МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

ДИНАМИКА

А. П. Ершов

4 сентября 2009 г.

Глава 2

ДИНАМИКА

В этой главе рассмотрены законы Ньютона, которые определяют механическое движение, а также законы взаимодействия частиц и тел.

2.1 Принцип относительности Галилея. Системы отсчета

Все явления следует описывать в **системе отсчета**, которую можно представлять себе как систему координат, связанную с некоторым телом. Например, можно «привязать» систему координат к земной поверхности, или к вагону поезда, или к центру Солнца. От выбранного начала координат далее отмеряются расстояния.

Система отсчета не единственна – ее можно связать с любым телом. Возникает проблема выбора. Сидя в вагоне, мы видим, что станция движется, а человек, сидящий в станции, считает, что движется вагон. Кто же прав? Что движется на самом деле?

Многие думают, что истинно неподвижна станция. Это как будто разумнее, тогда неподвижны рельсы, земля, Австралия и много других вещей. Кажется маловероятным, что все они могут поехать по воле машиниста поезда. Сам же поезд сравнительно невелик, и он-то поехать как раз способен. Этот взгляд широко распространен. Почти любой уверен, что Земля летает вокруг Солнца (по приблизительно круговой орбите), а не наоборот. При этом не замечают явного противоречия: если Земля вращается вокруг Солнца, то какой толк говорить о неподвижности железнодорожной станции? Далее, мы знаем, что Солнце тоже куда-то летит. Но тогда как может Земля двигаться по кругу?

Галилей в начале семнадцатого века первым понял, что бессмысленно разбирать, кто прав. Все системы отсчета равноправны. К этому заключению Галилея привели знаменитые эксперименты с наклонной плоскостью. Он скатывал шары с наклонной доски. Оказалось, что пройденные расстояния пропорциональны квадрату времени. Конечно, влиял и угол наклона доски к горизонту. Однако квадратичная зависимость сохранялась для всех углов, при которых удавалось получить результат. В современной записи

$$X = at^2/2 ,$$

то есть, как мы уже знаем из кинематики, шары катились с постоянным для данного угла ускорением a. Ускорение зависело от угла наклона φ; очевидно, что при $\varphi = 0$, то есть на ровной доске, шар не разгоняется.

Теперь представим себе уже катящийся шар на почти горизонтальной доске. При малом угле наклона шар разгонялся бы, хотя и медленно. Если сделать угол отрицательным (заставить шар подниматься), то его скорость будет уменьшаться. Что будет при строго горизонтальной доске? Галилей догадался, что идеальный шар должен катиться по горизонтальной плоскости с **постоянной скоростью**.

Другими словами, свободное от внешних воздействий тело должно двигаться равномерно и прямолинейно (закон инерции). Этот результат резко противоречил «научным» представлениям того времени. Считалось, по Аристотелю, что для всякого движения нужно внешнее воздействие. Это соответствует и бытовому опыту. Лодку надо тянуть, хотя бы на веревке, из-за того, что есть заметное сопротивление среды. Конечно, и в опытах Галилея присутствовало сопротивление, которое мы теперь называем трением качения. Заслуга Галилея состоит в том, что он смог понять непринципиальность трения, возможность уменьшения его практически до нуля. В этом ему помогла удачная постановка опытов. Трение качения вообще незначительно; выбор шаров, а не брусков, позволил Галилею увидеть главное в его экспериментах.

Закон инерции прямо приводит к равноправию систем отсчета. Если свободное тело движется с постоянной скоростью, в другой системе отсчета скорость будет другой. Можно сделать тело неподвижным, перейдя в систему, имеющую точно такую же скорость (скажем, можно пойти рядом с катящимся шаром или просто поместить начало координат в его центре). Для древних греков вопрос о смене системы отсчета не возникал вообще, несмотря на развитые перевозки и мореплавание. Все свободные тела должны были останавливаться относительно земли, с которой, на теперешнем языке, связывалась абсолютная, выделенная система отсчета. Но если тело не останавливается само, основания для выделения какой-либо системы отпадают.

И вот Галилей выдвинул свой **принцип относительности**. Все системы отсчета совершенно равноправны. Все явления происходят одинаково во всех системах отсчета, то есть одинаково поставленные эксперименты должны давать одинаковые результаты. Скажем, опыты с наклонной плоскостью, проведенные в каюте корабля, покажут те же законы движения, что и в лаборатории Галилея. Разумеется, это правильно при отсутствии качки или ускорений. Поэтому мы должны ограничить возможные переходы между системами отсчета. Если идеальный шар имеет постоянную скорость относительно стен комнаты, то он будет иметь постоянную (конечно, другую) скорость во всех системах отсчета, движущихся равномерно относительно комнаты. Галилей не только исключил из рассмотрения силы трения, но и ограничился лишь системами отсчета, движущимися без ускорений.

Сидя в каюте и не высовываясь наружу, невозможно определить, «движется» корабль (относительно берега) или стоит. Если же выглянуть, то мы увидим движение, но не абсолютное, а всего лишь относительно берега. Если на палубе пиратского корабля идет сражение, никто не берет поправок на перемещение корабля и не интересуется его скоростью, справедливо считая, что шпаги и пистолеты действуют так же, как если бы корабль стоял у пристани. (Но если корабль налетит на риф, то все тотчас это заметят).

Видимо, принцип относительности – это первое использование идеи **наблюдаемости**, согласно которой от умозрительных построений, не приводящих к наблюдаемым на эксперименте последствиям, нет никакой пользы. Раз нет способа определения абсолютной системы отсчета, то и не существует такой системы. Движение можно определить только относительно системы отсчета (берега, корабля или другой – все равно). Нет выделенной, абсолютной системы отсчета. Конечно, Галилей обобщил не только свои эксперименты, но и разносторонний опыт человечества. Скажем, при плаваниях через океаны, когда нет видимых ориентиров, моряки часто могли сталкиваться с трудностью определения движения корабля по воде в тихую погоду.

Насколько устойчивы неверные представления о абсолютном пространстве, показывает роман «Магелланово облако» Ст. Лема. Космонавты отправляются к Альфе Центавра со скоростью всего 170000 км/с ($\approx 60\%$ световой). Если ехать быстрее, возникают неприятные ощущения, а скорость около 190000 км/с приводит даже к гибели экипажа. Это ограничивает эйнштейновское замедление времени на уровне 80% и тем затрудняет полеты к звездам. Разумеется, ученые находят выход. При достаточно быстром разгоне смерть оказывается обратимой! После торможения все оживут.

Здесь мы видим смесь современных (предельность скорости света) и догалилеевских представлений. Не возникает вопроса, относительно чего ракета развивает скорость и почему жители Земли, имеющие в системе ракеты такую же по величине скорость, даже не замечают своего опасного положения. Ясно, что в пространстве везде вбиты колья и верстовые столбы, и система Земли – центр вселенной.

Как ни удивительно, но сейчас выясняется, что в некотором смысле можно говорить не об абсолютной, но все же выделенной системе отсчета. Это система, в которой изотропно реликтовое излучение – заполняющий Вселенную газ фотонов, имеющий температуру около 3 градусов Кельвина. Солнечная система имеет скорость около 600 км/с относительно системы излучения. В результате с одной из сторон небосвода приходят чуть более энергичные фотоны, чем с противоположной. Это движение создает ненулевую (но совершенно ничтожную) силу трения. Механическое действие реликтовых фотонов нельзя измерить теперь и, возможно, нельзя будет измерить никогда.

Вернемся в XVII век. Галилей же изобрел маятниковые часы. Отсюда ясно, как непросто было ему провести свои опыты. Экспериментальный подход в его времена был совершенно новым и до некоторой степени тоже «изобретен» Галилеем. Большинство тогдашних ученых считало достоверным только знание, полученное из логических рассуждений. Например, когда Галилей открыл спутники Юпитера с помощью зрительной трубы, ему возражали, что пятнышки, видимые в трубу возле планеты, могут быть вовсе не небесными телами, а только видимостью, какими-то бликами из-за несовершенства оптики. Допустим, эти пятна появлялись, когда труба наводилась на Юпитер. «С каких пор свидетельства наших органов чувств могут идти в сравнение с ярким светом строгой логики?» (Б.Брехт, Жизнь Галилея). Логически опровергнуть такую позицию нельзя. Поскольку свойства телескопа были еще плохо известны, только практика могла показать, что если земные предметы, Луна или Венера таких фантомов не производят, то и Юпитер вряд ли должен, то есть трубе можно доверять.

Принцип относительности плохо согласуется с заявлением «А все-таки она вертится». Такое утверждение недалеко от бессмыслицы, не говоря о том, что никогда не приводится какой-либо реакции на него. Можно заявить, что Солнце вращается вокруг Земли, и не будет никакой ошибки. Ведь это мы и видим, обитая в системе Земли.

2.2 Инерциальные системы отсчета. Законы Ньютона

Галилей первым начал развивать механику на должном уровне, но основные результаты получил Ньютон (1689). Традиционно принято выделять три закона Ньютона.

Первый закон – повторение результата Галилея: тело движется равномерно и прямолинейно либо покоится, если на него не действуют силы. Сейчас принято дополнять формулировку словами «в инерциальной системе отсчета». Инерциальная же система – это в которой выполняется первый закон. Чтобы избежать тавтологии, можно считать, что первый закон постулирует существование инерциальных систем и подтверждается опытом. Способ проверить инерциальность может быть таким: повторяем в нашей системе отсчета опыты Галилея. Если изолированное от всех воздействий тело не ускоряется, система будет инерциальной. Например, шар может лежать на гладкой горизонтальной поверхности стола, установленного на железнодорожной платформе, которая стоит на рельсах или равномерно катится по ним. Это инерциальные системы.

Двигаясь с постоянной скоростью относительно любой инерциальной системы, получаем другую инерциальную систему. Хорошим примером инерциальной системы будет система, связанная с так называемыми «неподвижными звездами».

Очевидно и наличие неинерциальных систем. Достаточно закрутиться вокруг оси, и вся Вселенная завертится в обратную сторону по кругам, в том числе и вполне изолированные тела. Если вагон начнет разгоняться, шар внутри этого вагона покатится по горизонтальной поверхности. Это тоже будет неинерциальная система, в которой не выполняется закон инерции.

Основная заслуга Ньютона – формулировка законов динамики. **Второй закон** определяет движение **не** изолированного тела, на которое действуют другие тела. Как должен выглядеть такой закон?

Ньютон мог рассуждать примерно таким образом. Из результатов Галилея следовало, что движение само по себе несущественно, то есть скорость тела не может определяться воздействиями на него в данный момент. Ведь в другой системе отсчета скорость может быть нулевой! Когда мы едем в автомобиле (по хорошей дороге), мы не чувствуем скорости, но легко замечаем ее изменения. Внешние воздействия могут определять **изменение** скорости во времени, то есть **ускорение**. Заметим, что Галилей такой физической величины не знал, и даже старался избегать умножения или деления величин разных размерностей. Свой закон качения он формулировал примерно так: отношения пройденных расстояний равны отношению квадратов времен. Ньютон уже не имел таких препятствий и, кроме того, сам открыл необходимый для механики математический аппарат – производные и интегралы.

Попробуем искать закон движения в таком виде:

$$\text{ускорение} \sim \text{воздействию}.$$

Мы ничего не потеряем, если слово «ускорение» заменим буквой a, (от английского acceleration), «воздействие» же заменим на слово «сила» или на букву F (от английского force). Пока это только жонглирование словами или буквами, ведь мы еще не знаем, как определить (для физика это значит измерить) силу:

$$a \sim F\ .$$

Нам точно известно, что такое ускорение. Теперь, взяв какое-то тело (назовем его эталонным) мы можем изучать силы! Если под влиянием некоторого воздействия тело получает единичное ускорение (1 м/с^2), то и силу назовем единичной. При ускорении 2 м/с^2 сила будет двойной. Пример – действие на тело растянутой пружины. Очевидно, что чем больше растягивать пружину, тем «лучше» она ускоряет пробное тело, тем больше будет ускорение. Такие опыты показывают, что сила примерно пропорциональна растяжению пружины. Укрепив пружину на дощечке, можно проградуировать прибор и получить измеритель силы – динамометр (от греческого dynamis – сила).

Теперь можно изучить действие силы на различные тела. Ясно, что железнодорожный вагон будет ускоряться медленнее, чем маленькая тележка. Пробуя ускорять тела разных размеров, из различных материалов, приходим к уравнению:

$$ma = F\ , \tag{2.1}$$

где m (англ. mass) – характеристика каждого конкретного тела. Собственно, это определение массы. Мы можем проделать опыты по разгону ряда тел, например, при единичной силе, и определить массы этих тел из уравнения (2.1).

Заметим, что форма этого уравнения пока что не накладывает никаких ограничений на закон движения. Например, масса могла бы оказаться зависящей от силы. Нет никакой гарантии, что масса имеет какие-либо удобные простые свойства. Выяснить это можно только в опыте.

Меняя силу, мы из опыта можем убедиться, что m не зависит от F! Для любого тела удвоенная сила дает удвоенное ускорение. Следовательно, для каждого тела масса m – константа. Далее, опыт показывает, что при единичной силе «удвоенное» тело, составленное из двух эталонных, или единичных, имеет половинное ускорение. Следовательно, m – аддитивная характеристика, массы тел складываются из масс составляющих. Это свойство не зависит от формы, цвета, материала и т.п. составляющих. Теперь мы знаем, что все тела составлены из молекул, и масса, грубо говоря, – это количество таких структурных единиц.

Что будет, если на тело одновременно есть несколько воздействий? Снова опыт показывает, что когда тело тянут двумя динамометрами, ускорение будет таким же, как если приложить одну «результирующую» силу, равную сумме показаний динамометров. Но если тянуть в разные стороны, результирующая сила будет разностью элементарных сил. В общем, если направления действия сил различны, результирующая сила оказывается равна векторной сумме отдельных сил. Поскольку ускорение – тоже вектор, можно записать уравнение движения в более общем виде:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}\,. \tag{2.2}$$

Итак, в духе принципа Галилея, внешнее воздействие (сила $\boldsymbol{F}$) определяет не скорость, а ускорение, которое одинаково во всех инерциальных системах. Вместо (2.1) мы могли бы написать $m^2a = F^3$, но тогда были бы аддитивными куб «силы» и квадрат «массы», что явно неудобно. Следовательно, форма записи уравнений – это результат не «вывода», приведенного выше, а главным образом опыта.

Уравнения (2.1) и (2.2) есть различные формы записи **второго закона Ньютона**.

Разумеется, приведенная последовательность «экспериментов», хотя и последовательна логически, вряд ли наиболее удобна. Например, массы тел лучше определять путем взвешивания: здесь используется экспериментально установленная пропорциональность массы и силы тяжести. Исторически закон Ньютона, конечно, был не результатом намеченной выше цепочки опытов, а обобщением накопившейся практики человечества, выражением «здравого смысла» в области механики. Вместе с тем заметим, что такие эксперименты провести, разумеется, можно, причем средствами современной школьной лаборатории. Очень полезное приспособление – «воздушная дорога» – позволяет практически исключить трение. Применяемая в Новосибирской физико-математической школе конструкция состоит из трубы прямоугольного сечения с рядом малых отверстий на верхней стенке. В трубу нагнетается воздух обычным бытовым пылесосом, и по ней могут скользить исследуемые тела.

Третий закон Ньютона: силы между телами **взаимны**. Не только нельзя подействовать на тело и самому избежать его воздействия (стукнуть по стене и не почувствовать удара), но и силы эти равны точно и противоположны по направлению:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}\ .$$

В простых случаях мы уже можем убедиться в правильности этого закона. Пусть тела масс m_1 и m_2 соприкасаются, и первое тело толкают с известной силой F (рис. 2.1). Ускорение системы из (1) будет $a = F/(m_1 + m_2)$. Таким же должно быть ускорение каждого тела. На второе действует пока неизвестная сила F_{12} со стороны первого. Записывая второй закон Ньютона, получаем $a = F_{12}/m_2$, откуда $F_{12} = Fm_2/(m_1{+}m_2)$. Рассмотрим теперь движение тела m_1 : $a = (F + F_{21})/m_1$. F_{21} – это сила действия второго тела на первое. Отсюда находим

$$F_{21} = -F + am_1 = -Fm_2/(m_1 + m_2) = -F_{12}\ .$$

Мы получили искомое равенство сил, совершенно не зная, как взаимодействуют тела (сколько точек соприкосновения, каковы упругие свойства материалов, ...). Все, что нам понадобилось – это тот опытный факт, что тела могут ускоряться вместе, сохраняя соприкосновение. Тела могли бы быть склеены или вообще быть частями единого тела.

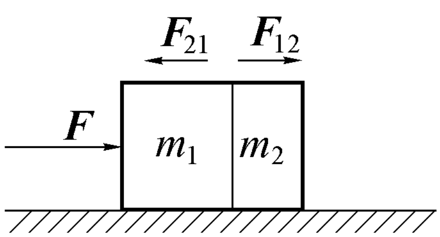

Рис. 2.1.

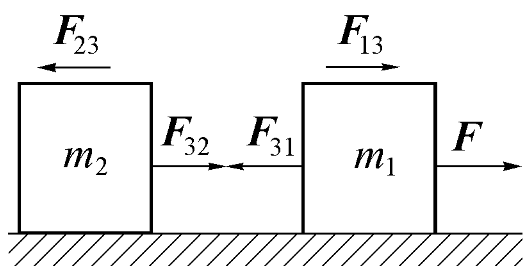

Рис. 2.2.

Конечно, мы не «вывели» третий закон Ньютона, а только показали его справедливость на примере. Важно, что и в более сложных случаях закон выполняется. Тела могут иметь разные ускорения (при ударе, электрическом или гравитационном взаимодействии). Независимо от этого третий закон обязан выполняться.

Более сложный случай – два тела, соединенных нитью (рис. 2.2). Такая система позволяет рассматривать растягивающие усилия. В качестве первого (вполне разумного) приближения примем, что нить не изменяет своей длины (нерастяжима). Тогда по-прежнему ускорения тел одинаковы. Но тел уже три! Как мы знаем, противоположными будут силы взаимодействия каждого тела с нитью:

$$F_{13} = -F_{31}, \quad F_{23} = -F_{32}\ .$$

Непосредственно «через пространство» тела не взаимодействуют, поэтому сил F_{12} и F_{21} попросту нет. Все же иногда говорят, что тела взаимодействуют «через нить». При этом подразумевают, что нить имеет пренебрежимо малую массу. А тогда из уравнения движения, написанного для нити,

$$m_{\text{нити}} \cdot a = 0 \cdot a = F_{23} + F_{13} \ ,$$

получаем равенство $F_{13} = -F_{23}$. Тогда о нити можно забыть, и силы, действующие на первое и второе тела, будут подчиняться правилу взаимности: $F_{32} = -F_{31}$. Но это – не третий закон Ньютона, а в общем случайное равенство сил между различными парами тел. Если массой нити пренебречь нельзя, такого равенства, конечно, не будет.

Можно тела соединить пружиной нулевой массы, так что ускорения тел не будут равны из-за деформации пружины. И в этом случае можно приравнять $F_{32} = -F_{31}$. Если же масса пружины не мала, надо честно рассматривать три тела, силы между взаимодействующими парами будут равны по величине и противоположны. Подробнее смысл третьего закона Ньютона и его необходимость мы выясним далее.

Понимание законов Ньютона достигается практикой решения задач. Здесь отметим важные свойства сил:

- **Сила имеет источник**: в механике это какое-то другое тело.

- **Принцип суперпозиции**: силы, действующие на данное тело со стороны других, векторно складываются. Сумму называют равнодействующей или результирующей силой.

Кроме того, важно знать, как **не надо** говорить о силе. $m\boldsymbol{a}$ – это **не** сила, а ее **результат**. Среди всех сил со стороны различных тел **никогда** нет «силы» $m\boldsymbol{a}$ (и **почти никогда** нет силы, численно равной по величине)! Произведение массы тела на его ускорение – это результат действия нескольких сил, каждая из которых имеет источник. Никакое другое тело не действует на рассматриваемое тело с такой силой.

Равным образом сила – это не $m\boldsymbol{a}$, а воздействие со стороны другого тела, и только равнодействующая всех реальных сил равна $m\boldsymbol{a}$.

Научные термины по необходимости происходят от слов, обозначающих донаучные, бытовые понятия. Обычно принято указывать, что физическая величина совсем мало похожа на своего языкового предка. Может быть, это верно для таких тонких понятий, как цвет кварков. Но в механике почти всегда слова обозначают практически то же, что в обычном языке. Сильный человек на любом приборе, измеряющем силу, будет иметь преимущество перед слабым. То же относится и к понятию массы.

Изложенные законы составляют основу механики. До Ньютона механика была довольно бессистемным набором **сведений** и **рецептов**. Ньютон же написал **уравнения**, позволяющие (в принципе) решить любую задачу. Впервые возникла **научная теория**.

Размерность силы в системе СИ из (2.1) кг·м/с^2 = Н (ньютон). В системе СГС (сокращенно сантиметр, грамм, секунда) единица силы г·см/с^2 называется **дина**. Подставляя кг и м, видим, что 1 Н $= 10^5$ дин. Внесистемная единица – кГ, или кгс (килограмм силы, т.е. вес тела массой 1 кг на Земле). 1 кГ = 1 кг $\times g = 9.8$ Н (часто считают 10) или примерно 10^6 дин.

2.3 Импульс. Сила как изменение импульса

Вспомнив, что $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$, можно переписать (2.2) в виде

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \,, \tag{2.3}$$

где вектор $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ называется **импульсом** тела. Внести массу под знак производной можно, так как масса постоянна. На первый взгляд, преимущества в такой записи не видно. Однако заметим, что уравнение (2.2), строго говоря, пригодно для материальной точки, для которой мы знаем, что означают координаты, скорость и ускорение. С меньшей уверенностью можно применять (2.2) к телам достаточно малых размеров. Покажем, что (2.3) применимо к любым телам и даже к системам тел, причем импульс системы – это векторная сумма импульсов ее частей, а сила $\boldsymbol{F}$ будет суммой сил, действующих на тела системы.

Пусть имеется тело или набор (система) тел. Делим их на малые части m_j, которые можно считать точечными и, значит, для которых хорошо определены скорости $\boldsymbol{v}_j$, координаты $\boldsymbol{r}_j$ и ускорения $\boldsymbol{a}_j$. Для каждой элементарной массы

$$m_j \cdot \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{F}_j \,, \qquad \text{или} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_j}{dt} = \boldsymbol{F}_j \,.$$

Замечаем, что силы $\boldsymbol{F}_j$ делятся на внешние по отношению к системе (обозначим их $\boldsymbol{F}_j^o$, от слова out) и внутренние $\boldsymbol{F}_{kj}$ действия частицы k на частицу j. Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{p}_j}{dt} = \boldsymbol{F}_j^o + \sum_{k \neq j} \boldsymbol{F}_{kj} \,.$$

Суммируем эти равенства для всех частиц системы. По третьему закону Ньютона, каждая $\boldsymbol{F}_{kj}$ аннигилирует с противоположной $\boldsymbol{F}_{jk}$. В левой части будет производная от суммы импульсов, или полного импульса системы:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_j^o = \boldsymbol{F} \,. \tag{2.4}$$

Видим, что полный импульс системы меняется только под влиянием суммы внешних сил. Иначе невозможно было бы разобраться с движением любого куска мела (имеющего порядка 10^{23} частей на молекулярном уровне). Эта сумма $\boldsymbol{F}$ и будет равнодействующей сил, приложенных к данному телу или системе.

Сложить так удачно уравнения движения частей системы удалось благодаря линейности второго закона Ньютона и существованию третьего. Заметим, что способов выделения частей существует множество, но результат от способа не зависит. Это избавляет нас от кошмара делимости тела на неограниченное и неопределенное число материальных точек с неизвестными взаимодействиями.

Например, для воды, текущей по трубе, вообще непонятно, что такое ускорение, так как оно в каждой точке разное. Но, несомненно, вода действует на трубу и труба – на воду. Найдем изменение импульса определенной массы воды за время Δt (рис. 2.3). Масса воды, входящей в трубу, будет $\rho S V \Delta t$, она приобретет горизонтальный импульс $\rho S V \Delta t \cdot V$, и потеряет такой же вертикальный импульс. Суммарное изменение импульса $\Delta P = \sqrt{2} \cdot \rho S V^2 \Delta t$ направлено «на юго-восток». Сила, действующая на воду, $F = \Delta P / \Delta t = \sqrt{2} \cdot \rho S V^2$. По третьему закону, вода действует на трубу с противоположной силой.

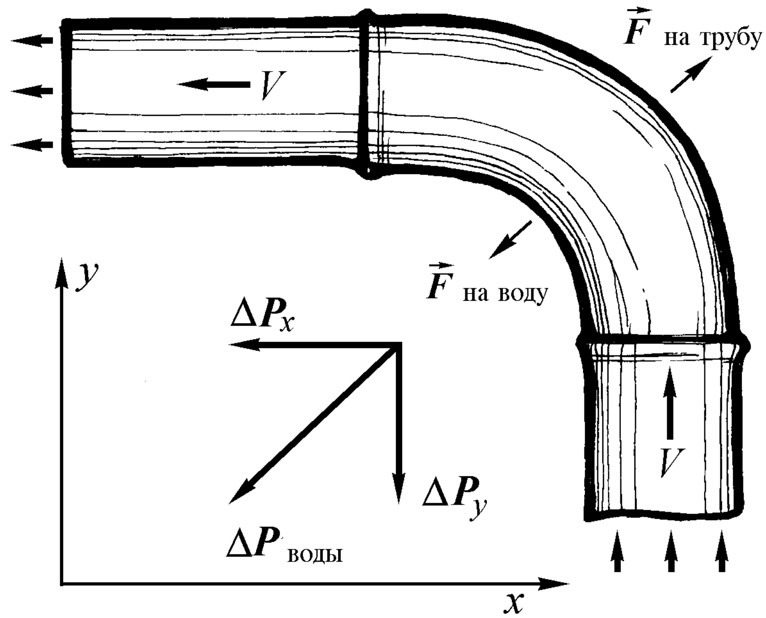

Рис. 2.3.

2.4 Движение центра масс.

Любое тело, которое мы можем видеть, состоит из большого числа частей. Можно ли говорить о координате тела? Редко скорости всех частей одинаковы. Имеет ли смысл понятие скорости тела? Покажем, что на оба вопроса можно ответить положительно.

Что следует подразумевать под координатой тела? Перепишем импульс

$$\boldsymbol{P} = \sum m_j \boldsymbol{v}_j = \sum m_j \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_j \boldsymbol{r}_j\right) = \left(\sum m_j\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_j \boldsymbol{r}_j}{\sum m_j}\right) = M \cdot \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} .$$

Здесь $M = \sum m_j$ обозначает полную массу системы, а вектор $\boldsymbol{R} = \sum m_j \boldsymbol{r}_j / \sum m_j$ называется **радиус-вектором центра масс системы**; три его проекции – это координаты центра масс, например $X = \sum m_j x_j / \sum m_j$. Производная $\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{R}/dt = \boldsymbol{P}/M$, естественно, называется скоростью центра масс.

Примеры.

1. Пусть имеется две массы m_1 и m_2 на расстоянии L. Помещаем начало координат в массу m_1, тогда координата центра $X = (m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot L)/(m_1 + m_2) = m_2 \cdot L/(m_1 + m_2)$ – известный из школы результат.

2. Однородный полушар радиуса R. Кладем его на плоскость и режем на слои толщиной dx на высоте x (переменной). Масса такого блина $dm = \rho \cdot \pi(R^2 - x^2)dx$, высота x, в числителе сумма $x \cdot dm$, а в знаменателе сумма dm, то есть полная масса $\rho 2\pi R^3/3$:

$$X = \frac{\int_0^R \rho\pi(R^2 - x^2)x dx}{\int_0^R \rho\pi(R^2 - x^2)dx} = \frac{(R^2x^2/2 - x^4/4)\Big|_0^R}{(R^2x - x^3/3)\Big|_0^R} = \frac{R^4/4}{2R^3/3} = \frac{3R}{8} .$$

Уравнение (2.4) можно записать и так:

$$M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad \text{или} \quad M\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{F}, \tag{2.5}$$

то есть центр масс системы движется под действием одной результирующей силы $\boldsymbol{F}$ – суммы всех внешних сил, приложенных к системе. Для жесткого тела становится ясно, что подразумевалось неявно под его координатой – это положение центра масс. Если отвлечься от вращения, движение твердого тела сводится к движению материальной точки. При этом результирующая сила вовсе не обязана проходить через центр масс.

Если информации о движении центра масс недостаточно, то реально необходимо разделение системы на малые части. Такой подход с заданием взаимодействия элементарных масс используется в динамике жидкости и газа. Для расчета трехмерной задачи на каждом шаге по времени может понадобиться, например, разбиение на $N = 100 \times 100 \times 100 = 1000000$ частей. Не считая внешних, внутренних сил между ними будет максимум $N \cdot (N-1)/2 \approx 5 \cdot 10^{11}$. К счастью, обычно достаточно сил между ближайшими соседями (примерно $3N$).

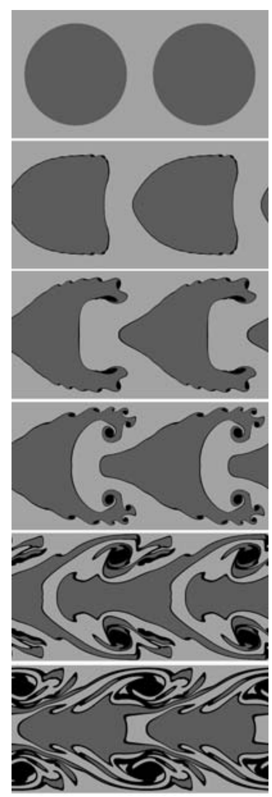

Рис. 2.4.

На рис. 2.4 показан пример расчета движения капель подкрашенной жидкости навстречу потоку окружающей жидкости, имеющей те же свойства. Капли двумерные (т.е. вначале – цилиндрические, видны плоские сечения); расчетная сетка содержала 1600×1600 ячеек. Для наглядности показана удвоенная расчетная область. Подразумевается, что вправо и влево картинка неограниченно продолжается (там движется множество еще таких же капель). Сверху вниз показаны конфигурации на моменты времени t: 0; 0,5; 1; 1,5; 3; 4,5; единицей времени служит отношение начального диаметра цилиндра d к начальной относительной скорости V. Видны деформация границ, развитие неустойчивости и перемешивание. Зона существенного смешения выделена черным. Расчет выполнен Д.А. Медведевым.