МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

ВВЕДЕНИЕ

КИНЕМАТИКА

А. П. Ершов

25 августа 2009 г.

ВВЕДЕНИЕ

Мы приступаем к изучению физики. Эта обширная и развивающаяся наука не может быть определена кратко, в немногих словах, если мы хотим сохранить сколько-нибудь вразумительности. Например, если сказать, что физика суть базовая наука о природе, это будет выглядеть внушительно, но туманно. Поэтому вместо определения мы начнем с приблизительных пояснений. Возможны несколько способов такого предварительного обозначения физики.

В рамках **описательной схемы** можно понимать физику как совокупность основных разделов, которые обыкновенно перечисляют в исторической последовательности:

1. **Механика.**
2. **Теплота и молекулярная физика.**
3. **Электродинамика.**
4. **Волновая физика и строение вещества.**

В таком порядке и будет излагаться данный курс. Разумеется, между разделами нет жестких границ. Движение молекул – это, безусловно, механика[1]. Оптика принадлежит и электродинамике, и волновой физике. Многие приемы, развитые для одного раздела физики, впоследствии пригодились для других (самый яркий пример – теория колебаний).

Наряду с рассмотренной выше классификацией «по разделам» физики можно выделить различные подходы. Безусловно, ключевая роль в физике принадлежит **эксперименту**. Осознание этого восходит к Галилею (1564–1642). Например, вряд ли можно какими-то рассуждениями доказать или вычислить, что есть два рода электрических зарядов (положительные и отрицательные), а вот масса бывает только положительной. Это можно установить только в опыте. В ряде случаев эксперимент давал совершенно неожиданные результаты и стимулировал новое понимание природы. Примерами являются опыт Майкельсона – Морли (опровергнута концепция эфира), и опыт Резерфорда, в котором было открыто атомное ядро. Из-за этой специфики не имели заметного успеха многочисленные попытки построить физику, следуя идеалу математиков XIX века – в виде системы аксиом, из которых чисто логически выводятся теоремы.

[1] Хотя классическая механика годится не всегда.

Однако в то же время физики считают, что только физика и владеет достаточно солидным **теоретическим** подходом среди всех наук о природе. Среди теоретических достижений упомянем механику Ньютона, электродинамику Максвелла, теорию относительности Эйнштейна, квантовую механику (Планк, Бор, де Бройль, Шредингер, Гейзенберг, Дирак и др.).

Бывает еще **прикладная** физика. Специалисты в этой области, не претендуя на открытие основ мироздания, пытаются применить уже известное, что-то сконструировать, изобрести и пр. Иногда получается нечто узко практическое, иногда же эти изобретения получаются неожиданными и выходят на первый план в жизни человечества (ядерное оружие, транзисторы, лазеры).

Продолжением введения в физику будут последующие три вводных параграфа. Некоторые термины (как нейтрино, электрон, ядро) ниже будут употребляться без разъяснений, в предположении, что они, хотя бы туманно, известны даже начинающему из общего культурного контекста. Многие определения будут очевидно нестрогими, а разъяснения – неполными, что также извинительно на данной стадии.

Частицы. Поля. Волны. Фундаментальные взаимодействия. Состояния вещества

Еще один способ выделить в окружающем мире физику – это обозначить ее предмет. На некотором уровне можно считать объектами физики частицы и поля.

Частицы для начала мы можем понимать как некоторое обобщение знакомых нам из школьной механики «материальных частиц». Частицами являются, например, электроны, протоны, атомы, молекулы и любые агрегаты, состоящие из вышеназванных вещей (хотя бы дробинки или крупинки сажи). Если размеры агрегата становятся существенными, уже говорят не о частицах, а о телах, и их движение становится предметом механики. В физике важное значение имеют **элементарные частицы**, часто именно они и подразумеваются, когда говорится о частицах «просто». Вначале полагали, что элементарные частицы – это простейшие детали более сложных образований (атом водорода состоит из электрона и протона, а электрон и протон уже на части не делятся). Теперь про части электрона по-прежнему ничего не известно, а протон считается состоящим из «более элементарных» кварков. Тем не менее за протоном сохраняется немалая часть его репутации в отношении «элементарности», поскольку он все же есть деталь атома и поскольку освободить заключенные в нем кварки, по современным представлениям, невозможно.

Опыт показывает, что между частицами существуют взаимодействия, о которых обычно говорят, как о **полях**. Например, Земля создает вокруг себя гравитационное поле, действие которого на нас обеспечивает наше притяжение к Земле или, что то же, силу тяжести. Отталкивание электронов есть проявление электрического поля, как и притяжение электрона и протона. Поля, в противоположность частицам, не локализованы в пространстве, а «размазаны».

На более глубоком уровне, в квантовой физике, разница между частицами и полями размывается. Например, фотон – квант электромагнитного поля – часто называют частицей. Электрон – как бы эталон частицы – можно считать квантом некоторого электронного поля. И фотоны, и электроны подчиняются довольно похожим волновым уравнениям и, значит, имеют волновую природу. Можно сказать, что окружающий нас мир построен из очень мелкомасштабных волн. Поэтому в физике волновые явления заслуживают гораздо большего внимания по сравнению с механикой, где волны, в общем, довольно частный вид движения.

Среди основных, или фундаментальных, взаимодействий выделяют (в порядке нарастания силы):

1. **гравитационные;**

2. **электромагнитные (+ слабые);**

3. **сильные.**

Гравитационное взаимодействие с соседом по парте существует, но мы его не замечаем. Можно его измерить, используя тонкие и дорогие приборы. Чтобы гравитационное воздействие на нас стало хорошо различимо, нужна огромная масса вещества (Земля). Гравитационное притяжение удерживает вместе самые крупные скопления вещества – планеты, звезды, галактики.

Электромагнитное взаимодействие сильнее на десятки порядков. Но мы редко наблюдаем его во всей красе. В отличие от гравитационного, электрическое взаимодействие обычно заэкранировано, почти все заряды компенсированы противоположными зарядами. Поэтому нам и кажется, что электрические силы только и годятся, чтобы поднимать расческой обрывки бумаги. В действительности же атомы сдерживаются вместе именно электрическими силами. Эти же силы обеспечивают прочность тел и их упругость. На них, в основном, и построен окружающий нас мир.

В списке к электромагнитным добавлены слабые взаимодействия. Ими, например, вызываются некоторые типы радиоактивного распада. Само название намекает на совершенно особую слабость (примером является поразительная проникающая способность нейтрино, которые легко проходят через всю Землю, совсем не замечая вещества). Это совершенно непохоже на электромагнитное взаимодействие. Поэтому большим сюрпризом оказалось установление единой природы слабых и электромагнитных взаимодействий в 80-х годах XX века. Видимое же различие связано с тем, что в человеческой практике слабое взаимодействие действительно очень сла́бо. Но на очень малых расстояниях (порядка $2 \cdot 10^{-16}$ см) разница двух взаимодействий сглаживается, и они сливаются в единое электрослабое взаимодействие. Подобным образом ранее совсем непохожими выглядели электрическое и магнитное поля, теперь же они рассматриваются как проявления единого электромагнитного поля. Поскольку «электрослабое» объединение произошло недавно, зачастую за слабым взаимодействием по традиции сохраняют статус фундаментального, так что в списке получается четыре вида сил.

Наконец, сильные взаимодействия обеспечивают стабильность атомных ядер (которые электрическое отталкивание протонов стремится разорвать). Поскольку стабильные ядра существуют, на размерах ядра эти взаимодействия гораздо сильнее электромагнитных. Однако они быстрее спадают (на расстоянии $\simeq 10^{-13}$ см). В результате нейтрон, не имеющий электрического заряда, пролетает в плотном веществе несколько сантиметров, пока не попадет в какое-то ядро. Протон, имеющий заряд, тормозится гораздо быстрее.

Частицы имеют склонность объединяться в более крупные образования. Из протонов и нейтронов состоят атомные ядра. Вокруг ядер летают электроны, в числе, равном числу протонов. Число это называют атомным номером. Сейчас известно более 100 элементов (т.е. видов атомов с различными номерами), но примерно начиная с номера 93 ядра становятся настолько неустойчивы, что практически не встречаются в естественном виде, хотя некоторые из них могут приготовляться искусственно. Например, элемента 94 (плутония) сделано несколько сотен тонн.

Молекулы – это образования, построенные из атомов (бывают и одноатомные молекулы). Молекулы тоже друг к другу притягиваются, и из них получается плотное вещество. При нагревании устойчивость плотного состояния уменьшается, и возрастает доля молекул, свободно летающих по-одиночке (газовая фаза). Обыкновенно молекулы остаются стабильными при испарении. Например, и жидкая, и газообразная вода состоит из трехатомных молекул H_2O (хотя нередки случаи, когда при испарении вещества получаются самые разные фрагменты). При сравнительно низких температурах жидкости затвердевают. В твердом состоянии, как правило, вещество имеет несколько фаз, или кристаллических модификаций. При достаточно высоких температурах разрушаются молекулы, а затем и атомы. Получается плазма (примеры ее – пламя и звезды).

Пространство и время

Природные объекты находятся в пространстве, а процессы разворачиваются (происходят, идут) во времени. Наше пространство трехмерно (хотя в некоторых теориях вводятся дополнительные скрытые измерения), а время одномерно (с той же оговоркой). Само по себе пространство в физике считается **однородным** и **изотропным**. Конечно, в природе бывает неоднородность (на полюсе холодно, на экваторе жарко) и анизотропность (верх-низ), но это действие не самого пространства, а находящихся в нем объектов (Солнца, Земли). Такие представления, сейчас кажущиеся единственно разумными, сформировались не сразу. Сегодняшняя концепция пространства восходит к Евклиду (III век до н.э.) и Ньютону (1687)[2].

Время также полагают однородным. Это совсем не очевидно: как проверить, меняется ли ход времени «со временем» и чем это проконтролировать, если мы не умеем возвращаться назад? Под однородностью времени понимают нечувствительность ряда процессов к сдвигу по времени: сегодня камень летит так же, как вчера, если обеспечены те же начальные условия. В древности существовали концепции циклического времени (с возвратами к исходному состоянию), некоторые следы которых остались и в нынешней культурной традиции. Тем не менее, благодаря массовому внедрению в практику часов, возобладала идея линейно-равномерного хода времени. С изотропностью времени сложнее: далеко не все процессы идут назад с тем же успехом, что вперед; само понятие хода времени (как говорят, «стрелы времени») подразумевает необратимость.

И сейчас пространство и время, в массовом сознании образованных людей, ничем не отличаются от «абсолютного» пространства и «абсолютного» времени Ньютона. Однако в XX веке ньютоновские представления подверглись ревизии. В специальной теории относительности пространство и время объединяются, приблизительно как в геометрии компоненты вектора. Оказалось, что ход времени и размеры тел зависят от системы отсчета. Хотя про это все слыхали, свободно ориентируется в этих вопросах незначительное меньшинство. Если бы мы умели путешествовать с большими скоростями, порядка скорости света, все давно бы прочувствовали относительность на опыте. Например, сейчас каждый, купив билет на самолет, может убедиться, что местное (поясное) время в разных городах разное, а на некоторых рейсах попадаешь в прошлые сутки. Но это не всегда было ясно. Известен случай с экспедицией Магеллана, участники которой знали, что Земля круглая, и поневоле сотни раз должны были определять местное время, но очень удивились, когда в течение кругосветного путешествия «потеряли» один день.

Еще сложнее ситуация в общей теории относительности, где пространство искривлено вблизи тел значительной массы (стало быть, неоднородно), а время течет по-разному в разных местах. Более того, сейчас полагают, что пространство и время возникли вместе с «остальной Вселенной» около 15 миллиардов лет назад (Большой взрыв). С тех пор Вселенная расширяется, что астрономы наблюдают как разбегание галактик. Опять-таки, не имея случая побывать вблизи черных дыр, и в силу краткости нашей жизни, мы не можем привыкнуть к таким явлениям, и они остаются экзотикой, понятной немногим посвященным. Однако ограниченность нашего опыта имеет и положительную сторону. Мы вполне можем, в разумных пределах, пользоваться ньютоновскими представлениями. Поэтому по большей части будем считать пространство однородным и изотропным, а время – однородным.

[2]Любопытно, что основные труды обоих авторов кратко назывались «Начала».

Системы единиц и эталоны.

Хорошим примером физического подхода является практика разработки эталонов и систем единиц для измерения физических величин. Мы будем в основном пользоваться системой СГС, в которой основные единицы – сантиметр, грамм и секунда, измеряющие соответственно длину (L), массу (M) и время (T). Единицы любых других величин (как говорят, производные единицы) выражаются с использованием уравнений, связывающих эти величины с основными. Например, уравнение $x = vt$ определяет, что единицей скорости v в СГС будет сантиметр в секунду. Говорят, что **размерность** скорости $[v] = L/T$, или (что считается менее строгим) $[v] =$ см/с. Иногда удобнее система СИ. В рамках механики разница между ними несущественна (смещение десятичной запятой: 0,001 м = 0,1 см). Но далее мы увидим, что в СИ больше основных единиц (например, единица тока ампер в СИ основная, а в СГС единица тока производная), в результате чего может отличаться даже вид уравнений в двух этих системах.

Но в любой системе основные единицы надо определять – установить эталоны и процедуры их воспроизведения. Необходимость эталонов ощущалась всегда, но практически унифицировать их удалось не так давно. Приведенный ниже исторический обзор необязательно запоминать. Его цель – продемонстрировать, насколько непростые процедуры лежат в основе сегодняшней физики и техники[3].

Когда-то в каждой местности были свои эталоны, вроде длины королевской ступни (foot). Новая эра началась в 1791 г., когда Национальное собрание Франции узаконило **метр** как десятимиллионную часть четверти парижского меридиана. В отличие от многих нововведений Французской революции, эта мера прижилась. После точных обмеров части парижского меридиана между Дюнкерком и Барселоной (около 1/40 меридиана) в 1799 г. был изготовлен эталон метра в виде платиновой концевой меры (линейки; его соответствие нынешнему метру проверить нельзя, так как этот архивный эталон погиб при пожаре). В 1875 г. 17 государств подписали метрическую конвенцию, образовали Международный комитет мер и весов и постоянно действующее Международное бюро мер и весов. Еще ранее от привязки к меридиану решили отказаться[4] и приняли за эталон архивный образец. К 1889 г. были изготовлены и сертифицированы 30 эталонов метра в виде стержней из платино-иридиевого сплава (90/10) с X-образным поперечным сечением. Стержни были изготовлены в Лондоне с использованием уральской платины, а окончательная обработка и обрезка до длины 102 см проведены в Париже. Там же были нанесены поперечные штрихи, расстояние между серединами которых при температуре тающего льда для прототипа №6 и было принято за метр. Точность эталонов

[3]Более подробное изложение имеется в издании: Пальчиков Е.И. Введение в технику физического эксперимента. Измерение длины, времени и частоты. Новосибирск: Изд. НГУ, 2001. 112 с.

[4]Если измерять расстояние вдоль земной поверхности, будут сказываться ее неровности. Если же проектировать меридиан на уровень моря, измерения становятся трудно проверяемы. На море и вовсе трудно проводить точные измерения.

составляла 0,2 – 0,3 мкм. Образцы метра были распределены по жребию, причем Россия получила эталоны №11 и №28. В России метрические меры введены как обязательные постановлением СНК РСФСР от 14 сентября 1918 г., но реально стали обязательными с 1 января 1927 г. Эталон №28 исправно служил до 1960 г.

Хоть эталоны и сделаны весьма прочными, они подвержены износу. Появились к тому же подозрения, что за десятки лет из-за перекристаллизации материала эталоны могли укоротиться в пределах 0,5 мкм. Развитие оптики указало нестареющий и неразрушаемый эталон – длину волны света. С 1927 г. использовался промежуточный эталон («естественный свидетель прототипа метра») – излучение атомов кадмия, причем метр равнялся 1553164,13 длины волны красной линии кадмия. С 1960 г. Генеральная конференция по мерам и весам приняла новое определение метра, основанное на излучении изотопа криптона-86 (переход $2p_{10} - 5d_5$, красная линия): 1 м = 1650763,73 длин волн. Точность воспроизведения этого эталона около 10^{-8} м, или 1/10 длины волны.

Развитие лазерной техники открыло новые возможности. В 1983 г. Генеральная конференция по мерам и весам приняла определение метра, действующее и сегодня: метр – это расстояние, проходимое светом в вакууме за 1/299792458 долю секунды. Это определение согласовано с предыдущим в пределах его воспроизводимости. Другими словами, зафиксирована скорость света $c = 299792458$ м/с (целое число), и начиная с 1983 г. бесполезно ее уточнять. По существу, теперь основным эталоном стала секунда, которую можно зафиксировать с лучшей точностью, чем метр по определению 1960 г.

Механические приспособления позволяют измерять длины от 1 мкм до 10 – 100 м. Оптические микроскопы действуют до $\sim 10^{-5}$ см, электронные – до $\sim 10^{-8}$ см – атомных размеров. За этой гранью понятие размера уже не имеет привычного нам смысла за отсутствием четко ограниченных объектов (но понятия пространства и метрики продолжают работать). Размеры атомных ядер $10^{-13} \div 10^{-12}$ см оцениваются по взаимодействию их с быстро летящими частицами. Сейчас полагают, что можно говорить о малых длинах вплоть до планковской 10^{-33} см, вблизи которой, как предполагается, свойства пространства должны резко измениться. Возможно, меньшие размеры вообще не имеют смысла.

Расстояния и координаты на Земле определяют триангуляцией. В последнее время используется спутниковая система глобального позиционирования GPS, имеющая точность порядка 30 метров и определяющая запаздывания сигналов от группы спутников с бортовыми эталонами времени. Расстояния до планет Солнечной системы измеряют радиолокацией, теперь часто с ретрансляцией передатчиками межпланетных зондов. Для ближайших звезд (до сотен световых лет) применяют триангуляцию на базе диаметра земной орбиты. В диапазоне до 10^9 световых лет используют фотометрический метод, наблюдая определенный тип переменных звезд (цефеиды, у которых период колебаний яркости и светимость взаимосвязаны). До $\simeq 15 \cdot 10^9$ световых лет (граница видимой Вселенной) используется допплеровский сдвиг частоты света, вызванный разбеганием галактик[5]. Объекты на бо́льших расстояниях, если таковые и есть, принципиально ненаблюдаемы, поэтому измерять такие расстояния не требуется.

Перейдем к измерению времени. Около 1657 г. Гюйгенс построил первые маятниковые часы, и с этих пор можно говорить о точных измерениях в пределах суток. Английский астроном Шорт (1710–1768) изобрел конструкцию маятниковых часов, имевших точность $2 \cdot 10^{-8}$, или 0,6 секунды за год. Эталоном вначале были **средние солнечные сутки**, содержащие 86400 секунд. Именно средние, потому что из-за неравномерности движения Земли по орбите актуальное солнечное время может уклоняться от среднего солнечного на ± 15 минут (уравнение времени). Удобнее наблюдать звезды, движущиеся по небосводу более равномерно, чем Солнце, причем звездный год содержит на одни сутки больше солнечного (366,2422 дня). Астрономические наблюдения (основанные на вращении Земли вокруг оси) были более точными, чем время механических часов. В 1884 г. введено среднее время по Гринвичу (GMT), часовые пояса, международная линия смены дат. С 1904 – 1912 начались передачи сигналов точного времени (Парижская обсерватория, ВМС США, Гринвичская обсерватория). С 1928 г. введено название UT (universal time) для астрономического «звездного» времени. В 1955 г. были предложены три астрономических шкалы: UT0 обозначает непосредственно наблюдаемое звездное время; UT1 – с поправками $\simeq$ 30 мс на движение полюса (в результате получается единое время для всех точек Земли); UT2 – это UT1 с поправкой на сезонную неравномерность вращения Земли (также порядка 30 мс). Но даже UT2 не есть физически равномерная шкала, поскольку основана на вращении Земли, подверженном нерегулярности и дрейфу. Поэтому до 1956 г. секунда была непостоянной величиной.

Уточнить секунду позволили астрономические наблюдения многих небесных тел, с привлечением расчетов их движения (**эфемеридные** таблицы). Например, с 1900 г. до 1960 время UT0 отстало от эфемеридного времени ET примерно на 30 секунд. Поэтому в 1956 г. Международный комитет мер и весов зафиксировал в качестве единицы времени эфемеридную секунду, определив ее как 1/31556925,947 часть тропического года для 1900 г. 0 января в 12 часов эфемеридного времени. Секунда стала постоянной, но трудно воспроизводимой (для требуемой точности нужны были астрономические наблюдения в течение 2 – 3 лет).

Наконец, был принят атомный стандарт времени. Все атомы данного сорта одинаковы, а влияние внешних условий на атомные процессы можно сделать малым. Поэтому можно добиться хорошей воспроизводимости эталона. С 1967 г. 1 секунда есть 9192631770 периодов излучения при переходах между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома ^{133}Cs. Поделив скорость света на это число периодов, найдем длину волны излучения – около 3,26 см. Новая секунда насколько возможно согласована с эфемеридной. Воспроизводимость цезиевого эталона составляла 10^{-11}.

[5]По последним данным (2000 г.), постоянная Хаббла составляет 72 ± 8 км/с на мегапарсек (точность около 11%), или 23 км/с на миллион световых лет

Равномерная физическая цезиевая шкала называется IAT (international atom time).

Однако для астрономических наблюдений и навигации по-прежнему удобнее шкала UT1. Поэтому с 1972 г. введена новая шкала времени UTC (universal time coordinated). Секунда в ней – физическая, она же атомная. Но как только между UTC и UT1 накапливается разница 0,7 секунды, UTC исправляется: добавляется или отнимается одна секунда. В результате разница никогда не превышает 0,7 с. Вставка или вырезание секунды производится обычно 31 декабря или 30 июня. Сигналы точного времени привязаны именно к шкале UTC. Поэтому точно поставленные электронные часы могут иногда «уйти» на секунду за самое короткое время.

За 10^{-24} с свет проходит размер атомного ядра, это характерное время быстрой ядерной реакции. За 10^{-19} с свет проходит через атом. Период колебаний видимого света $\sim 10^{-15}$ с. Свет проходит от этого текста к Вашему глазу за наносекунду (10^{-9} с). Характерное время взрыва – микросекунда (10^{-6} с), выстрела – миллисекунда (10^{-3} с). Около 1000 с – время жизни свободного нейтрона. В году с хорошей точностью $\pi \cdot 10^7$ с. Период полураспада ^{14}C, используемого для исторических датировок, 5717 лет. Предок человека появился миллион лет назад, ящеры вымерли 50 – 70 млн лет назад, следы жизни имеют возраст порядка миллиарда лет, древнейшие породы – до 4 млрд лет. Возраст Солнечной системы около 4,7 млрд лет, возраст Вселенной $\simeq$ 15 млрд лет. Более ранних событий не предполагается. Пока не ясно, будут ли какие-либо естественные границы для положительных значений времени (вроде момента схлапывания Вселенной в точку), или же времени предстоит «тикать» дальше сколько угодно.

Наконец, **килограмм** вначале (1799) был определен как масса кубического дециметра воды при температуре максимальной плотности 4 °C, т.е. плотность воды в СГС ровно 1 г/см^3. Однако архивный килограмм представлял собой более удобный в обращении платиновый цилиндр. Позднее более точные измерения показали, что плотность воды непостоянна, завися, в частности, от изотопного состава; масса же литра воды и систематически отклоняется от архивного эталона. Поэтому одновременно с платино-иридиевыми эталонами метра были изготовлены эталоны килограмма из того же материала в виде цилиндров высотой 39 мм и диаметром 39 мм. Из 43 международных эталонов Россия получила два (№12 и №26). Эти образцы служат и сейчас. Погрешность сличения эталонов не превышает $2 \cdot 10^{-9}$. По современным представлениям, масса эталона не подвержена изменениям со временем, таким как, например, длина. Это и объясняет историческую устойчивость эталона массы.

Глава 1

КИНЕМАТИКА

Кинематика – раздел механики, описывающий движение. Причины, почему движение именно такое, сейчас не рассматриваем. Основная цель – по **частичной** информации о движении определить **полную** информацию.

1.1 Прямолинейное движение. Средняя скорость

Простейшее движение – вдоль прямой. При этом изменяется координата тела x в зависимости от времени t, что записывается кратко в виде:

$$x = x(t)\,.$$

Правая часть обозначает не умножение, а **функциональную зависимость**. Способы задания такой зависимости возможны разные. Например, в автомобиле может сидеть человек с секундомером, отмечающий координату через каждую минуту или же времена проезда мимо километровых столбов. В результате получится табличное задание функции, хотя бы такое:

t	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
x	0.0	2.01	3.99	6.03	7.02	8.01

Время t называют аргументом или независимой переменной, а x – функцией или зависимой переменной. Из вида таблицы с тем же успехом можно сказать, что t зависит от x, и такой подход иногда полезен. Но мы чувствуем, что вообще-то время идет само по себе, двигается автомобиль или нет.

Другой способ задания функции – **формула** или **алгоритм**. Наша таблица с хорошей точностью (0.5%) задается такой формулой:

$$x = (\textbf{если}\ \ t \le 3\ \ \textbf{то}\ \ 2t\ \ \textbf{иначе}\ \ t+3\,)\,. \tag{1.1}$$

В нашем примере отклонения вполне могут быть в пределах ошибок измерения. Кажется, что формула лучше таблицы, так как она позволяет получить координату в дробные моменты времени. Но формул по данным эксперимента можно подобрать сколько угодно. С тем же успехом можно добавить в правую часть (1.1) $\sin(\pi t)$, умноженный на любой коэффициент, от чего значение x в целые моменты времени не изменится. Обычно все же можно считать, что простейшая формула хорошо описывает движение, позволяя распространить наши сведения на все промежуточные моменты.

Возможно и **графическое** задание функции на плоскости (x, t). Оно полезно не столько само по себе как источник данных (скажем, на ленте самописца), сколько для наглядного изображения функций, заданных двумя первыми способами.

Перейдем к основной задаче кинематики: посмотрим, что еще можно получить из имеющихся данных. Бытовому понятию быстроты движения соответствует скорость v, тоже зависящая от времени:

$$v = v(t)\,.$$

Напомним определение **средней скорости**: на промежутке времени от t_1 до t_2 средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\ , \text{ или } \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\ , \quad \text{или} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t}\ . \tag{1.2}$$

Средняя скорость – функция двух времен t_1 и t_2, а точнее, относится ко всему промежутку от t_1 до t_2 :

$$\langle v \rangle = \langle v \rangle (t_1 \dots t_2)\ .$$

Например, на интервале от 2.0 до 3.0 средняя скорость по приведенной таблице равна приблизительно 2, на интервале $(3.0 \div 5.0)$ получим 1.0, а между 2.0 и 5.0 $\langle v \rangle = 4/3 = 1.33$ (в единицах таблицы). Заметим, что последняя величина вовсе не равна полусумме скоростей на частях полного интервала $(2+1)/2$. Выражения типа Δx или Δt обозначают не умножение величины Δ на x, а **изменение** этого x (difference – разность, греческая Δ соответствует d). Геометрически средняя скорость – это тангенс угла между хордой (отрезком, соединяющим точки (x_1, t_1) и (x_2, t_2)) и осью t (рис. 1.1).

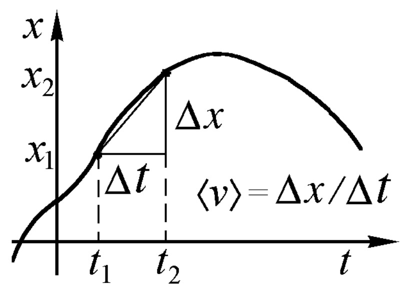

Рис. 1.1.

1.2 Мгновенная скорость. Производная. Ускорение

Средняя скорость – это не совсем то, что нам хотелось бы получить. Должна существовать скорость в данный момент времени, иначе что показывает спидометр автомобиля? По крайней мере, в нашей бытовой практике (а на самом деле в гораздо более широких рамках) действительно можно ввести **мгновенную** скорость. Но это требует некоторых математических усилий.

Идея проста: чтобы два момента времени, или интервал $t_2 - t_1 = \Delta t$, не запутывали дело, надо этот интервал сделать по возможности малым («мгновением»). Тогда и получится мгновенная скорость, или просто скорость в данный момент. Например, для движения Земли вокруг Солнца малым будет интервал ~ 1 дня.

Если в очередной раз вспомнить таблицу из п. 1.1, то ее данных для нахождения мгновенной скорости явно мало. Необходимо иметь способ дополнения таблицы, чтобы иметь возможность говорить о скорости в данный момент. Для человеческой реакции малым будет промежуток времени в 0.1 сек, и примерно с такой степенью подробности надо иметь данные (для чего нужен какой-то прибор). Тогда средняя скорость, определенная на таких малых интервалах, с достаточной точностью будет отражать «настоящую» скорость. Поскольку интервалы Δt малы, можно относить значение скорости к любому моменту в их пределах. (Интуиция подсказывает, что точнее всего будет отнести скорость к середине интервала).

Когда имеется формула, связывающая x и t, процедура совсем простая:

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\ . \qquad (1.3)$$

Хотя это похоже на (1.2), здесь разница в том, что Δt подразумевается малым. Чтобы подчеркнуть малость интервала, вместо (1.3) пишут более длинное выражение:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)\ . \qquad (1.4)$$

Здесь lim обозначает предел (сокращенное limit) выражения в скобках. Этот предел берется при Δt, стремящемся к нулю. Вначале надо вычислить координаты x в моменты t и $(t+\Delta t)$, вычесть из позднего раннее (получится перемещение Δx) и поделить на интервал Δt. Пусть, например, известно, что $x = k{\cdot}t^2$, где k – постоянный коэффициент. Тогда, опуская знак предела везде, кроме последнего равенства, получим

$$v(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{k\cdot(t+\Delta t)^2 - k\cdot t^2}{\Delta t} = \frac{2kt\Delta t + k\Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(2kt + k\Delta t)\ .$$

Теперь устремляем Δt к нулю:

$$v(t) = 2kt\,.$$

Выражение уже не содержит никакого интервала и зависит только от одного времени t. Это и есть мгновенная скорость для данной зависимости $x(t)$. Заметим, что сначала надо вычислить и по возможности упростить выражение, а уж потом переходить к пределу. Если, наоборот, сразу положить $\Delta t = 0$, получится неопределенность 0/0.

Более компактно мгновенную скорость принято записывать так:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}\,. \qquad (1.5)$$

Краткое обозначение dx/dt происходит от $\Delta x/\Delta t$, причем подразумевается, что и Δx, и Δt стремятся к нулю. Обозначения dx и dt можно понимать как бесконечно малые изменения координаты и времени. Операция (1.5), или, что то же, (1.4), называется вычислением **производной** $v(t)$ для функции $x(t)$, или **дифференцированием** координаты по времени. Малые приращения dx и dt называют **дифференциалами** (опять от иностранного слова difference).

Геометрически производная dx/dt – это тангенс угла между касательной к непрерывной кривой $x(t)$ и осью t (рис. 1.2), что следует из того, что средняя скорость – тангенс угла наклона хорды (хорда в пределе переходит в касательную).

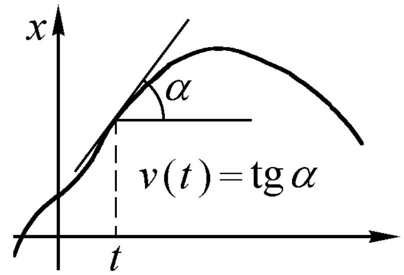

Рис. 1.2.

В физике, как правило, Δt обозначает малое изменение времени. Поэтому мы будем пользоваться на равноправной основе как обозначением dx/dt, так и $\Delta x/\Delta t$.

Смысл этих новых названий в том, что существуют довольно простые **правила дифференцирования**. Вместо того, чтобы каждый раз вычислять пределы, надо только освоить эти правила. Следующий ниже текст не является частью п. 1.2. Это справочник по разделам математики, которые будут попадаться нам на каждом шагу.

Математическое дополнение.

Системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 6x + 7y = 5\,, \\ 2x + 5y = 3\,. \end{cases}$$

Умножаем первое на 5, второе на 7 и вычитаем из первого второе: $(30-14)x + (35-35)y = 25-21$, откуда $x = 4/16 = 0{,}25$. Аналогично, умножая первое на 2, а второе на 6, получим $(14-30)y = 10-18, \quad y = 8/16 = 0{,}5$. Такой метод исключения неизвестных (Гаусса) применим для любого количества уравнений. Если уравнений меньше, чем неизвестных, то решений обычно бесконечно много. Если наоборот, число уравнений больше числа неизвестных, то решений, как правило, нет.

Квадратное уравнение. Из уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ рекомендуется получить делением на a более простое уравнение $x^2 + px + q = 0$. Решение:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Дискриминанты никакие не нужны. Пример:

$$x^2 - 200000x + 1 = 0\,; \quad x = 100000 \pm \sqrt{100000^2 - 1}\,.$$

Попробуйте вычислить это на калькуляторе. При знаке (+) все просто, выйдет $x_1 = 200000$. Но при знаке (−) вычитаются почти одинаковые большие числа с потерей точности. Поэтому второй корень удобнее найти из теоремы Виета: $x_1 \cdot x_2 = q$, откуда $x_2 = 1/200000$.

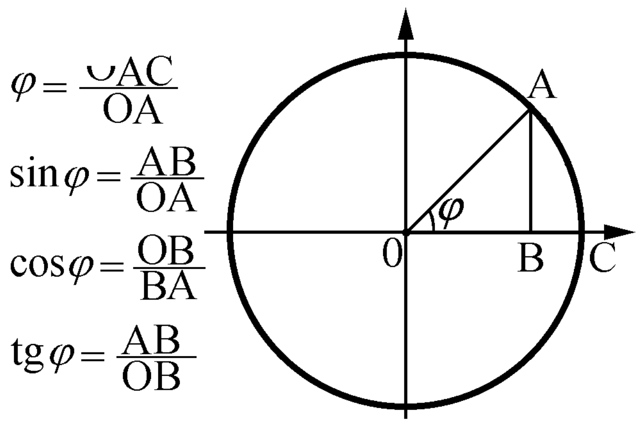

Рис. 1.3.

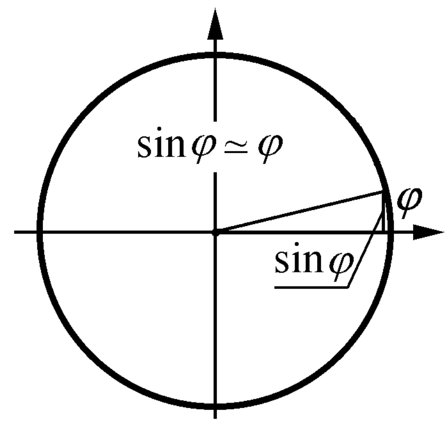

Рис. 1.4.

Тригонометрия. В физике, если специально не указано обратное, угол измеряется в радианах. Величина угла – это длина дуги единичного круга, а для круга любого радиуса – отношение длины дуги к радиусу (рис. 1.3). Полный угол равен 2π, прямой $\pi/2 \approx 1{,}57$. Для единичного круга вертикальный отрезок – синус, горизонтальный – косинус. Тангенс – это $\sin / \cos$. Остальные (секанс и т.д.) не нужны. Для малых углов $\sin\varphi \approx \varphi$, что очевидно из рис. 1.4. Менее очевидно, что $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Проверим:

φ	$\sin\varphi$	$1-\cos\varphi$	$\varphi^2/2$
$0{,}5234 = \pi/6$	0,5	0,134	0,137
0,2	0,1987	0,01993	0,02
0,1	0,09983	0,004996	0,005

Полезные формулы:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta\,; \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta\,.$$

Бином Ньютона.

$$\begin{aligned}
(1+x)^1 &= \quad 1 + 1\cdot x & &= 1 + 1\cdot x \\
(1+x)^2 &= \quad 1 + 2\cdot x + x^2 & &\approx 1 + 2\cdot x \text{ при малом } x \\
(1+x)^3 &= \quad 1 + 3\cdot x + 3\cdot x^2 + x^3 & &\approx 1 + 3\cdot x \text{ при малом } x\,.
\end{aligned}$$

Видим, что при малых x можно оставить два слагаемых:

$$(1+x)^n \approx 1 + n\cdot x\,.$$

Если имеем $(a+b)^n$, где $b \ll a$, выносим a за скобку: $a^n\cdot(1+b/a)^n$. Здесь n не обязательно целое число. Например, $\sqrt{1+x} = (1+x)^{0.5} \approx 1 + x/2$. Отсюда и следует формула для косинуса малого угла: $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} \approx 1 - \sin^2\varphi/2 \approx 1 - \varphi^2/2$.

Производные и дифференцирование. Для функции $x(t)$ производная dx/dt – это отношение

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right) \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0$$

(напоминаем). Видно, что от постоянной величины производная равна нулю.

Уже знаем производную от $x = k \cdot t^2$: $dx/dt = 2kt$. Найдем производную от $x = k \cdot t^n$.

$$\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right) = k \cdot \left(\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t}\right) = k \cdot t^n \left(\frac{(1+\Delta t/t)^n - 1}{\Delta t}\right) .$$

Применяем бином Ньютона: $(1+\Delta t/t)^n \approx 1 + n\Delta t/t$, откуда

$$\frac{d(k \cdot t^n)}{dt} = nkt^{n-1} .$$

Очевидно, что если две (любые) функции пропорциональны, то пропорциональны их производные с тем же коэффициентом. Далее коэффициенты опускаем.

Теперь – производная синуса. Пусть $x = \sin(\omega t)$, где ω – это постоянная величина (размерности 1/сек). Находим $dx/dt = [\sin(\omega t + \omega\Delta t) - \sin(\omega t)]/\Delta t$. Из рисунка 1.5 $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi + \Delta\varphi \cdot \cos\varphi$ при малом $\Delta\varphi$. У нас $\varphi = \omega t$, $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$ и отношение равно $\Delta\varphi \cdot \cos\varphi/\Delta t = \omega \cdot \cos\omega t$:

$$\frac{d(\sin(\omega t))}{dt} = \omega \cdot \cos(\omega t) .$$

Аналогично находим производную косинуса:

$$\frac{d(\cos(\omega t))}{dt} = -\omega \cdot \sin(\omega t) .$$

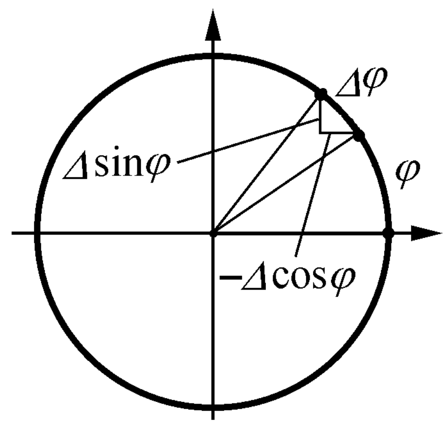

Рис. 1.5.

Продемонстрируем довольно очевидную вещь: производная от суммы функций равна сумме производных. Из определения :

$$\frac{d(f+g)}{dt} = \frac{f(t+\Delta t) + g(t+\Delta t) - (f(t) + g(t))}{\Delta t} = \frac{(f(t+\Delta t) - f(t)) + (g(t+\Delta t) - g(t))}{\Delta t} .$$

Это явно даст $df/dt + dg/dt$. Сложнее будет производная произведения функций

$$\frac{d(f \cdot g)}{dt} = \frac{f(t+\Delta t) \cdot g(t+\Delta t) - f(t) \cdot g(t)}{\Delta t}$$

(на самом деле, конечно, предел такого отношения). В числитель добавим и вычтем кое-что:

$$\frac{f(t+\Delta t) \cdot g(t+\Delta t) - f(t+\Delta t) \cdot g(t) + f(t+\Delta t) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(t)}{\Delta t} .$$

Это распадается на два выражения:

$$f(t+\Delta t) \cdot \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} + g(t) \cdot \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} .$$

Дроби – это производные g и f, а множитель $f(t+\Delta t)$ перейдет в $f(t)$. Окончательно

$$\frac{d(fg)}{dt} = f \cdot \frac{dg}{dt} + g \cdot \frac{df}{dt} \ .$$

Например, от $t \cdot \cos(\omega t)$:

$$\frac{d(t\cos(\omega t)}{dt} = t \cdot (-\omega \sin(\omega t)) + \cos(\omega t) \cdot 1 = \cos(\omega t) - \omega t \cdot \sin(\omega t) \ .$$

Для частного функций аналогично получим

$$\frac{d(f/g)}{dt} = \left(g \cdot \frac{df}{dt} - f \cdot \frac{dg}{dt} \right) \cdot g^{-2} \ .$$

Например, $\mathrm{tg}(\omega t) = \sin(\omega t)/\cos(\omega t)$,

$$\frac{d(\mathrm{tg}(\omega t))}{dt} = \frac{\cos \cdot \omega \cos - \sin \cdot (-\omega \sin)}{\cos^2} = \frac{\omega}{\cos^2(\omega t)} \ .$$

Наконец, производная сложной функции:

$$\frac{d(f(g(t))}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$$

(умножаем и делим на dg). Пример: f – это синус, g – квадрат.

$$\frac{d(f(g(t))}{dt} = \frac{d(\sin t^2)}{dt} = \frac{d(\sin t^2)}{d(t^2)} \cdot \frac{d(t^2)}{dt} = \cos(t^2) \cdot 2t \ .$$

Производная возрастающей функции положительна, убывающей – отрицательна. В точках максимума и минимума производная равна нулю.

Пример. Как из квадратного листа сделать коробку максимального объема? Пусть сторона квадрата a, высота коробки x. Объем будет $V = x \cdot (a-2x)^2$. Производная по вышеприведенным правилам:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} = & \ \text{(произведение)} \ x \cdot \frac{d(a-2x)^2}{dx} + (a-2x)^2 \cdot \frac{dx}{dx} = \\ & = x \cdot \frac{d(a^2 - 4ax + x^2)}{dx} + (a-2x)^2 = \\ = & \ \text{(сумма)} \ x \cdot (-4a + 8x) + (a-2x)^2 = (a-2x) \cdot (a-6x) \ . \end{aligned}$$

При максимуме это выражение должно обращаться в нуль. Когда первый множитель равен нулю, это явно не максимум: объем получится нулевой. Следовательно, должно быть $x = a/6$, при этом объем будет $(2/27) \cdot a^3$.

Снова п. 1.2.

Скорость – это производная координаты по времени: $v = dx/dt$. Скорость тоже обычно зависит от времени, и полезна ее производная – **ускорение**:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \qquad \text{или} \qquad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \ . \tag{1.6}$$

От координаты получается вторая производная (производная от производной). В примере, разобранном на стр. 12, $x = k \cdot t^2, \quad v = 2kt \quad \Rightarrow a = 2k$, то есть постоянно.

Приближенно вторую производную можно выразить через приращения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} - \frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}\,.$$

Здесь через $\Delta^2 x$ обозначена **вторая разность**, или разность разностей:

$$\Delta^2 x = \Delta_+ - \Delta_- = (x(t+\Delta t) - x(t)) - (x(t) - x(t-\Delta t)) \equiv x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)\,.$$

Второй дифференциал d^2x можно понимать как вторую разность $\Delta^2 x$ при $\Delta t \to 0$.

Геометрическое представление второй разности показано на рис. 1.6: $\Delta^2 x$ есть удвоенное отклонение хорды от кривой в средней точке. Довольно очевидно, что при малых приращениях такими же будут отклонения кривой от средней касательной в крайних точках. Для прямой вторая разность и второй дифференциал обращаются в нуль, то есть ненулевая вторая производная бывает только у **кривой** линии.

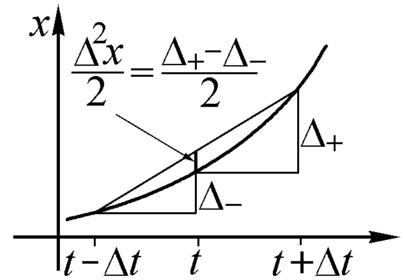

Рис. 1.6.

Аналогично можно было бы ввести следующую производную, показывающую скорость изменения ускорения, и т.д. Но в физике такие высшие производные не нужны (почти никогда). Это большое облегчение, так как ускорение, видимо, это максимально сложная величина, которую мы можем, хотя и с трудом, улавливать визуально.

Наконец, приведем еще полезные неравенства. Школьное изложение кинематики основано на хотя и важных, но частных случаях постоянной скорости или ускорения. Многие переносят частные формулы за пределы их применимости. Далее знак $\neq$ обозначает «как правило, не равно»:

$$v \neq x/t, \quad a \neq v/t\,.$$

Правильные выражения – это (1.5) и (1.6). Во всех случаях, кроме прямой пропорциональности, результат будет другой.

1.3 Определение пути по скорости и скорости по ускорению

Это обратная задача по сравнению с рассмотренной в п. 1.2. Мы хорошо знаем, как найти путь при постоянной скорости V. За промежуток $t_2 - t_1$ тело пройдет $V \cdot (t_2 - t_1)$. На графике скорости (в данном случае горизонталь) путь выражается площадью под графиком (рис. 1.7).

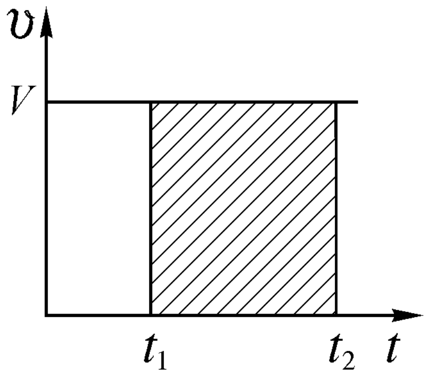

Рис. 1.7.

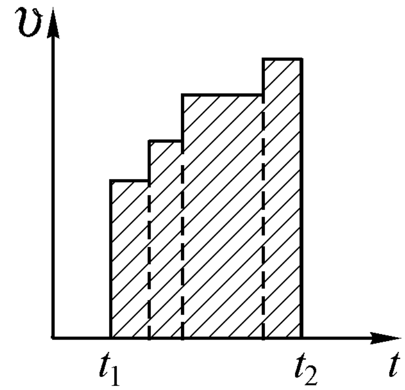

Рис. 1.8.

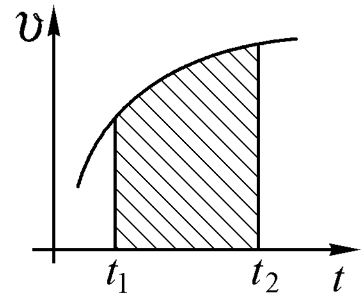

Рис. 1.9.

Если зависимость скорости от времени ступенчатая[1], разбиваем промежуток $(t_2 - t_1)$ на меньшие отрезки $\Delta t_1,\ \Delta t_2,\ \Delta t_3,\ \ldots$, на которых скорость постоянна. Снова видим (рис. 1.8), что путь будет площадью под графиком скорости, а в виде формулы запишется так:

$$x(t_2) - x(t_1) = v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \cdot \Delta t_2 + ... = \sum_{j=1}^{j=n} v(t_j) \cdot \Delta t_j \ .$$

Последнее выражение, хотя и выглядит внушительно, просто сокращенная запись. Например, можно записать, что $t_2 - t_1 = \sum\limits_{j=1}^{j=n} \Delta t_j$, хотя от этого и не видно прямой пользы.

Если теперь $v(t)$ произвольная функция времени, не имеющая постоянных участков, то достаточно разбить интервал $(t_2 - t_1)$ на такое большое число малых частей Δt , что в их пределах с достаточной точностью можно считать v постоянной. Путь опять выразится такой же формулой

$$x(t_2) - x(t_1) = v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \cdot \Delta t_2 + ... = \sum_{j=1}^{j=n} v(t_j) \cdot \Delta t_j \tag{1.7}$$

с той разницей, что число интервалов n очень велико, а сами интервалы достаточно малы. Геометрически получится площадь ступенчатой фигуры, которая при малых Δt_j практически равна площади под кривой $v(t)$ (рис. 1.9).

Находить такие суммы можно многими способами, хотя бы нарисовать график $v(t)$ на миллиметровке и найти площадь прямым подсчетом. Или вырезают график ножницами и взвешивают. Если нужна зависимость $x(t)$, такую операцию придется повторять много раз. Если $v(t_j)$ известно в виде формулы или таблицы, можно найти x прямым вычислением, особенно при нынешней доступности компьютеров. Иногда же удается вычислить $x(t)$ точно.

[1] На самом деле скачки скорости невозможны, но могут быть довольно резкие изменения скорости, которые приближенно можно рассматривать как скачки.

Пример: $v = a \cdot t$, где ускорение a постоянно. Пусть мы знаем $x(0) = 0$ и хотим найти $x(t)$. Разбиваем участок $0 \div t$ на 10 частей; $\Delta t_j = 0{,}1t$ и $v(t_j) = 0{,}1jt \cdot a$. Пишем путь в виде (1.7) :

$$x(t) - x(0) = \sum_{j=1}^{j=10} v(t_j) \cdot \Delta t_j = 0{,}1ta \cdot 0{,}1t \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 10) \ .$$

Такая сумма легко считается в уме, если ниже записать ее же в обратном порядке: (10+9+8+...+1). Получим, что удвоенная сумма равна 10·11, так что $x(t) = 0{,}55 \cdot a \cdot t^2$.

Если 10 частей мало, берем 100: $\Delta t_j = 0{,}01t$ и $v(t_j) = 0{,}01jt{\cdot}a$; $x(t) = 0{,}01ta{\cdot}0{,}01t{\cdot}(1{+}2{+}3{+}...{+}100)$. Аналогично находим сумму: $(1{+}2{+}3{+}...{+}100) = 100{\cdot}101/2 = 5050$. Отсюда $x(t) = 0{,}505 \cdot at^2$. При 1000 частей $x(t) = 0{,}5005 \cdot at^2$, и т.д. Видно, что при уменьшении отрезков результат будет стремиться к $at^2/2$. Это и есть площадь под кривой – в данном случае треугольник с катетами (at, t).

Такое длинное вычисление и без того известной величины все же не лишено смысла. Теперь мы можем применить такой же путь к другим зависимостям, для которых площадь нам пока неизвестна. Если не удастся просуммировать в уме, всегда можно сделать это механически – «на руках» или на компьютере. Кроме того, можно оценить погрешность. Видно, что она порядка $\Delta t/t$ или $1/n$.

Пусть теперь $v = k \cdot t^2$. Для 10 интервалов $v(t_j) = 0{,}01kj^2t^2$, $x(t) = 0{,}1t \cdot 0{,}01kt^2 \cdot \underbrace{(1 + 4 + 9 + ... + 100)}_{385} = 0{,}385kt^3$. Если взять «нижнюю» сумму (0+1+4+...+81), будет $0{,}285kt^3$. Среднее, более точное, значение, получается $0{,}335kt^3$. Как мы увидим, совсем точный результат $kt^3/3 \approx 0{,}333kt^3$.

Для определения скорости по известной координате мы ввели операцию дифференцирования (вычисления производной). Для обратной задачи в математике изобретена и обратная операция – интегрирование. **Определенным интегралом** от функции $v(t)$ на интервале от t_1 до t_2 будет предел нашей суммы:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot dt = \lim \sum v(t_j) \cdot \Delta t_j \ \text{ при } \Delta t_j \to 0 \ .$$

Знак интеграла $\int$ – это стилизованная S и соответствует греческой Σ (такая же связь, как d и Δ). Запись в виде интеграла короче, а считать интегралы удобнее, чем суммы большого числа слагаемых.

Математическое дополнение

Интегрирование. Пусть надо найти $\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot dt$. Допустим, что по виду $f(t)$ мы угадали такую функцию $F(t)$, что $f(t) = dF/dt$ (пример: $F(t) = kt^3/3$, тогда $f(t) =$

kt^2). Вспоминаем, что интеграл – это большая сумма:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot dt = \sum f(t_j)\cdot \Delta t_j = \sum \frac{\Delta F_j}{\Delta t_j}\cdot \Delta t_j = \sum \Delta F_j \ .$$

Сумма всех изменений ΔF_j на участке от t_1 до t_2

$$(F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + ... + (F_n - F_{n-1}) = F_n - F_1 \ .$$

Здесь $F_1 = F(t_1), \quad F_n = F(t_2)$. Окончательно получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot dt = F(t)\,\Big|_{t_1}^{t_2} \equiv F(t_2) - F(t_1) \ .$$

(формула Ньютона-Лейбница). Вертикальная черта с индексами напоминает, что в функцию $F(t)$ еще нужно подставить пределы.

Видно, что очень выгодно угадать для функции f, которую мы хотим интегрировать, ее **первообразную** F, такую, что $f = dF/dt$. Другое название первообразной – **неопределенный интеграл** (определенным он станет, если подставить пределы). Пишут еще так:

$$\int f(t)\cdot dt = F(t) \quad \text{– это эквивалентно} \quad f = dF/dt \ .$$

Например, для функции $f(t) = kt^2$ неопределенный интеграл $F(t) = kt^3/3$. С тем же успехом можно добавить к F любую постоянную. Производная от постоянной равна нулю, а в формуле Ньютона-Лейбница эти постоянные вычтутся.

Зная производные некоторых функций, автоматически получаем таблицу неопределенных интегралов от этих производных:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ ; \quad \int \sin x\,dx = -\cos x\ ; \quad \int \cos x\,dx = \sin x\ ; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \ .$$

Производная от левых частей уничтожит знак $\int$ и уберет dx, а в правых частях стоят уже знакомые функции, от которых производные равны подынтегральным выражениям. К сожалению, приходится двигаться задним ходом. Поэтому не приходит сразу в голову интеграл от тангенса ($= \ln(1/\cos x)$) или от $\sin^2 x$ (он равен $x/2 - \sin x\cdot\cos x/2$). Умение интегрировать приходит с опытом. Можно обращаться к таблицам интегралов (например, таблицы Градштейна и Рыжика весят около 3 кг). Надо заметить, что не всякий интеграл «берется», то есть выражается через элементарные функции. Например, функция $\sin(x^2)$ выглядит довольно просто (тригонометрия и степень), но никакая комбинация школьных функций не может выразить интеграла от нее. В этих случаях специально вводят новые функции или так и оставляют в виде неопределенного интеграла. Заметим, что производная по правилам вычисляется всегда, не требуя введения новых функций. Сейчас имеются компьютерные программы аналитических вычислений (Maple, Mathematica), умеющие «брать» интегралы. Еще раз напомним, что численно любой интеграл считается, как сумма.

Пример. Найдем площадь под кривой $f(x) = \sin x$. Из таблицы

$$\int \sin x dx = -\cos x \; ; \quad \int\limits_0^x \sin x dx = -\cos x \,\Big|_0^x = -\cos x - (-\cos 0) = 1 - \cos x \; .$$

При $x = \pi$ площадь равна 2, при $x = 2\pi$ – нулевая (там, где функция ниже оси, площадь отрицательна, положительные и отрицательные значения синуса компенсируются).

Снова п. 1.3.

Теперь вместо (1.7) мы можем записать

$$x(t) - x(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} v(t)dt \; . \tag{1.8}$$

Точно так же, зная ускорение, находим скорость:

$$v(t) - v(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} a(t)dt \; . \tag{1.9}$$

Это и есть окончательные формулы, решающие задачу, поставленную в начале параграфа. В естественной постановке механики известно как раз ускорение; по нему находится скорость, а по скорости – координата. Как видим, нужны еще начальные условия – значения скорости и координаты в исходный момент t_0. Они зависят не от динамики, а от выбора системы отсчета и начала координат.

Как и в п. 1.2, стоит запомнить неравенства:

$$x \neq vt \, , \quad v \neq at \; .$$

Правильные равенства – это (1.8) и (1.9). Во всех случаях, кроме постоянных v и a соответственно, да притом еще $t_0 = 0$, результат будет другим.

1.4 Траектория, радиус кривизны, центростремительное ускорение

В пространстве нужны три координаты: x, y, z. Соответственно есть три скорости v_x, v_y, v_z и три ускорения a_x, a_y, a_z вдоль каждой оси координат. Сохраняются такие же равенства: $a_y = dv_y/dt$, $z = z(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} v_z dt$ и т.д.

Для краткости вводится радиус-вектор точки $\boldsymbol{r}(t) = (x, y, z)$. (Здесь и далее векторы обозначаются жирными буквами). Три координаты – это компоненты вектора (проекции на оси). Скорость $\boldsymbol{v}$ и ускорение $\boldsymbol{a}$ тоже векторы, $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ и $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$. Разность векторов $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ показана на рисунке 1.10 (для случая двух измерений).

Задание $\boldsymbol{r}(t)$ или $(x, y, z)(t)$ определяет **траекторию** в параметрической форме, t и будет параметром. Траектория – это вроде дымового следа за телом в воздухе (неподвижном в данной системе отсчета). Иногда время нас не интересует (допустим, надо узнать, заденет ли брошенное тело за препятствие, неважно в какой момент). Тогда, если получится, удобнее явная форма, для плоской кривой в виде $y = y(x)$.

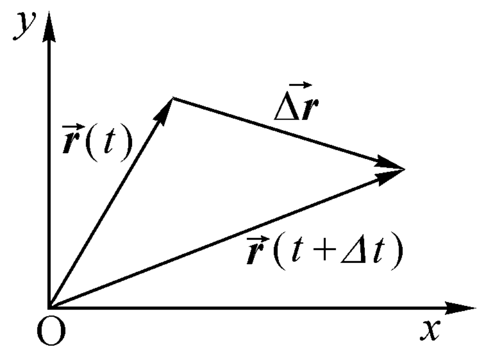

Рис. 1.10.

Примеры.

1. $x = V\cos\alpha \cdot t, \quad y = V\sin\alpha \cdot t - gt^2/2$.
   Траектория тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью V. Выражая t через x, получим явное уравнение: $y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - gx^2/(2V^2\cos^2\alpha)$.

2. $x = R\cos(\omega t), \quad y = R\sin(\omega t)$.
   Это окружность радиуса R, так как $x^2+y^2 = R^2$. Явная форма: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Неудобство ее в том, что есть две ветви: нижняя и верхняя полуокружности.

3. $x = R\cos(\omega t) + Vt, \quad y = -R\sin(\omega t)$.
   При $V = \omega R$ (точка на ободе катящегося вправо колеса) получается циклоида с остриями, обращенными вниз. Явную формулу $y(x)$ получить вообще нельзя, но можно выразить (тоже не очень удобно) $x(y)$. При $V < \omega R$ получится спираль (предельный случай $V = 0$ – окружность, при $V > \omega R$ будет искаженная синусоида (при $V \gg \omega R$ – почти точная синусоида).

Понятие траектории полезно преимущественно для криволинейного движения. Из примера 2 (окружность – кривизна в чистом виде) находим $v_x = -\omega R\sin(\omega t), \quad v_y = \omega R\cos(\omega t)$. Еще раз дифференцируем: $a_x = -\omega^2 R\cos(\omega t), \quad a_y = -\omega^2 R\sin(\omega t)$. Видно, что вектор ускорения пропорционален радиус-вектору с началом в центре окружности и направлен противоположно (коэффициент равен $-\omega^2$); $\quad \boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$. Если выразить ускорение через скорость $V = \omega R$, получаем $a_c = V^2/R$. Это известная из школы формула центростремительного (значит, направленного к центру) ускорения.

Мы знаем, что гладкая кривая имеет в произвольной точке касательную прямую, наклон которой равен производной dy/dx. Эта прямая в окрестности касания очень близка к кривой. Еще ближе будет проходить касательная окружность, если как следует подобрать ее радиус (называемый **радиусом кривизны** в данной точке). Например, представим параболу $y = bx^2$ в нижней точке окружностью радиуса R : $y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$. При малых x разложим корень по биному: $y \approx R - R(1 - x^2/2R^2) = x^2/2R$. Получаем, что радиус кривизны $R = 1/2b$. Если $b = 1$ (x, y безразмерны), то $R = 1/2$. Проверьте это вычисление построением. Отличие касательной окружности от кривой в окрестности точки касания будет пропорционально x^4 (то есть много меньше, чем x^2 у касательной прямой).

В общем случае радиус кривизны (без вывода, для справки)

$$R = \frac{\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\,.$$

Эта формула обычно не нужна; в физике радиус кривизны легче найти через ускорение. При полете в поле тяжести ускорение всегда g и направлено вниз; в верхней точке параболы $y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - gx^2/(2V^2\cos^2\alpha)$ скорость $v = V\cos\alpha$ и радиус кривизны $R = v^2/g = V^2\cos^2\alpha/g$. В исходной точке ($x = 0$) скорость V, но ускорение не чисто центростремительное: не перпендикулярно к траектории; $R = V^2/(g\cos\alpha)$. Этот радиус больше (траектория здесь прямее).

Кроме центростремительного ускорения, происходящего от изменения направления скорости, еще есть тангенциальное, которое показывает изменение скорости вдоль траектории: $a_\tau = d|V|/dt$. Например, для брошенного тела в исходной точке $a_\tau = -g\sin\alpha$, а в верхней – нулевое. Иногда удобнее раскладывать вектор ускорения на такие подвижные оси – вдоль и поперек кривой, чем на заранее жестко заданные.

Из траектории брошенного тела (пример 1) легко найти дальность полета: $y = 0$ при $x = V^2 \cdot 2\cos\alpha\sin\alpha/g = V^2\sin 2\alpha/g$, откуда видно, что максимальная дальность будет при $\alpha = \pi/4$. В верхней точке высота в этом случае равна четверти дальности. Реально сильно влияет сопротивление воздуха. В дальнобойной артиллерии используют более крутой запуск, чтобы полет происходил в разреженных слоях атмосферы.