

# МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ГИДРОДИНАМИКА

Курс лекций для ФМШ

## ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. П. Ершов

3 февраля 2010 г.

# Глава 1

## ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В этой главе рассматриваются течения идеальной жидкости на основе уравнения Д. Бернулли (1700–1782). Год рождения уравнения – 1738: гидродинамике в 2010 году исполнится 272 года. За это время развилась наука с довольно сложным математическим аппаратом. Здесь мы ограничимся почти везде уровнем школьной алгебры, обращая основное внимание на физическую сторону явлений. Большинство из них удастся понять на основе физической интуиции и простых оценок.

### 1.1 Гидростатика

Рассмотрим вначале покоящуюся жидкость. Слово «жидкость» часто будет употребляться для краткости вместо «сплошная среда» и может применяться, например, к газу. Под «частицей жидкости» понимается объем, достаточно малый, чтобы внутри него можно было пренебречь изменениями давления или скорости течения. Однако этот объем все же должен содержать огромное количество молекул, что позволит рассматривать его как сплошное вещество. Понятие частицы жидкости в гидродинамике аналогично механическому понятию материальной точки.

Силы, действующие на выбранную частицу жидкости, делятся на массовые – например, сила тяжести, и поверхностные – результат воздействия соседних частиц. Вводить поверхностные силы можно, если малы длины свободного пробега молекул и межмолекулярное расстояние. Тогда «внешние» молекулы воздействуют на интересующий нас объем только вблизи его поверхности. В этом и состоит приближение сплошной среды.

Для покоящейся жидкости поверхностные силы сводятся к давлению. Давление  $P$  – это сила, действующая на единичную площадку в направлении нормали к ней. На площадку  $\Delta S$  придется сила, пропорциональная площади:  $F = P\Delta S$ .

Например, столб жидкости плотности  $\rho$ , высотой  $h$ , сечением  $S$  притягивается к

Земле с силой  $\rho ghS$ . В равновесии разность сил давления нижних и верхних слоев должна компенсировать вес:  $\Delta PS = \rho ghS$ , и давление столба жидкости

$$\Delta P = \rho gh. \quad (1.1)$$

Давление измеряется в динах/см<sup>2</sup> (СГС), Н/м<sup>2</sup> = Па (СИ, в честь Б. Паскаля (1623–1662)). Формула (1.1) позволяет при заданных  $\rho$  и  $g$  измерять давление в единицах длины. Часто используются миллиметры ртутного или метры водяного столба. Нормальное атмосферное давление равно 760 мм рт.ст., что соответствует  $\rho gh = 1,013 \cdot 10^6$  дин/см<sup>2</sup> =  $1,013 \cdot 10^5$  Па (плотность ртути  $13,6 \text{ г/см}^3 = 136000 \text{ кг/м}^3$ ,  $g = 980 \text{ см/с}^2 = 9,8 \text{ м/с}^2$ ). Говорят, что такое давление – одна атмосфера (1 атм). Без множителя 1,013 получаем 1 бар =  $10^6$  дин/см<sup>2</sup> =  $10^5$  Па. Мы обычно не будем различать бар и атмосферу. Давление 1 кгс/см<sup>2</sup> (кгс – килограмм силы или вес тела массой 1 кг) называется технической атмосферой и равно  $9,8 \text{ Н} / (10^{-4} \text{ м}^2) = 0,98$  бар. Над каждым квадратным сантиметром земной поверхности находится почти точно 1 кг воздуха (1033 г).

По **закону Паскаля** (1653 г.), величина силы давления не зависит от ориентации поверхности. Это легко проверить, покрутив барометр-анероид. Другими словами, давление – скаляр (не имеет направления в пространстве). Вектор силы получается умножением на вектор площади, направленный перпендикулярно поверхности:

$$\mathbf{F} = P \Delta \mathbf{S}.$$

В центре Земли давление порядка  $\rho Rg/2$ , где  $\rho = 5,5 \text{ г/см}^3$  – средняя плотность,  $R = 6400 \text{ км}$  – радиус Земли,  $g/2$  – среднее ускорение силы тяжести. Получаем  $1,7 \cdot 10^6$  атм или 1,7 мегабар (по более точным современным данным – около 3,92 Мбар).

На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила: давление на нижнюю часть выше. Для вертикального цилиндра высоты  $h$  разность давлений равна  $\rho gh$ , и при площади основания  $S$  цилиндр будет выталкиваться с силой  $\rho ghS$ . Другими словами, выталкивающая сила равна весу жидкости того же объема, как у рассмотренного цилиндра. Этот вывод не зависит от формы тела. Представим себе, что тело объема  $V$  заменили объемом жидкости точно такой же формы. Этот объем находится в равновесии, т.е. его вес точно компенсируется выталкивающей силой. Такой же будет выталкивающая **архимедова** сила, действующая на реальное тело, т.е.

$$F_A = \rho Vg, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости. Равенство (1.2) выражает **закон Архимеда**.

## 1.2 Стационарное течение. Закон Бернулли

Перейдем к гидродинамике. Скорость движущейся жидкости в общем случае изменяется в пространстве и времени. Разумеется, проще и понятнее течения, в которых

скорость в данной точке пространства не зависит от времени. Такие течения называются **стационарными**. Пример стационарного течения – обтекание неподвижного тела (рисунок 1.1). На большом расстоянии от тела скорость равна  $V$ , в точках А и С нулевая, а в точке В больше, чем  $V$ . Частичка жидкости, приближаясь к телу, сначала замедляется до точки А, затем разгоняется от А к В, замедляется от В к С, опять разгоняется до прежнего значения  $V$ . Но в данной точке пространства, куда все время приходят новые частицы жидкости, все они будут иметь одну и ту же скорость.

В другой системе отсчета (например, где жидкость на бесконечности покоится, а тело движется со скоростью  $-V$ ), течение не будет стационарным. Обычно стационарность возможна не более чем в одной системе отсчета. В стационарном течении траектории частиц, прошедших через данную точку пространства, повторяют друг друга.

Эти траектории – линии, к которым в каждой точке касателен вектор скорости, называются **линиями тока**. Внесением краски можно сделать линии тока видимыми.

Из неподвижных линий тока можно образовать стенки **трубки тока**. Жидкость, вошедшая в трубку тока с одного торца, выходит из другого (но не через стенки).

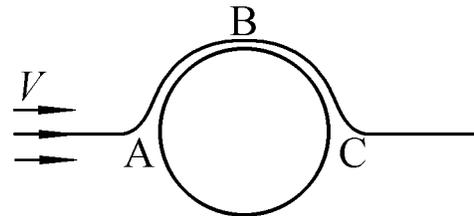


Рис. 1.1.

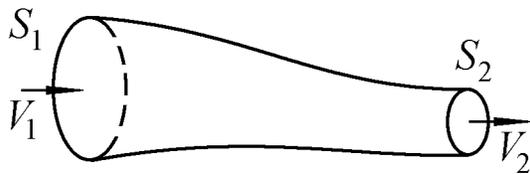


Рис. 1.2.

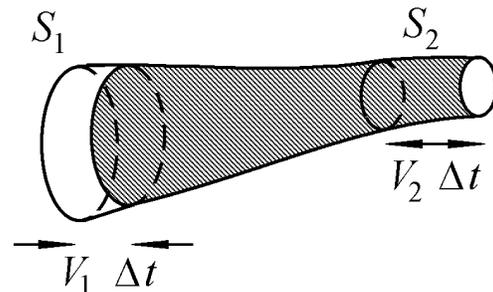


Рис. 1.3.

Здесь мы будем придерживаться простейшей модели – **идеальной жидкости**, в которой отсутствует трение и взаимодействие между любыми соприкасающимися объемами сводится к давлению. Кроме того, будем считать жидкость несжимаемой, т.е. не меняющей свою плотность при изменении давления. Мы увидим, что область применимости этих предположений достаточно обширна.

Рассмотрим некоторую трубку тока (рисунок 1.2). Входное  $S_1$  и выходное  $S_2$  сечения будем считать малыми. Тогда можно пренебречь изменениями скорости и давления в пределах этих сечений. За малое время  $\Delta t$  в трубку входит масса жидкости  $\rho S_1 V_1 \Delta t$ . С другого конца трубки вытекает масса  $\rho S_2 V_2 \Delta t$ . Так как количество жидкости внутри трубки в стационарном течении постоянно, получаем **уравнение неразрывности**

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 . \quad (1.3)$$

Теперь выделим («подкрасим») массу жидкости, которая в данный момент как раз заполняет трубку тока (рисунок 1.3). Через время  $\Delta t$  основная часть этой массы еще будет находиться внутри трубки, но справа «высунется» кусок массы  $m = \rho S_2 V_2 \Delta t$ , а слева останется место, занятое как раз такой же массой неподкрашенной жидкости. Результат движения за интервал  $\Delta t$  такой же, как если бы мы «вылезавшую» массу изъяли слева и переместили вперед, изменив ее форму и скорость от  $V_1$  до  $V_2$ . При этом изменится кинетическая энергия подкрашенной жидкости:

$$K(t + \Delta t) - K(t) = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{\rho S_2 V_2^3 \Delta t}{2} - \frac{\rho S_1 V_1^3 \Delta t}{2}.$$

Энергия изменяется за счет работы внешних сил. В нашем случае это силы давления, действующие на торцы объема. Работа силы  $P_1 S_1$  слева равна  $P_1 S_1 V_1 \Delta t$  (сила, умноженная на перемещение), справа над нашей массой производится отрицательная работа  $-P_2 S_2 V_2 \Delta t$ . Через боковые стенки тоже действуют силы, но они перпендикулярны скорости и работы не производят. Получаем равенство

$$\frac{\rho S_2 V_2^3 \Delta t}{2} - \frac{\rho S_1 V_1^3 \Delta t}{2} = P_1 S_1 V_1 \Delta t - P_2 S_2 V_2 \Delta t.$$

После сокращения на  $\Delta t$  и на  $S_1 V_1 = S_2 V_2$  имеем

$$P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}. \quad (1.4)$$

Другими словами, в стационарном течении вдоль линии тока постоянна сумма  $P + \rho V^2/2$ . Это и есть простейшая форма **закона Бернулли**, или **уравнения Бернулли**.

В поле тяжести надо учесть потенциальную энергию  $mgh$ ; тогда вдоль любой линии тока

$$P + \frac{\rho V^2}{2} + \rho gh = \text{const}. \quad (1.5)$$

Уравнения Бернулли (1.4, 1.5) выглядят очень просто, но позволяют понять множество эффектов и широко используются в гидродинамике.

Оценим величину гидродинамических (или аэродинамических) сил. Пусть тело обтекается потоком, имеющим на бесконечности скорость  $V$  и давление  $P_0$  (рисунок 1.4). Очевидно, есть линия тока, которая упирается в поверхность тела в точке А, где течение останавливается. Применим закон Бернулли вдоль этой линии тока:

$$P_0 + \frac{\rho V^2}{2} = P_A + 0, \quad \text{откуда} \quad \Delta P = P_A - P_0 = \frac{\rho V^2}{2}.$$

Величина  $\rho V^2/2$  и будет характерным гидродинамическим перепадом давления. На подводной части корабля, идущего со скоростью 30 узлов = 15 м/с прирост давления составит 1,1 атм. На носу самолета, летящего со скоростью 200 м/с, давление возрастает на 0,25 атм. Сжимаемость воздуха при таких скоростях еще невелика.

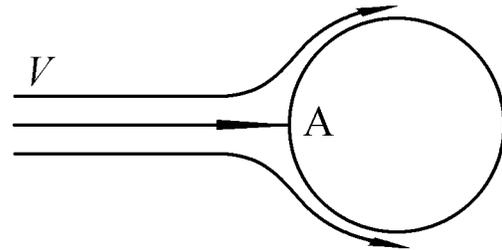


Рис. 1.4.

## 1.3 Кумуляция

Неожиданное применение гидродинамики – кумулятивный заряд. В 1942 г. были захвачены немецкие снаряды нового типа, названные «бронепрожигающими», а позднее получили известность так называемые фаустпатроны<sup>1</sup>, которые пробивали совершенно несообразную до этого толщину брони – до 200 мм. В таком боеприпасе (рисунок 1.5) заряд взрывчатого вещества имеет спереди коническую выемку с металлической облицовкой. Под действием взрыва облицовка приобретет скорость, направленную перпендикулярно образующей внутри конуса. Как это приводит к пробиванию, независимо разобрались Г. Биркгоф (1912–1994) и М. А. Лаврентьев (1900–1980).

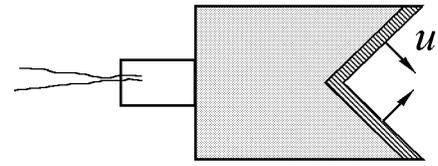


Рис. 1.5.

Оказалось, что материал облицовки течет, как идеальная жидкость. Действительно, пусть металл, плотность которого  $\rho \approx 10 \text{ г/см}^3 = 10^4 \text{ кг/м}^3$ , приобрел при взрыве скорость 2 км/с. При торможении потока может развиваться давление  $\rho V^2/2 = 2 \cdot 10^{10} \text{ Па}$  или  $2 \cdot 10^5 \text{ атм}$ . Прочность меди, обычно применяемой для облицовки, около 20 кгс/мм<sup>2</sup>, или  $2 \cdot 10^3 \text{ атм}$ : прочностью металла можно пренебречь. Под действием таких нагрузок он потечет (хотя буквально и не расплавится). Известно, что при встрече сходящихся к оси потоков жидкости вперед выбрасывается струя. Она и пробивает броню.

Оценка давления, использованная выше, очень приближительна. Для более аккуратного вычисления перейдем в систему отсчета, в которой течение стационарно. Пусть скорость метания равна  $u$ . В лабораторной системе (рис. 1.6) место образования струи перемещается вперед со скоростью  $V = u/\sin \alpha$ . Надо «поехать» со скоростью  $V$ , тогда жидкость приобретет дополнительную скорость  $-V$ . Вдали от места соударения скорость втекания будет  $V_0 = u \cdot \text{ctg} \alpha$  и направлена вдоль облицовки, как и должно быть в стационарном течении. Получаем задачу о втекании облицовки со скоростью  $V_0$  и вытекании в обе стороны двух струй.

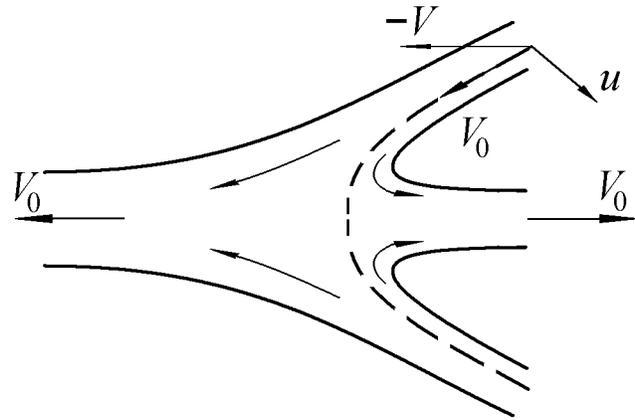


Рис. 1.6.

Свободная граница жидкости – линия тока; вдоль нее выполняется закон Бернулли. Поскольку давление снаружи постоянно, вдоль всей свободной границы скорость будет постоянной и равной  $V_0$ . Вдали от места столкновения к той же величине  $V_0$  стремится скорость также и по всему сечению струи. Именно скорость  $V_0$  в стационарной системе отсчета и следует подставлять в уравнение Бернулли ( $V_0 \gg u$  при малом угле  $\alpha$ ). Максимальное давление достигается в точке разворота О и равно  $\rho V_0^2/2$ . При  $u = 2 \text{ км/с}$ ,

<sup>1</sup>нем. Faust – рука, ручной снаряд.

$\alpha = 20^\circ$  скорость  $V_0 = 5,5$  км/с, а давление  $1,5 \cdot 10^6$  атм, почти как в центре Земли).

В исходной системе отсчета скорость струи  $V_C = V + V_0 = u(1 + \cos \alpha) / \sin \alpha$ , скорость «песта», вылетающего с обратной стороны,  $V_{\Pi} = u(1 - \cos \alpha) / \sin \alpha$  (пест тоже летит вперед). В нашем примере скорость струи 11,4 км/с, а скорость песта 0,35 км/с. Хотя масса струи мала, она уносит почти всю кинетическую энергию облицовки. Такая концентрация воздействия в небольшой области называется **кумуляцией**.

Попав в броню, такая струя буквально размывает ее. В системе отсчета, в которой струя и броня движутся навстречу с равными скоростями  $V_C/2$ , получается обращенное кумуляцией течение (рис. 1.7). При одинаковой плотности материалы брони и струи расходятся одинаково, т.е. глубина пробивания равна длине струи. Грубо длину струи можно оценить как длину образующей конуса  $D/(2 \sin \alpha)$ , где  $D$  – калибр (диаметр) заряда. Тогда облицовка с углом  $20$  градусов должна пробивать примерно 1,5 калибра. Увеличить длину струи, уменьшая угол облицовки, неограниченно не удастся, так как растет давление и начинает сказываться сжимаемость облицовки. Скорость  $V_0$  должна быть хотя бы не больше скорости звука в металле  $c$  (в нашем примере почти равна). Но реальное пробивание больше, так как струя в полете вытягивается: задняя часть струи получается из края конуса, где слой взрывчатого вещества тонкий и набранная облицовкой скорость меньше. Удастся пробивать порядка метра, производя взрыв на некотором «фокусном» расстоянии от брони.

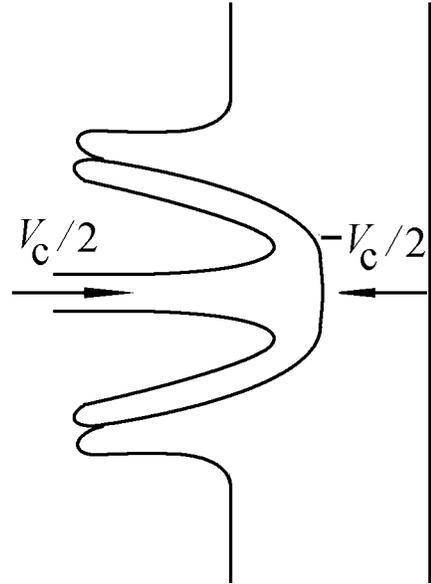


Рис. 1.7.

Теперь способность металла течь кажется очевидной, но в свое время идея воспринималась с трудом, в особенности среди специалистов по пробиванию брони.

## 1.4 Волновые движения

Волнение на поверхности воды – основной источник эстетического впечатления от больших водоемов. Начнем с волн на «мелкой воде», когда глубина  $h$  значительно меньше длины волны  $\lambda$ . Перейдем в систему отсчета, которая «сопровождает» волну, имеющую скорость  $V$  (пока неизвестную). В этой стационарной системе жидкость движется

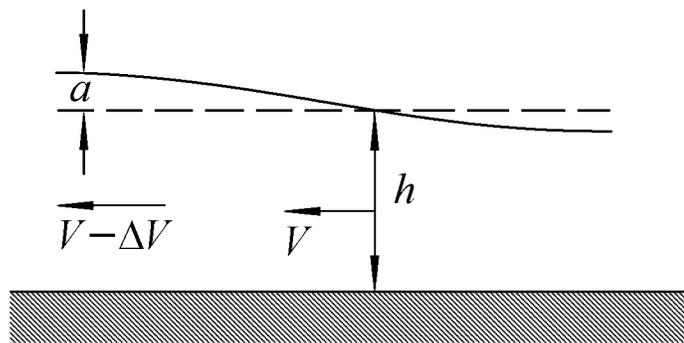


Рис. 1.8.

со скоростью, близкой к  $V$ , а волна неподвижна (рис. 1.8). Из уравнения неразрывности

$$Vh = (V - \Delta V)(h + a) ;$$

здесь  $\Delta V$  – уменьшение скорости воды в том месте, где ее уровень поднялся на величину  $a$ . (В лабораторной системе отсчета скорость перед волной нулевая, то есть волна набегаёт на покоящуюся жидкость. В волне же скорость как раз будет  $\Delta V$ ). Считая  $\Delta V$  и  $a$  малыми, пренебрежем произведением  $a\Delta V$ ; тогда

$$h\Delta V = aV . \quad (1.6)$$

Для верхней линии тока запишем закон Бернулли

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gh = \frac{P_0}{\rho} + \frac{(V - \Delta V)^2}{2} + g(h + a) .$$

Опять пренебрегая  $\Delta V^2$ , получаем

$$V\Delta V = ga . \quad (1.7)$$

Поделив (1.7) на (1.6), видим, что эти два уравнения для двух неизвестных  $a$  и  $\Delta V$  совместны только при условии  $g/V = V/h$ , т.е. скорость волны

$$V = \sqrt{gh} . \quad (1.8)$$

При малой амплитуде ( $a \ll h$ ) скорость  $V$  не зависит от  $a$ .

Пусть произошло подводное землетрясение на глубине 2 км. Если размер затронутой области больше 10–20 километров, мы получим длинную волну на мелкой воде. Ее скорость  $\sqrt{10 \cdot 2 \cdot 10^3} = 140$  м/с – сравнима со скоростью самолета. Не надо путать скорость  $V$ , с которой перемещается изменение формы поверхности, со скоростью частиц жидкости в лабораторной системе  $\Delta V = aV/h = 7$  см/с при амплитуде  $a = 1$  м.

У берега передний фронт волны замедляется: уменьшается глубина  $h$ . Поскольку задние участки продолжают напирать, растет высота волны. При «удачной» форме морского дна длинная волна может собраться в компактное образование (рисунок 1.9).

Зависимость длины волны от глубины можно понять из простой аналогии. Пусть колонна автомобилей длины  $\lambda$  проезжает мимо неподвижного наблюдателя за время  $T$ . Можно считать, что передний автомобиль выехал из ворот стоянки на время  $T$  раньше заднего.

Затем колонна въезжает на участок дороги, где скорость снижена, например перед постом ГАИ. Сначала замедляет ход передний автомобиль, затем следующий, и т.д. Колонна сокращается, но мимо поста проходит за то же самое время  $T$ ! Ведь, чтобы

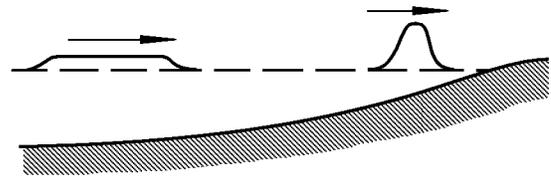


Рис. 1.9.

доехать до данной точки, каждый автомобиль тратит одинаковое время. Следовательно, при движении колонны сохраняется отношение  $T = \lambda/V$ . Другими словами, длина колонны автомобилей или волны цунами изменяется пропорционально ее скорости:

$$\lambda/\lambda_0 = V/V_0 = \sqrt{h/h_0}.$$

Пусть волна возникла на глубине  $h_0 = 2560$  м, первоначальная длина волны  $\lambda_0 = 16$  км, амплитуда  $a_0 = 1$  м. Корабль, оказавшийся на пути волны, поднимется на ее верхушку за время порядка  $\lambda_0/2\sqrt{gh_0} = 50$  с и практически волны не почувствует. Но при глубине 10 м длина волны уменьшится в  $\sqrt{256} = 16$  раз – до 1 км.

Масса такого бугра (на единицу длины фронта)  $\rho\lambda a$ ; его центр тяжести поднят на высоту  $a/2$ , так что потенциальная энергия равна  $\rho g\lambda a \cdot a/2$ . (Проверьте, что кинетическая энергия волны в лабораторной системе отсчета  $\rho\lambda h\Delta V^2/2$  равна потенциальной). В идеальной жидкости энергия сохраняется, так что произведение  $\lambda a^2 = \text{const}$  при движении волны по переменной глубине. Следовательно, высота волны растет очень медленно:  $a/a_0 = (h_0/h)^{1/4}$ , и в рассмотренном примере она увеличится до 4 м. Скорость на этой глубине около 10 м/с. Здесь уже наша теория перестает выполняться, потому что высота волны стала порядка глубины. Выход волны на берег – довольно сложное явление. Все же попробуем сделать хотя бы грубую оценку.

У берега может сформироваться волна, длина которой порядка высоты  $H$ , а энергия  $\rho g H^3/2$  примерно такая же, как у исходной волны  $\rho g\lambda_0 a_0^2/2$ . Это – самый опасный случай: вряд ли возможна волна, у которой длина заметно меньше высоты – тонкая «стенка» воды; она тут же опрокинется и рассыпется. Получаем  $H \sim (\lambda_0 a_0^2)^{1/3} \approx 25$  м.

Скорость такой стены воды порядка скорости падения с высоты  $H$ : около 20 м/с, т.е. убежать от нее трудно. Такие волны – **цунами**<sup>2</sup> – тоже пример кумуляции. Длинное, пологое образование, совершенно незаметное в океане, может произвести большой эффект на отлогом берегу. Наблюдались цунами высотой до 50 м.

Волны на глубокой воде, когда длина волны  $\lambda$  мала по сравнению с глубиной (рис. 1.10), можно рассмотреть аналогично. Разница в том, что в уравнении неразрывности роль глубины играет величина, пропорциональная длине волны, так как искривления линий тока с глубиной затухают, и с некоторой

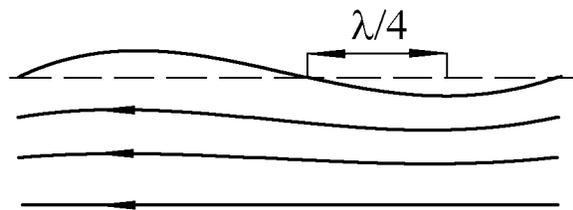


Рис. 1.10.

характерной глубиной их можно заменить ровным дном. Оценку можно получить, считая характерную глубину равной четверти длины волны: на этом размере происходят заметные изменения высоты поверхности. Тогда в формуле для скорости заменим  $h$  на  $\lambda/4$ :  $V = \sqrt{g\lambda/4}$ . Точное выражение вместо 4 содержит  $2\pi$ :

$$V = \sqrt{g\lambda/2\pi}, \quad (1.9)$$

<sup>2</sup>По-японски: большая волна в гавани.

то есть характерная глубина равна  $\lambda/2\pi$ . Аналогично, рассматривая колебания, мы всегда разыскивали частоту  $\omega = 2\pi/T$ , как более полезную, чем  $\nu = 1/T$ ; соответственно характерное время колебаний – не период  $T$ , а  $1/\omega = T/2\pi$ . Иногда правильные масштабы обозначают не особой буквой, как это произошло с частотой, а исправляют уже принятую букву. Например,  $\lambda/2\pi$  обозначают  $\lambda$ .

Рассмотрим теперь стоячую волну в реке, вызванную неровностью дна (рисунок 1.11). Пусть на дне имеется возвышение малой высоты  $y$ , скорость реки  $V$ , глубина  $h$ . Найдём поднятие уровня воды  $x$ . Снова запишем уравнения неразрывности и Бернулли

$$Vh = (V - \Delta V) \cdot (h + x - y), \quad \frac{V^2}{2} + gh = \frac{(V - \Delta V)^2}{2} + g(h + x).$$

Считая  $x$ ,  $y$ ,  $\Delta V$  малыми и пренебрегая их произведениями и квадратами, упростим уравнения:  $h\Delta V = (x - y)V$ ,  $V\Delta V = gx$ , откуда

$$x = y \cdot \frac{V^2}{V^2 - gh}. \quad (1.10)$$

Рис. 1.11 соответствует быстрому течению ( $V^2 > gh$ ), что бывает на горной реке. Для равнинной реки скорость течения всегда меньше  $\sqrt{gh}$ , и поэтому при поднятии дна ( $y > 0$ ), будет  $x < 0$ , т.е. уровень воды понижается. Рельеф поверхности будет обратным рельефу дна. Жидкость, чтобы ускориться, должна опуститься.

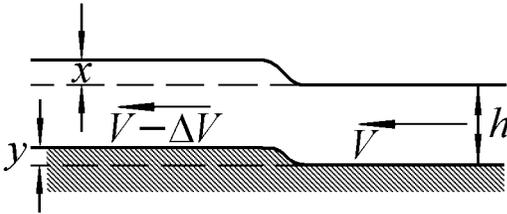


Рис. 1.11.

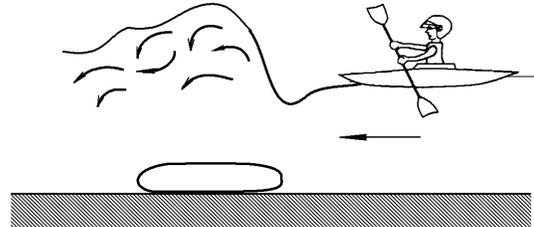


Рис. 1.12.

Что если скорость реки равна  $\sqrt{gh}$ ? Нуль в знаменателе (1.10) означает, что значение  $x$  будет велико по сравнению с  $y$ . Наше решение получено для малого  $x$  и при  $V = \sqrt{gh}$  не годится: при такой или близкой скорости малое поднятие дна вызовет **не малое** изменение уровня. Малое  $x$  формально возможно при  $y = 0$  – ровном дне. Действительно, скорость  $V = \sqrt{gh}$  – это скорость поверхностных волн, течение их как раз останавливает. Но эти волны не нуждаются в неровностях дна: при ровном дне можно возбудить на поверхности волну, и поверхность при этом может иметь любую форму.

Допустим, что на дне реки со скоростью течения, несколько меньшей  $\sqrt{gh}$ , лежит большой камень (рисунок 1.12). Вначале его воздействие приведет к падению уровня и увеличению скорости. В некоторой точке знаменатель (1.10) может перейти через нуль и изменить знак, что соответствует большому поднятию. В результате на камне будет стоять высокий вал с бурным перемешиванием. Участки рек с такими валами

привлекают к себе водных туристов. При большой высоте вала формулы применимы лишь качественно: существенной будет также и вертикальная скорость.

Волна большой амплитуды (**бор**) может существовать и на ровном дне. Естественно, она уже не привязана к какой-то точке реки и будет по ней перемещаться. Опять «остановим» волну, перейдя в стационарную систему отсчета (рисунок 1.13). Скорость втекания  $V$  равна скорости бора относительно воды. Запишем уравнение неразрывности

$$Vh = u(h + x),$$

а вместо закона Бернулли – второй закон Ньютона, определяющий изменение импульса течения. Импульс элемента массы  $m = \rho h V \Delta t = \rho(h + x)u \Delta t$  изменится из-за разности сил гидростатического давления:

$$mu - mV = \frac{\rho g h}{2} \cdot h \Delta t - \frac{\rho g (h + x)}{2} \cdot (h + x) \Delta t.$$

Сокращая на  $\rho \Delta t$ , получаем

$$\frac{gh^2}{2} + V^2 h = \frac{g(h + x)^2}{2} + u^2 (h + x).$$

Выразив из уравнения неразрывности  $u$ , получаем связь скорости волны  $V$  и ее амплитуды  $x$ :

$$V^2 = g \frac{(h + x)(h + x/2)}{h}. \quad (1.11)$$

При  $x \rightarrow 0$  скорость бора стремится к  $\sqrt{gh}$  – скорости волны малой амплитуды. При  $x > 0$  скорость бора больше  $\sqrt{gh}$ , а при  $x < 0$  («отрицательный» бор), наоборот, меньше, чем  $\sqrt{gh}$ .

То, что скорость нормального ( $x > 0$ ) бора больше скорости волн малой амплитуды, указывает на его устойчивость (иначе бор, являющийся сильным возмущением поверхности, мог бы излучать волны вперед, теряя на этом энергию). Зато отрицательный бор, в котором происходит падение уровня, по этой же причине неустойчив: он должен рассыпаться, генерируя впереди волны, за которыми не может угнаться. Эти выводы подтверждаются практикой.

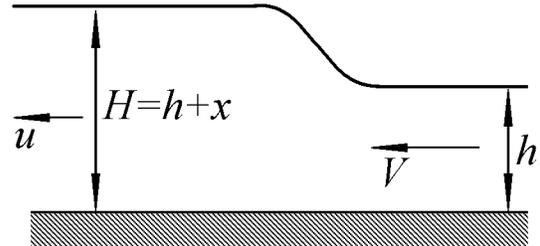


Рис. 1.13.

Рассмотрим другой подход к отбору физически разумного решения. Проверим, выполняется ли закон Бернулли. Сравним для верхней линии тока  $V^2/2 + gh$  в начальном состоянии и  $u^2/2 + g(h + x)$  в конечном (давление  $P_0$  постоянно). Выразим скорость  $u = Vh/(h + x)$ :

$$\frac{V^2}{2} + gh \asymp \frac{V^2 h^2}{2(h + x)^2} + g(h + x) \Rightarrow \frac{V^2}{2} \asymp \frac{V^2 h^2}{2(h + x)^2} + gx,$$

где знак  $\asymp$  означает «непонятно, что больше». Подставляя скорость волны  $V$  из (1.11) и перенося кинетическую энергию в левую часть, получим

$$g \frac{(h + x)(h + x/2)}{2h} - g \frac{(h + x/2)h}{2(h + x)} \asymp gx \Rightarrow x \frac{(h + x/2)^2}{h(h + x)} \asymp x.$$

Дробь в левой части последнего неравенства всегда больше 1 (это квадрат отношения среднего арифметического глубин  $h$  и  $h + x$  к их среднему геометрическому). Правильный знак неравенства определяется знаком  $x$ . При  $x > 0$  левая часть больше правой, т.е. энергия после прохождения бора уменьшается. Часть энергии перейдет в беспорядочное движение воды или колебания поверхности, а далее – в тепло. Поэтому мы и не применяли уравнение Бернулли, определяя  $V$ : уравнение импульса выглядит более надежным<sup>3</sup>. В «отрицательном» боре, при  $x < 0$ , энергия в волне должна увеличиваться (неравенство выглядит, например, как  $(-5) \cdot 1,2 < (-5)$ ). Найти дополнительную энергию сложнее, чем рассеять лишнюю. Такой бор возможен только при внешней поддержке, например, если вода ускоряется какими-то устройствами, которые вдобавок должны двигаться по дну. В природе такие условия не встречаются.

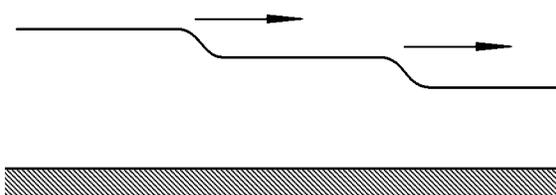


Рис. 1.14.

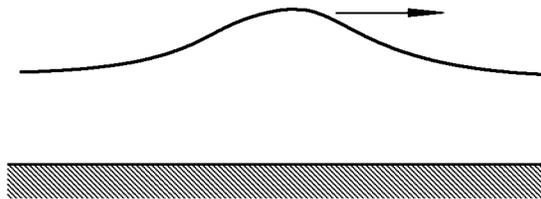
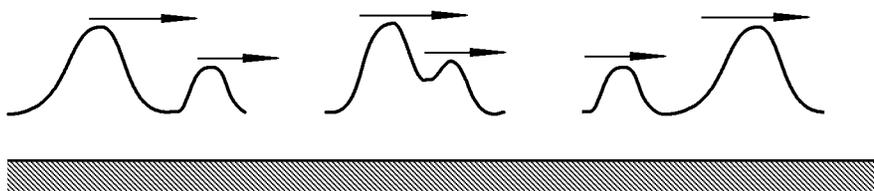


Рис. 1.15.

Бор возникает в устьях рек с небольшой глубиной, когда прилив затормаживает течение. После возникновения он может проходить порядка 100 км (по Сене – до Руана). Высота бора может быть несколько метров, скорость перемещения – несколько м/с, что явно должно сказываться на речном транспорте. В России заметные приливы бывают только на Дальнем Востоке, поэтому это явление у нас мало известно. Можно наблюдать бор в домашних условиях, пустив воду по наклонному лотку и перегораживая течение. Бор возникает у препятствия, затем перемещается вперед. Если убрать препятствие, он медленно сносится назад и исчезает.

Пусть две волны малой амплитуды распространяются одна за другой. Вторая волна на рис.



1.14 догонит первую, так как для нее глубина (и, значит, скорость) больше

Рис. 1.16.

исходной. Пологая волна достаточно большой амплитуды имеет тенденцию становиться более крутой и даже опрокидываться. С другой стороны, на глубокой воде длинные волны распространяются быстрее коротких. Слабая дисперсия – зависимость скорости от длины волны – сохраняется и для мелкой воды и работает в обратную сторону, стремясь сделать волну более плавной. Оказывается, оба эффекта могут точно компенсироваться.

Такая уединенная волна, или **солитон** (рисунок 1.15), имеет вид колоколообразного возвышения и распространяется на большие расстояния, не изменяя своей формы. Удивительно, что при столкновении солитоны взаимодействуют как частицы, обмениваясь своими скоростями (рис. 1.16). В конечном состоянии получаются такие же два солитона, как в начальном.

<sup>3</sup>Если же использовать закон Бернулли, то нарушился бы второй закон Ньютона, что эквивалентно появлению несуществующих (фиктивных) внешних сил. Строго говоря, при неравномерности течения и уравнение импульса нуждается в уточнении, но качественная картина не изменится.

## 1.5 Неустойчивость Гельмгольца

Почему ветер вызывает волнение? Казалось бы, ровная поверхность при любом ветре – состояние равновесия с минимальной потенциальной энергией. Это состояние тем не менее не всегда устойчиво.

Над гребнем волны с малой амплитудой  $a$  воздух ускоряется (рисунок 1.17). Как уже отмечалось, характерная ширина трубки тока равна  $\lambda = \lambda/2\pi$  при длине волны  $\lambda$ . Изменение скорости воздуха  $\Delta V = V \cdot a/\lambda$ . Это приводит к падению давления

$$\Delta P = \rho \cdot [(V + \Delta V)^2 - V^2] / 2 \approx \rho V \Delta V ,$$

которое «пытается» увеличить амплитуду волны. Препятствует этому тяжесть. Если  $\Delta P$  превышает давление столба жидкости  $\rho_l g a$  ( $\rho_l$  – плотность жидкости), волна будет расти. Получаем условие роста

$$\frac{\rho V^2 a}{\lambda} > \rho_l g a \quad \text{или} \quad V > \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho} \cdot g \lambda} , \quad (1.12)$$

Скорость ветра должна превышать скорость волн на глубокой воде по крайней мере в  $\sqrt{\rho_l/\rho} \approx 28$  раз. Это и позволило нам не переходить в систему отсчета волны. Описанная неустойчивость рассмотрена Г. Гельмгольцем (1821–1894) в 1868 г.

Ветер со скоростью 10 м/с должен вызывать волны с длиной в несколько сантиметров. Действительно, порыв ветра над гладкой поверхностью воды вызывает появление мелкой ряби<sup>4</sup>. Но для волн длиной в несколько метров требуется скорость на порядок больше. Такой ветер, если и бывает, то настолько редко, что не может быть причиной почти постоянного волнения в океане.

Однако трудно сомневаться, что волнение вызывается ветром. Для морских волн имеется эмпирическая зависимость

$$V^2 = g \cdot \lambda / 4,9 ,$$

откуда видно, что скорость ветра лишь немного превышает скорость волн. Для проявления неустойчивости Гельмгольца такая скорость недостаточна. В действительности волнение вызывается довольно сложным резонансом турбулентных пульсаций ветра с волнами.

Неустойчивость Гельмгольца особенно наглядно проявляется, когда тяжесть не влияет. Если скользят друг по другу слои жидкости одинаковой плотности, неустойчивость возникает при любой скорости скольжения. Другой пример – столб дыма из трубы ( $g$  параллельно поверхности скольжения). Оценим скорость роста волн (рисунок 1.18). Из симметрии в лабораторной системе отсчета волна движется с половинной скоростью дымовой струи. Тогда в системе волны дым и окружающий воздух обтекают волну с противоположными скоростями, равными  $V/2$ . При амплитуде волны  $a$  перепад давления  $\Delta P = \rho V^2 a / 4\lambda$ . Этот перепад ускоряет слой с характерной толщиной  $\lambda$ :

$$\Delta P = \rho \lambda \cdot W ,$$

<sup>4</sup>При таких коротких волнах начинает влиять поверхностное натяжение, которое мы здесь не рассматриваем.

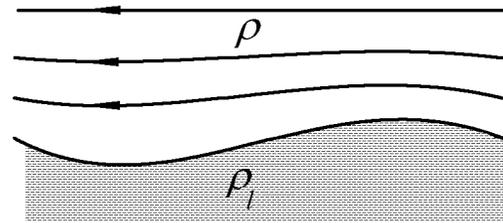


Рис. 1.17.

где  $W$  – ускорение границы раздела, которое можно выразить через время роста волн  $t$  и амплитуду волны  $a$ :  $W = a/t^2$ . Получаем

$$t \approx \frac{2\lambda}{V}, \quad (1.13)$$

т.е. волна заметно вырастает на пути  $Vt/2 = \lambda$ , меньшем своей длины.

Наблюдения дыма из трубы показывают, что возникает волна длиной около диаметра трубы, нарастающая согласно нашим выводам. Когда амплитуда волны становится не малой – порядка половины длины – струя дыма начинает быстро тормозиться и перемешиваться с воздухом.

Трубы служат для того, чтобы выносить дым на большую высоту. Это достаточно дорогие сооружения. Можно ли добиться того, чтобы свободная струя не перемешивалась с воздухом и поднималась как бы в трубе? Поскольку такое движение неустойчиво, похоже, что ничего сделать нельзя. Поэтому и приходится строить трубы такой высоты (до 300 м).

В очень тихую погоду при малой скорости дыма, например из домашней печки, все же можно видеть струю, проходящую довольно большой путь без перемешивания. Видимо, здесь сказываются два обстоятельства: удачное (устойчивое) распределение скоростей в струе при малой скорости и очень малые начальные отклонения.

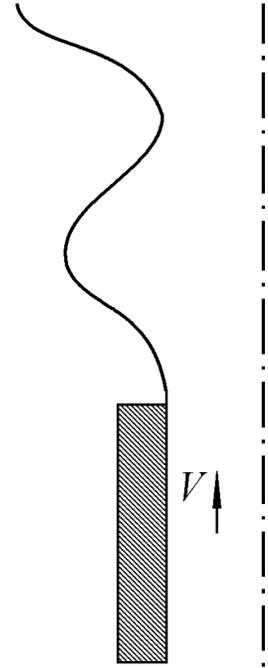


Рис. 1.18.

## 1.6 Неустойчивость Релея–Тейлора

Нальем в стакан воду, прикроем его бумажкой и перевернем. Вода не выливается. Этот опыт обычно объясняют тем, что в пузыре воздуха над водой давление меньше атмосферного и разница давлений удерживает воду. Теперь уберем бумажку. Хотя давление от этого измениться не могло, вода выливается за доли секунды.

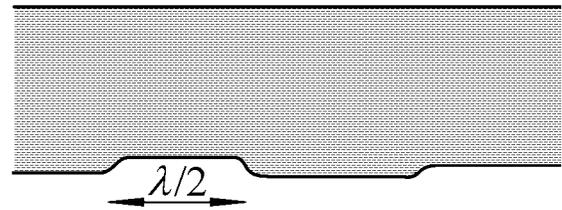


Рис. 1.19.

Мы опять имеем дело с неустойчивостью. Пусть нижняя граница воды стала неровной. Можно считать, что из выемки взяли воду и сделали из нее выступ (рисунок 1.19). В целом вода переместилась вниз, и потенциальная энергия уменьшилась. Для волны длиной  $\lambda$  и амплитудой  $a$  изменение потенциальной энергии  $\Delta U = -\rho\lambda a \cdot ag/2$  (на единицу длины в поперечном к рисунку направлении). Кинетическая энергия

$$\rho\lambda\lambda \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2$$

(снова по вертикали считаем затронутым слой жидкости  $\lambda = \lambda/2\pi$ ). Сумма кинетической

энергии и изменения потенциальной равна нулю – начальному значению. Получаем

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \cdot a. \quad (1.14)$$

Существенное возрастание амплитуды ( $\Delta a \approx a$ ) произойдет за характерное время  $\Delta t$ :

$$\Delta t \approx \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \cdot \frac{a}{\Delta a} = \sqrt{\frac{\lambda}{g}}.$$

Точное растущее со временем решение уравнения (1.14) имеет вид

$$a = a_0 \cdot e^{(t/\Delta t)}, \quad (1.15)$$

то есть за характерное время  $\Delta t$  возмущение увеличивается в  $e = 2,718$  раз. Для стакана с водой характерное значение  $\lambda$  – диаметр стакана – около 5 см. Это наиболее медленно растущее возмущение, так как более длинные волны «не уместятся». Тогда  $\Delta t \approx 0,03$  с. Вытаскивая бумажку, мы вызываем на поверхности волнение с амплитудой никак не меньше 0,3 мм. Когда амплитуда вырастет, скажем, до 3 см, можно считать, что вода уже практически вылилась. Амплитуда вырастает в 100 раз,  $\exp(t/\Delta t) = 100$ ,  $t = \Delta t \cdot \ln(100) = 4,6 \cdot \Delta t = 0,15$  с – разумное совпадение с опытом.

Похожая ситуация наблюдается при падении карандаша, поставленного на острие, что уже обсуждалось в прошлом семестре, только вместо  $\lambda$  надо поставить величину порядка длины карандаша. (Аккуратный расчет дает  $2/3$  длины).

Напомним, что время проявления неустойчивости практически не зависит от начальных условий. В любом случае получится несколько характерных времен  $\Delta t$ . Если сделать начальную амплитуду порядка молекулярных размеров (на 7 порядков меньше), то время возрастет всего в 4 раза (0,6 с). Попробуйте увеличить время падения карандаша, возможно точнее устанавливая его на острие.

Какая польза от таких задач? Кто будет наливать воду на потолок и наблюдать ее падение? Оказывается, описанная неустойчивость Релея–Тейлора вполне прикладная. Примерно в 1950 г. к Дж. Тейлору (1886–1975) обратилась фирма, производящая бумагу. Бумажная масса, напоминающая кашу, помещалась на вибрирующий стол для освобождения от воды. При большой интенсивности вибраций качество бумаги резко ухудшалось. Тейлор выяснил, что это происходило, когда вертикальное ускорение стола превышало ускорение силы тяжести  $g$ . С «точки зрения будущей бумаги», тяжесть временами была направлена вверх, что и приводило к развитию неустойчивости и порче поверхности. Позднее выяснилось, что подобную задачу уже решал Релей (1842–1919).

Эта открытая версия истории (возможно, сама по себе и верная) сильно уступает настоящей. В атомной бомбе взрывом химического ВВ сжимается к центру шар из плутония (имплозия). К маю 1944 г., после полугода исследований, не удалось достичь заметного прогресса. 24 мая в Лос-Аламос (в рамках сотрудничества США и Великобритании) прибыл Дж. Тейлор. Он указал на причины неудач – неустойчивость сжимающейся сферы. Вещество движется с ускорением к центру. В неинерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью, возникает искусственная тяжесть, направленная наружу: тяжелая жидкость находится «выше» легкой.

Время сжатия  $t$  порядка  $\sqrt{R/W}$ , где  $W$  – характерное ускорение,  $R$  – радиус. Время нарастания волн длиной  $\lambda = R$  будет  $\sqrt{R/W}$  – то же самое. Более короткие волны растут еще быстрее. Есть явная опасность потери симметрии из-за неустойчивости. Довольно быстро эта трудность была преодолена, что впоследствии пригодилось в термоядерных бомбах, также работающих на принципе имплозии. (Термоядерный заряд облучается светом от предварительного взрыва атомного заряда. Отдача испаряющейся поверхности толкает вещество внутрь).

В малом масштабе та же задача – лазерный термоядерный синтез. Вместо атомного взрыва шарик термоядерного горючего размером с горошину облучается мощными лазерами. Из-за неустойчивости нужное сжатие – в  $10^4$  раз – не достигается. С этим явлением ведется борьба, но пока хорошей симметрии сжатия не получено. По данным экспериментов нейтронный выход и выделившаяся энергия в несколько раз ниже расчетного значения. Можно сказать, что если раньше человечество использовало устойчивые процессы, то теперь приходится разрабатывать неустойчивые.

Гидродинамика идеальной жидкости часто критикуется за нефизичность. Р. Фейнман в своем известном курсе физики называет ее теорией «сухой воды». Мы видели, что во многих задачах вода получается вполне мокрой, особенно когда нет твердых границ. Подробнее условия, когда мало влияние вязкости, мы рассмотрим ниже.