$  вокруг катушки с изменяющимся током вполне заметны. Вольтметр с замкнутыми проводами, охватывающими катушку, покажет  $\mathcal{E} \propto d\Phi/dt$ , а если провода «с одной стороны» катушки, показания прибора будут совершенно другие (в идеале ноль). Эти индуктивные наводки сильно затрудняют измерения в цепях с быстропеременными токами. Пусть у нас есть катушка с сечением  $100 \text{ см}^2$ , а поле нарастает со скоростью  $3 \cdot 10^8 \text{ СГС}$  (300 эрстед за микросекунду). Тогда циркуляция по наружному контуру равна  $100 \cdot 3 \cdot 10^8 / 3 \cdot 10^{10} = 1 \text{ СГС}$ , или 300 В. Если человек (не прикасаясь к катушке!) сделает руками вокруг нее кольцо, по нему пойдет ток, в точности как если взяться за провода с таким напряжением; этот ток смертельный, да еще с некоторым запасом. Правда, долго поддерживать такой рост поля трудно: уже через 3 миллисекунды получился бы мегагаусс; но можно создавать в катушке поле амплитудой 300 эрстед переменным током с частотой  $\omega = 1$

МГц неопределенно долгое время, что столь же опасно для человека снаружи.

В заключение – соображения эстетического (для кого-то – формального) характера. В электростатике  $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$ , но важное значение имеет напряжение  $V = \int(\mathbf{E} d\mathbf{L})$  по незамкнутому контуру (например, оно вызывает поражения током). Поскольку нет магнитных зарядов,  $\oint(\mathbf{H} d\mathbf{S}) = 0$  для любой замкнутой поверхности. А поток через незамкнутую поверхность  $\Phi = \int(\mathbf{H} d\mathbf{S})$  тоже очень важен. Аналогично важны  $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{S})$  и  $\oint(\mathbf{H} d\mathbf{L})$ , а «незамкнутые» интегралы ничего существенного не выражают.

В присутствии диэлектриков и магнетиков в левой части уравнения (5.1) следует писать по-прежнему истинное среднее электрическое поле в веществе, а в правой – истинное среднее магнитное поле, т.е. вектор магнитной индукции:

$$\oint_L(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int_{S_L}(\mathbf{B} d\mathbf{S}). \quad (5.2)$$

В п. 5.3 будет получено уточненное уравнение Максвелла, обобщающее теорему Стокса.

## 5.2 Энергия магнитного поля. Индуктивность

Магнитное поле, как и электрическое, тоже имеет энергию. Рассмотрим две шины длины  $L$ , ширины  $b$ , по которым течет ток  $I$  (рис. 5.4). Поле между шинами  $H = 4\pi I/cb$  – это сумма двух полей от шин  $H_{1,2}$ , каждое из которых равно  $2\pi I/cb$ . Сила, действующая на одну из шин, по закону Ампера  $F = IH_i L/c = 2\pi I^2 L/c^2 b = (H^2/8\pi) \cdot Lb$ . Видим, что поле  $\mathbf{H}$  оказывает магнитное давление  $p = H^2/8\pi$ , чем напоминает электрическое поле.  $\mathbf{H}$  в данном случае давит наружу: шины, между которыми заключено магнитное поле, отталкиваются (пластины же заряженного конденсатора притягиваются).

Перейдем к вычислению энергии. Пусть расстояние между шинами увеличивается от нулевого до величины  $x$ , при постоянной величине тока и магнитного поля. Для поддержания тока нужен внешний источник. Э.д.с., или напряжение, возникающее при растяжении контура,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \cdot H \cdot \frac{dS}{dt} = -\frac{HL}{c} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

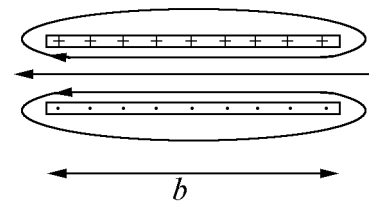


Рис. 5.4.

(Направление обхода выбрано по току). Будь контур просто замкнут, ток под действием этой эдс стал бы уменьшаться; для поддержания тока нужна противоположная эдс источника  $+(HL/c) \cdot dx/dt$ . Такое напряжение и надо приложить к контуру. Работа источника  $dA = (HL/c) \cdot (dx/dt) \cdot I \cdot dt = (HLI/c) \cdot dx$  за время  $dt$ . Перемещение на расстояние  $x$  требует работы  $A = HLIx/c$ .

Поскольку шины отталкиваются, они сами совершают работу  $A = Fx = (H/2)LI/c \cdot x$ , вдвое меньшую по величине. Ее надо вычесть из работы источника, чтобы найти

изменение энергии системы токов:

$$\Delta W = \frac{H L I x}{2c} = \frac{H^2}{8\pi} L b x.$$

На единицу объема поля приходится энергия

$$w = \frac{H^2}{8\pi}. \quad (5.3)$$

совершенно аналогично электрическому случаю (1.12).

Выразим теперь энергию (уже всего объема) через ток:

$$W = \frac{2\pi L x I^2}{c^2 b} = \frac{\mathcal{L} I^2}{2c^2}.$$

Коэффициент  $\mathcal{L} = 4\pi L x / b$  с размерностью длины называется **ИНДУКТИВНОСТЬЮ**. Это – аналог емкости. И в общем случае энергия пропорциональна квадрату тока (в электростатике аналог:  $q^2 / 2C$ ). Разумеется, индуктивность зависит от формы проводников. У проводника простой формы индуктивность порядка длины. Единица индуктивности в СИ – генри; из формулы  $W = \mathcal{L} I^2 / 2$  (нет  $c$ !) получаем  $1 \text{ Гн} = \text{Дж} / \text{А}^2 = c^2 \cdot 10^7 / (3 \cdot 10^9)^2 = 10^9 \text{ см}$ .

Другой способ определения индуктивности – через магнитный поток:

$$\Phi = \frac{\mathcal{L} I}{c}.$$

Эта формула аналогична электрической  $q = CV$ . Для катушки из  $N$  витков, площади  $S$  и высоты  $h$  один виток дает  $\Phi_1 = 4\pi N I S / ch$ . Силовые линии проходят сквозь все витки, и суммарный поток через катушку  $N\Phi_1 = 4\pi N^2 I S / ch$ . Получаем индуктивность  $\mathcal{L} = 4\pi N^2 S / h$ . Контур надо брать замкнутый; в этом примере предполагалось, что вклад замыкающих проводов по сравнению с самой катушкой мал.

Если в одном контуре идет ток, создается магнитное поле, и его силовые линии могут пронизывать другой контур. Поток через контур 2 от контура 1  $\Phi_{12} = \mathcal{L}_{12} \cdot I_1 / c$ , где  $\mathcal{L}_{12}$  – **коэффициент взаимной индукции** двух контуров. Например, на рис. 5.5 один контур – катушка из  $N_1$  витков, площади  $S_1$  и высоты  $h_1$ , а на нее надета катушка  $N_2$ ,  $S_2 > S_1$ ,  $h_2 < h_1$  (постановка опыта Фарадея). Поле  $H_1 = 4\pi N_1 I_1 / ch_1$ , поток  $\Phi_{12} = H_1 N_2 S_1 = 4\pi N_1 N_2 I_1 S_1 / ch_1 = \mathcal{L}_{12} \cdot I_1 / c$ . Взаимоиндукция  $\mathcal{L}_{12} = 4\pi N_1 N_2 S_1 / ch_1$ . Можно показать, что всегда  $\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21}$  (покажите для этого примера).

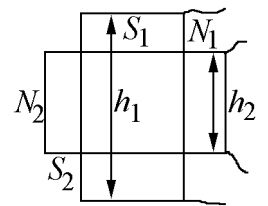


Рис. 5.5.

Пусть имеются две катушки, причем линии индукции поля, созданного первой, целиком проходят через вторую (как на рис. 5.5), и через контур 1 пропускают переменный ток  $I_1(t)$ . В нем возникает э.д.с.  $-(1/c) \cdot d\Phi / dt = -(\mathcal{L}_1 / c^2) \cdot dI_1 / dt$ . Для поддержания тока следует прикладывать к индуктивности противоположное напряжение  $V_1 = +(\mathcal{L}_1 / c^2) \cdot dI_1 / dt$ . Напряжение на выходе катушки 2

$$V_2 = V_1 \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1} = V_1 \frac{N_2}{N_1}.$$

Такие **трансформаторы** позволяют получать из высокого напряжения низкое и наоборот. В бытовых приборах, кроме того, они отвязывают схему от сети. Ферромагнитные сердечники ( $\mu \gg 1$ ) позволяют мотать катушки необязательно одну поверх другой, так как почти все силовые линии  $\mathbf{B}$  заключены в магнитопроводе. Так как магнитный поток определяется  $\mathbf{B}$ , индуктивность катушки с сердечником возрастет в  $\mu$  раз; энергия поля в линейном магнетике (с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu$ )

$$w = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \frac{(\mathbf{B}\mathbf{H})}{8\pi}, \quad (5.4)$$

что аналогично электростатическим соотношениям.

Но имеется и практическое различие: значительная намагниченность ( $\mathbf{B}$  резко не равно  $\mathbf{H}$ ,  $\mu$  заметно отличается от 1) почти всегда означает нелинейность, когда  $\mu$  непостоянна, или же вообще не имеет смысла как характеристика вещества (гистерезис, обсуждавшийся в п. 4.6). Тогда следует писать

$$w = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{H}d\mathbf{B}),$$

где интеграл берется от состояния, в котором  $B = H = 0$ , до конечного, причем вдоль реальной кривой  $B(H)$ , по которой менялось состояние магнетика.

На рис. 5.6 показана так называемая петля гистерезиса, по которой путешествует состояние материала при периодических изменениях  $H(t)$ . Существенно, что «магнитная» энергия есть не только энергия магнитного поля, а включает и отклик вещества: это вся энергия, потраченная источником на создание данного магнитного состояния. За цикл будет израсходована энергия, равная площади цикла, деленной на  $8\pi$ . Но раз магнитное состояние воспроизвелось то же, что было в начале, то и энергия, заключенная «чисто» в магнитном поле, не изменилась. Поэтому постоянно добавляемая энергия идет в тепло. Если петля широкая (площадь ее велика), то магнетик будет сильно нагреваться. Для трансформаторов, в которых магнитное поле меняется именно циклически, подбирают материалы с узкой петлей гистерезиса (и по возможности не заходят в режим насыщения). Заметим, что подобные вещи происходят и в некоторых диэлектриках (сегнетоэлектрики), но при этом существуют широкие классы линейных диэлектриков с заметной диэлектрической проницаемостью ( $\epsilon - 1 \gtrsim 1$ ).

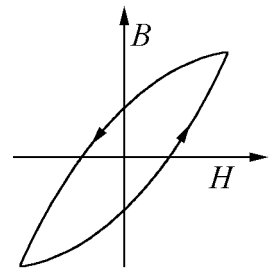


Рис. 5.6.

В 1912 г. открыто явление **сверхпроводимости**. При низких температурах (обычно несколько градусов Кельвина) удельное сопротивление некоторых металлов обращается в нуль (не просто мало, а буквально нулевое). Соответственно электропроводность становится бесконечной. Поэтому внутри сверхпроводника в принципе не может быть электрического поля. Из закона Фарадея следует, что там равна нулю и магнитная индукция. Если по сверхпроводящему проводу пустить ток, поле  $\mathbf{B}$  возникнет только снаружи провода, а внутри останется  $\mathbf{B} = 0$ . Следовательно, в толще проводника равна нулю плотность тока. Поэтому весь ток сосредоточен в тонком поверхностном слое<sup>2</sup>. Важное свойство сверхпроводящего контура – через

<sup>2</sup>Более того, если при комнатной температуре ток шел по толще провода, при охлаждении до температуры сверхпроводящего перехода он вытесняется на поверхность (эффект Мейснера), вытесняется наружу и магнитное поле.

него магнитный поток всегда сохраняется. Действительно, если контур  $L$  проходит целиком внутри сверхпроводника,  $\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$ , но этот интеграл пропорционален  $d\Phi/dt$ .

Если в сверхпроводник магнитное поле не проникает вообще, то в хороший «обычный» проводник поля и токи просачиваются постепенно, за небольшое время – на малую толщину так называемого **скин-слоя** (skin – кожа). Разберем качественно скин-эффект. На рис. 5.7 ток и поля проникают сверху вниз. Из теоремы Стокса в скин-слое  $HL - (H + dH)L = 4\pi jLdx/c$ , или  $dH/dx = -4\pi j/c = -4\pi\sigma E/c$ . Из закона Фарадея в другой проекции  $EL - (E + dE)L = (Ldx/c) \cdot dH/dt$  (знак – пропал из-за направления  $H$ : против правила обхода контура) откуда  $dE/dx = -(1/c) \cdot dH/dt$ . Систему уравнений (строго говоря, в частных производных) решаем, полагая  $dH/dx \sim H/\delta$ ,  $dH/dt \sim H/t$  и т.п. ( $\delta$  – характерная толщина скин-слоя). Получаем

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\sigma} \cdot t}.$$

Видим, что  $\delta$  растет со временем как  $\sqrt{t}$ , подобно задачам диффузии и теплопроводности. Для меди  $\delta \sim 14 \cdot \sqrt{t}$  в СГС; при  $t = 1$  мкс  $\delta \sim 0,14$  мм. Для переменного тока вместо  $t$  подойдет  $1/\omega$  и при промышленной частоте скин-слой около 1 см. У не очень толстых проводов работает все сечение.

Энергия магнитного поля может быть гораздо больше, чем электрического.  $E$  ограничено пробоем ( $\sim$  сотен кВ/см или  $10^3$  СГС). Магнитного пробоя не бывает, так как нет магнитных зарядов. Постоянные магниты дают  $\sim 10^4$  гаусс (то есть единиц СГС), электромагниты  $\sim 10^5$ , в одноразовых разрушаемых импульсных катушках (обычно одновитковых) достигается  $\sim 10^6$ . Большие поля получают при магнитной кумуляции. Если хорошо проводящий цилиндр с продольным магнитным полем внутри быстро сжать (взрывом), то изменения поля не проникают в толщу металла; там  $B$  и  $E = 0$ . Поэтому сохраняется магнитный поток через цилиндр (так как  $\oint (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$ ). Если радиус уменьшить в 10 раз, поле должно возрасти в 100 раз. Рекорд 25 Мэ принадлежит А.Д. Сахарову, А.И. Павловскому, В.К. Чернышеву и др. (1965).

Кроме скина, магнитная кумуляция ограничена неустойчивостью сжимающей магнитное поле поверхности. При поле  $10^6$  эрстед магнитное давление  $H^2/8\pi \sim 4 \cdot 10^{10} = 40000$  атм, а при  $10^7$  э –  $4 \cdot 10^6$  атм. В этом интервале металлы текут. Поскольку магнитное поле сопротивляется сжатию, возникает неустойчивость типа Релея-Тейлора. Струи металла проваливаются вперед, портят симметрию и уничтожают датчики до достижения максимального сжатия. Этому же способствует нагрев поверхности током.

Мы видели, что отталкивание пластин с противоположными токами можно представить как результат «поперечного» давления магнитного поля. Возьмем замкнутую катушку, для которой сохраняется магнитный поток  $\Phi$  (тогда не нужен источник). Энергия  $\mathcal{L}I^2/2c^2 = \Phi^2/2\mathcal{L}$ . Увеличим длину катушки на  $dh$ ; индуктивность  $\mathcal{L} = 4\pi N^2 S/h$  уменьшится, а энергия возрастет. Значит, сама катушка стремится укорачиваться, уменьшая энергию; сила  $F = dU/dh = (\Phi^2/2) \cdot (dh/dh)/(4\pi N^2 S)$ . Подставляя  $\Phi = NHS$ , получим  $F = (H^2/8\pi) \cdot S$ , то есть магнитное натяжение (отрицательное давление)  $H^2/8\pi$  вдоль силовых линий, в точности как для электрического поля. Правда, естественная для  $H$  постановка о давлении поперек силовых

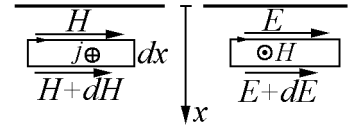


Рис. 5.7.

линий для  $E$  буквально не проходит, так как скачок параллельной составляющей  $E$  в электростатике невозможен. Но когда металлическая пластина втягивается в конденсатор, вполне можно найти силу через разность положительных электрических давлений поперек силовых линий (см. пример в п. 1.8). В среде при непрерывном  $E_{\parallel}$  возможен скачок  $D_{\parallel}$ . Например, под действием разности электрических давлений диэлектрик втягивается в конденсатор. В общем, электрическое и магнитное поля подобны резинкам, натянутым с силой ( $HB/8\pi$  или  $ED/8\pi$ ) на  $\text{см}^2$  и отталкивающимися друг от друга с таким же давлением.

Обсудим, откуда берется магнитное поле Земли. Когда-то думали, что внутри Земли имеется большой постоянный магнит. По современным представлениям, Земля имеет железное ядро, внешний радиус которого около половины земного радиуса (соответственно объем ядра около 1/8 объема Земли). Но в ядре слишком высоки температуры (3000 – 4000 К), чтобы оно находилось в ферромагнитном состоянии и могла существовать постоянная намагниченность.

Ядро, кроме самой внутренней его части радиусом около 1200 км, жидкое. В жидком железе из-за внутреннего нагрева радиоактивным распадом (в основном таких примесей, как уран, торий и калий-40) происходит конвекция. При появлении случайного затравочного магнитного поля в проводящем движущемся веществе возникает эдс индукции. Возникают токи, сами создающие магнитное поле. Если течение имеет подходящую конфигурацию, это добавочное поле складывается с начальным. Далее усиливается суммарное поле, и т.д. Подобный процесс самовозбуждения происходит в промышленных генераторах электрического тока – динамомашин, почему возникновение поля за счет кинетической энергии потоков жидкости и называют эффектом **гидромагнитного динамо**. Он возможен при высокой электропроводности среды, больших размерах, достаточной скорости течений и подходящей структуре потоков. На конвекцию существенно влияет вращение Земли, которое в конце концов определяет преимущественное направление оси магнитного диполя, близкое к оси вращения. Это значит, что средний ток в ядре кольцевой, направленный более или менее вдоль экватора. Но поскольку поле – продукт неустойчивости, иногда происходит «переполусовка», в последнее время – несколько раз за миллион лет. В периоды смены знака величина поля заметно меньше, а «временные» полюса гуляют по всей поверхности Земли.

Сейчас южный магнитный полюс находится в северном полушарии (там вектор поля направлен вниз). Это значит, что ток в ядре течет приблизительно с востока на запад, в направлении вращения Земли. Ось диполя наклонена на  $11,5^\circ$  и прецессирует на запад со скоростью  $\sim 0,2^\circ$  в год. Точки пересечения оси магнитного диполя с земной поверхностью называют **геомагнитными полюсами**. От них следует отличать **магнитные полюсы Земли**, определяемые как точки, где магнитная стрелка направляется по вертикали, и ориентировка по магнитному компасу невозможна. Южный магнитный полюс (на географических картах называемый северным) находится на территории Канады (о. Батерст в архипелаге Парри, около  $100^\circ$  западной долготы,  $76^\circ$  северной широты), а северный магнитный полюс (на картах южный) – при  $140^\circ$  восточной долготы,  $66^\circ$  северной широты. Получается, что полюса на картах заметно перекошены, даже относительно наклонной оси диполя: по дуге большого круга их разделяет  $159^\circ$  (или можно сказать, что  $201^\circ$ ). Это частично связано с местными аномалиями,



а частично – с некоторым произволом фиксирования магнитных полюсов Земли на глобусе: компас бесполезен не в двух точках, а скорее в довольно обширных местностях. Интересно, что указанные точки находятся вне главных географических объектов, пронизываемых земной осью вращения – открытого Северного Ледовитого океана и материка Антарктиды.

### 5.3 Ток смещения

Уравнение для циркуляции магнитного поля (магнитная теорема Стокса), которым мы пользовались в статике, не совсем подходит в динамике. Пусть ток  $I$  идет через конденсатор. Возьмем контур  $L_1$ , окружающий провод (рис. 5.8). По теореме Стокса

$$\oint (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I}{c}.$$

Подразумевается, что ток  $I$  пересекает плоскую поверхность, вроде мыльной пленки, натянутой на контур. Вокруг провода будет поле  $H = 2I/cr$ . Это нам уже известно. Теперь берем контур  $L_2$ , у которого натянутая поверхность попадает внутрь конденсатора. Через эту поверхность не проходит провод и не идет ток. Может быть, на «проекции» внутренности конденсатора не будет магнитного поля?

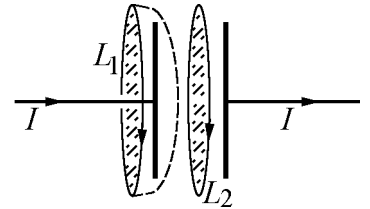


Рис. 5.8.

Вряд ли  $H$  будет скачком изменяться при переходе какой-то воображаемой границы в пространстве. Для скачка  $H$  должен по этой границе протекать ток. К тому же и для контура  $L_1$  можно завести поверхность  $S$  внутрь конденсатора (показано пунктиром). Сомнительно, что поле от этого пропадет. Равным образом можно продеформировать поверхность, опирающуюся на  $L_2$ , так что через нее появится ток. Видно, что с уравнением циркуляции не все в порядке.

Чем можно заменить ток  $I$  внутри конденсатора?  $I = dq/dt$ , а  $q = ES/4\pi$ . Записав теорему Стокса в виде

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{d(ES)}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d(ES)}{dt},$$

мы получим то же значение  $H$  для поверхности  $S$ , через которую не идет ток. Тогда уравнение для произвольной поверхности  $S$  – проходит через нее ток или нет –

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left( \int_{S_L} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) \right), \quad I = \int_{S_L} (\mathbf{j} d\mathbf{S}). \quad (5.5)$$

Это уже – окончательный вид последнего уравнения Максвелла. Именно последнее слагаемое добавил Максвелл в теорему Стокса. В этом виде уравнение похоже на закон

Фарадея. Разница – в знаке перед слагаемым с производной электрического потока и в отсутствии «магнитных токов».

Величину  $(1/4\pi) \cdot d \left( \int_{S_L} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) \right) / dt$  называют **током смещения** через  $S_L$ . Этимология: в диэлектрике надо вместо  $E$  ставить  $D$  – электрическую индукцию, еще называемую электрическим смещением ( $D$  от слова displacement; потому, видимо, что в диэлектрике смещаются заряды). Можно ввести плотность тока смещения  $\mathbf{j}_d = (1/4\pi) \cdot d\mathbf{D}/dt$ . Магнитное поле создается совместно обычными токами проводимости  $\mathbf{j}$  и токами смещения  $\mathbf{j}_d$  (т.е. изменяющим электрическим полем).

## 5.4 Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны

Выпишем все четыре уравнения для полей:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} &= 4\pi Q_S, & \oint_S \mathbf{H} d\mathbf{S} &= 0, \\ \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left( \int_{S_L} (\mathbf{H} d\mathbf{S}) \right), & \oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) &= \frac{4\pi I_L}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left( \int_{S_L} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Эта система и называется уравнениями Максвелла. Ее симметрия нарушается только отсутствием магнитных зарядов. Если реакция вещества на поле существенна,

$$\begin{aligned} \oint_S (\mathbf{D} d\mathbf{S}) &= 4\pi Q_S, & \oint_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}) &= 0, \\ \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left( \int_{S_L} (\mathbf{B} d\mathbf{S}) \right), & \oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) &= \frac{4\pi I_L}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left( \int_{S_L} (\mathbf{D} d\mathbf{S}) \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

причем в (5.7) токи и заряды – свободные, и уравнения поля дополняются материальными связями между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Полезно запомнить, что во всех потоках через поверхности участвуют индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , а в контурных интегралах – поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Поскольку поля порождают друг друга, не исключено существование электромагнитного поля **без токов и зарядов**. Попробуем решить уравнения для этого случая. В вакууме  $Q$  и  $I = 0$ . Пусть ток  $i$  на единицу длины оси  $z$  по плоскости  $yz$  в направлении оси  $y$  (вверх, рис. 5.9). Вблизи плоскости должно появиться поле  $\mathbf{H} = 2\pi i/c$ , направленное против оси  $z$ . Но поле не может возникнуть мгновенно везде. Для этого понадобится бесконечная энергия. Ищем решение в виде волны, распространяющейся вдоль оси  $x$  с некоторой скоростью  $V$ . Ситуация похожа на задачу об остановке течения жидкости в трубе – от заслонки идет волна сжатия со скоростью звука.

Впереди волны поля  $E$  и  $H$  нулевые. Применяем закон Фарадея к контуру, частично высунутому вперед волны:

$$-EL = -(1/c) \cdot d\Phi/dt = -HVL/c,$$

если  $E$  в волне направлено против оси  $y$  (тогда оно получится положительным).

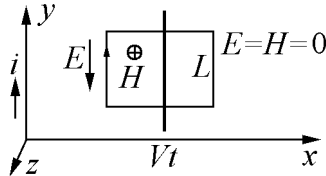


Рис. 5.9.

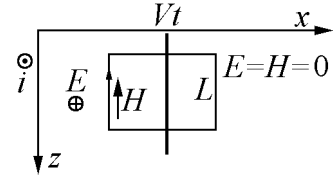


Рис. 5.10.

Применим теорему Стокса с током смещения к контуру в плоскости  $xz$  (рис. 5.10):

$$HL = EVL/c.$$

Получаем два уравнения:

$$E = HV/c, \quad H = EV/c.$$

Перемножив их, легко убедиться, что

$$V^2 = c^2, \text{ или } V = \pm c.$$

Знак  $+$  соответствует волне, бегущей вправо. Для нее поля равны:  $E = H$ . Сами поля не находятся из таких уравнений, поскольку источник их – ток  $i$  – не задет контурами. Если же его зацепить, получим, что между током  $i$  и фронтом волны  $E = H = 2\pi i/c$ , оба положительны (значит, мы удачно выбрали направления). Для «левой» волны изменится знак  $H$ .

Прервем ток  $i$ , что эквивалентно пусканию обратного тока. Этот обратный ток породит волну с обратными направлениями полей, которая, складываясь с первой волной, начнет гасить поля вблизи плоскости  $yz$ . Обе волны имеют скорость  $c$ , так что мы получим прямоугольный импульс, в котором поля ненулевые, распространяющийся в пространстве без искажений. Теперь уже нигде нет токов и зарядов, но поля имеются: они создают друг друга. Это и есть электромагнитная волна. Она теперь будет лететь в пространстве сколько угодно, если не застрянет в непрозрачной среде. Уже около 15 миллиардов лет живет реликтовое излучение.

Экспериментально электромагнитные волны обнаружил Герц в 1886 г., чем подтвердил теорию Максвелла. Теперь их существование доказывается при каждом употреблении радиоприемников, телевизоров и мобильных телефонов. Свет – это тоже электромагнитные волны с длиной  $(3,8 \div 7,6) \cdot 10^{-5}$  см.

Наконец мы добрались до смысла электродинамической постоянной  $c$ : это скорость электромагнитных волн. Заметим, что по смыслу вывода скорость волны ни от чего не зависит и, в частности, не зависит от системы отсчета.

Разберем энергетику волны. За время  $t$  заполняется полями объем  $2abct$ , по обе стороны площадки  $ab$  на плоскости  $yz$ . Энергия поля  $(H^2 + E^2)/8\pi$  на  $\text{см}^3$ , а всего

$$2(2\pi i/c)^2/8\pi \cdot 2abct = 2\pi i^2 abt/c.$$

Она берется из работы источника тока: ток  $i \cdot a$  идет против напряжения  $b \cdot E$ . Работа источника  $iabE = i \cdot ab \cdot 2\pi i/c$  – то же значение. В волне энергия  $(H^2 + E^2)/8\pi = EH/4\pi$  переносится со скоростью  $c$ ; возникает поток энергии

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \text{ эрг}/(\text{см}^2\text{с}).$$

Вектор  $\mathbf{S}$  называется вектором Пойнтинга (иногда Умова – Пойнтинга). Убедитесь, что  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  как раз показывает направление распространения волны. Полезно заметить, что электромагнитная волна поперечная.

Плоские волны – вещь довольно редкая. Чаще излучается сферическая волна источником малых размеров, например, движущимся зарядом. Если источник излучал время  $\tau$ , то вдали от него через время  $t \gg \tau$  получим сферический слой объема  $4\pi R^2 \cdot c\tau$ , где  $R = ct$  – расстояние наблюдения. Энергия в этом слое постоянна, так что  $E = H \sim 1/R$  – очень медленное спадание. Из-за этого и возможна радиосвязь, а из других галактик мы ловим только излучение. Кулоновские и дипольные поля с таких расстояний «не доходят».

## 5.5 Движение в скрещенных полях. Преобразования полей\*

Пусть в поле  $\mathbf{E} = E_y$ ,  $\mathbf{H} = H_z$  помещен положительный заряд  $e$ . Он начнет разгоняться вверх в поле  $\mathbf{E}$  и отклоняться вправо полем  $\mathbf{H}$  (рис. 5.11). Какое получится движение?

Запишем уравнения движения в проекциях на оси:

$$m\dot{v}_x = ev_y H/c, \quad m\dot{v}_y = eE - ev_x H/c.$$

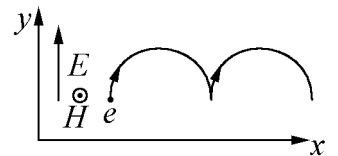


Рис. 5.11.

Для  $v_y$  получаем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = - \left( \frac{eH}{mc} \right)^2 \cdot v_y = -\Omega^2 \cdot v_y.$$

Его решение:  $v_y = A \sin(\Omega t)$ , поскольку в начальный момент заряд покоился. Заметим, что частота колебаний  $\Omega$  – такая же, как частота вращения в чисто магнитном поле. Начальное ускорение  $\dot{v}_y = eE/m = A\Omega$ , откуда  $A = eE/m\Omega = cE/H$ ;  $v_y = (cE/H) \sin(\Omega t)$ .

Скорость  $v_x$  легко получается из второго уравнения:

$$v_x = (c/eH) \cdot (eE - m\dot{v}_y) = (cE/H) \cdot (1 - \cos(\Omega t)).$$

Это сумма колебаний, сдвинутых относительно  $v_y$  на  $\pi/2$ , и движения с постоянной скоростью. С некоторым усилием вспоминаем, что именно так движется точка на ободу колеса, катящегося со скоростью  $V = cE/H$ . Начальное положение точки – внизу. Следовательно, заряд будет летать по циклоиде. Неожиданно направление его среднего смещения, или дрейфа: ось  $x$  – перпендикулярно обоим полям.

Сопровождая колесо (перейдя в систему отсчета, имеющую скорость  $V$  вдоль оси  $x$ ), мы получим просто круговое вращение с частотой  $\Omega$ . Но такое движение бывает в магнитном поле  $H$  без всяких примесей. Опять, как в случае с законом Фарадея, приходим к выводу, что движение в магнитном поле приводит к появлению электрического поля. В нашем случае это дополнительное поле должно уничтожить исходное поле  $E$ . Такая цель достигнется, когда возникающее поле  $E' = -VH/c$ , а в векторной форме  $\mathbf{E}' = [\mathbf{V}\mathbf{H}]/c$ .

Само собой, что и при движении в электрическом поле возникает магнитное. Поехав мимо конденсатора с полем  $E$ , замечаем, что его обкладки стали переносить токи  $\pm\sigma V = \pm VE/4\pi$  на единицу длины. Эти токи создадут магнитное поле  $H' = 4\pi i/c = VE/c$ . В векторном виде  $\mathbf{H}' = -[\mathbf{V}\mathbf{E}]/c$ .

Разумеется, везде предполагалось, что  $V \ll c$ . При больших скоростях формулы преобразования полей надо будет исправить, но сам факт останется. Несмотря на видимую разницу, поля преобразуются друг через друга примерно как координаты при повороте осей. Оказывается, поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – это компоненты так называемого тензора электромагнитного поля, а переход в другую систему отсчета можно истолковать как вращение в четырехмерном пространстве.

В системе СИ это единство полей замаскировано тем, что даже размерности их разные (см. п. 4.6). Вообще-то измерять примерно одно и то же в разных единицах иногда приходится. Например, в самолете приборы показывают высоту в метрах (у англичан даже в футах), расстояния же по горизонтали измеряются в километрах (соответственно в милях). Как физические величины, расстояния по горизонтали и вертикали не отличаются. На практике же между ними разница есть – в масштабах, выделенность вертикали вызвана влиянием силы тяжести. Примерно такого же характера различие единиц для полей в системе СИ.