МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

А. П. Ершов

9 октября 2009 г.

Глава 3

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

В этой главе вводятся важнейшие понятия механики – работа и энергия – и устанавливаются закономерности, которым они подчиняются.

3.1 Работа силы. Мощность. Кинетическая энергия

В этом курсе мы стараемся иллюстрировать физические проблемы на простых бытовых примерах. Такой подход разумен и на стадии определений физических величин. Принимаясь за изучение очередного раздела физики, всегда полезно задуматься, какие здесь возникают новые понятия, зачем они нужны и, не в последнюю очередь – почему они именно так называются.

Работа – это слово, близкое каждому. В житейском смысле мы понимаем работу как, например, поднятие каких-то тяжестей. Можно представить себе постройку пирамиды Хеопса. Когда потребности в такой деятельности превысили возможности человека, люди начали приручать животных. Сейчас практически всю работу вместо нас выполняют механизмы. Разумеется, физика не могла пройти мимо такой важной стороны человеческой активности.

Перейдем к определениям. Работой силы F на пути L называется произведение

$$A = F \cdot L \,. \tag{3.1}$$

Это выражение хорошо согласуется с бытовым понятием «физической» работы. Если мы хотим поднять груз на четвертый этаж, работа будет, разумеется, больше, чем при подъеме на второй. Далее, каждый понимает, что более тяжелый груз нести труднее. Разумно платить грузчикам за произведение килограммов (или тонн), на метры подъема. Точнее, размерность работы – ньютон·метр = джоуль (Дж в системе СИ) или дина·см = эрг (СГС).

В то же время субъективное ощущение работы может отклоняться от этого определения. Гораздо легче поднять по лестнице два груза в 40 кг по очереди, чем 80 кг за один прием. Груз в 160 кг вообще вряд ли кто возьмется носить в одиночку, и только штангисты поднимают такой вес на короткое время. Для человека восприятие затраченной работы нелинейно – как в отношении развиваемой силы, так и пути (усталость). Скорее смысл работы не физиологический, а экономический. Если извлечь из шахты вдвое больше угля, то и получить за него можно вдвое больше. Работа, следовательно, дает некий полезный продукт: его количество просто пропорционально работе.

Если сила на пути L переменная, нужно разделить весь путь на малые участки Δx и просуммировать:

$$A = \sum F_j \cdot \Delta x_j = \int_0^L F \cdot dx \; . \tag{3.2}$$

Если построить график зависимости силы от координаты, легко видеть, что работа определится, как площадь криволинейной трапеции (рис. 3.1).

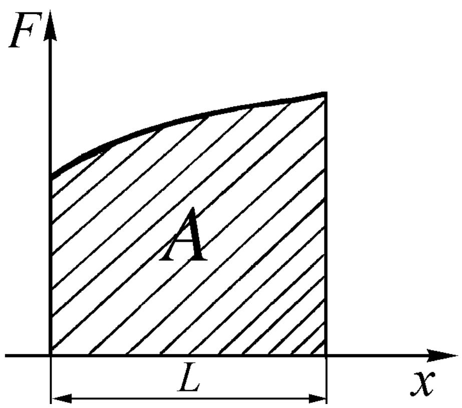

Рис. 3.1.

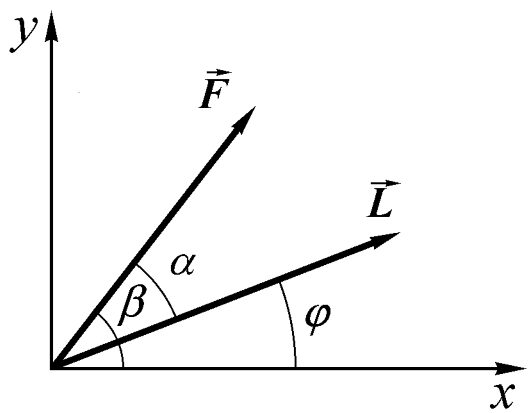

Рис. 3.2.

До сих пор мы считали, что сила $\boldsymbol{F}$ направлена вдоль перемещения $\boldsymbol{L}$. Очевидно, что переносить тяжелый рюкзак по горизонтальной (особенно по ровной) дороге легче, чем поднимать его на такое же расстояние. Теперь мы можем сказать, что горизонтальное перемещение требует меньшей работы. Но в обоих случаях сила, с которой мы действуем на груз, равна его весу. Отличаются направления перемещений. Разумно допустить, что играет роль в основном проекция силы F_L на направление перемещения:

$$A = F_L \cdot L = FL\cos\alpha \; , \tag{3.3}$$

где α – угол между $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{L}$. Из второго выражения видим, что работу можно записать и как $F \cdot L_F$, то есть произведение силы на проекцию перемещения на направление силы.

В общем случае, если векторы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{L}$ направлены по-разному, разложим их по осям. Три компоненты силы работают в своих направлениях:

$$A = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y + F_z \cdot \Delta z \; , \tag{3.4}$$

Можно ось x выбрать вдоль перемещения. Тогда $\Delta y = \Delta z = 0$, $\Delta x = L$ и $A = F_L \cdot L$. Или, выбирая ось x вдоль силы, получим $A = F \cdot L_F$. Мы уже знаем, что два последних выражения одинаковы и равны также $FL\cos\alpha$. Менее очевидно, что при любых направлениях осей (3.4) даст тот же самый результат. Покажем это для векторов, расположенных в плоскости xy (рис. 3.2). Если $\boldsymbol{L}$ имеет угол φ с осью x, а $\boldsymbol{F}$ направлена под углом β к этой оси, то из (3.4) получим:

$$A = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y = F\cos\beta \cdot L\cos\varphi + Fsin\beta \cdot Lsin\varphi = FL \cdot \cos(\beta - \varphi)\,.$$

Угол $(\beta - \varphi)$ – это и есть угол α между векторами.

Произведение двух векторов, вычисляемое про правилам (3.3, 3.4), называется их **скалярным произведением**: из двух векторов получается скаляр, т.е. просто число – никуда не направленная работа. Короче ее записывают так:

$$A = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{L})\,. \tag{3.5}$$

Заметим, что скалярное произведение обозначают, заключая вектора в **круглые скобки**. Квадратные обозначают совсем другое – **векторное** произведение, с которым мы познакомимся позже.

Независимость работы от поворотов системы координат называют короче **инвариантностью** (от латинского invariantis – неизменяющийся). Инвариантность – это важное свойство скалярной величины.

Конечно, не любая комбинация компонент двух векторов даст инвариантную величину. Например, выражение:

$$S = F_x \cdot \Delta x^2 + F_y \cdot \Delta y^2 + F_z \cdot \Delta z^2\,,$$

как легко убедиться, меняется при поворотах системы координат (достаточно взять силу и перемещение, направленные вдоль оси x, а затем рассмотреть повороты осей x, y). В частности, значение S можно обратить в нуль. Величины, которые так легко изменить и даже уничтожить, не могут иметь какого-либо значения. По выражению Э. Шредингера, в такой величине нет ни смысла, ни интереса. Поэтому-то в физике не используются «конструкции», подобные S. А вот работа A при повороте осей не изменяется. Независимость работы от направления осей не только удобна, но и необходима!

Компоненты вектора не инвариантны, и поэтому отдельно взятая компонента не составляет законченной физической величины. При повороте осей все они изменяются, одна или даже две из них могут обратиться в нуль. Но тогда возрастет оставшаяся компонента; вектор в целом никаким поворотом нельзя сделать нулевым. Полностью вектор задается всеми тремя (на плоскости – двумя) компонентами. Заметим, что любому вектору можно сопоставить инвариант – скалярное произведение вектора на себя. Например,

$$(F \cdot F) = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \equiv F^2\,.$$

Это попросту квадрат длины вектора (теорема Пифагора), независимость которого от направления осей очевидна.

Правильное физическое уравнение должно иметь в обеих частях величи́ны одной геометрической природы. Например, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ – с этой точки зрения правильное уравнение (вектор равен вектору). При любых изменениях системы координат оно не нарушится. Если же где-то приравниваются компонента вектора и скаляр, допустим $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}) = ma_x$, то такое уравнение не может быть верным. Даже если в одной системе координат равенство случайно выполнится, в другой оно непременно нарушится, так как слева стоит инвариант, а справа – нет. Тем более нельзя приравнивать скаляр и вектор – одна величина не может равняться трем.

Из формул (3.4) и (3.5) видно, что работа может быть нулевой при перпендикулярных $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{L}$. Если угол между $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{L}$ тупой, в частности – когда сила направлена против перемещения, то работа будет отрицательной. Положительная работа получается, когда угол между силой и перемещением острый.

Все же человек под грузом устает и на горизонтальной дороге. Секрет здесь в способе передвижения. Пешеход на каждом шаге слегка приподнимает рюкзак (и самого себя) и затрачивает работу. К сожалению, при опускании эта работа не компенсируется организму, хотя в среднем работа силы, с которой мы удерживаем груз, нулевая.

Работа, производимая в единицу времени, называется мощностью:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad \text{или } N = \frac{dA}{dt}\,.$$

Если сила F действует на движущуюся частицу, то $\Delta A = F\Delta x$, $\quad N = \Delta A/\Delta t = F\cdot\Delta x/\Delta t = F\cdot v$. Если векторы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{v}$ имеют разные направления, получится скалярное произведение:

$$N = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\,.$$

Например, если тело равномерно вращается по окружности на нити, сила натяжения $\boldsymbol{F}$ перпендикулярна $\boldsymbol{v}$, и работа, а с ней и мощность, развиваемая силой натяжения, нулевая.

Размерность мощности в СИ – ватт: 1 Вт = Дж/с; в СГС – эрг/с.

Что изменяется в окружающем мире от того, что произведена некоторая работа? Сначала разберем простейший вариант. На что расходуется работа в отсутствие всяких других сил, когда только мы прикладываем к телу силу? Примерно такой случай будет, если тело толкать по гладкому льду.

Пусть тело массы m разгоняется силой $\boldsymbol{F}$. Скорость тела за небольшое время Δt изменяется на

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_0} = \frac{\boldsymbol{F}\Delta t}{m}\,, \qquad \text{перемещение } \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = \frac{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v_0}}{2}\Delta t\,.$$

Тогда работа силы равна

$$A = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) = m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_0})\frac{(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v_0})}{2}\,.$$

В последнее выражение не входят ни сила, ни время ее действия, ни перемещение. Видим, что если только под действием силы тело разгоняется от $\boldsymbol{v_0}$ до $\boldsymbol{v}$, то работа, произведенная над телом,

$$A = m\frac{(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v_0})(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v_0})}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \, .$$

Это значит, что ровно на величину произведенной работы возросла величина

$$K = \frac{mv^2}{2} \, , \tag{3.6}$$

называемая **кинетической энергией** тела. Любой промежуток времени можно разбить на достаточно малые интервалы; нетрудно видеть, что и для любого промежутка выполнится равенство

$$A = K_2 - K_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \, , \tag{3.7}$$

называемое **теоремой о кинетической энергии**. Слово «энергия» не взято с потолка. Мы называем энергичным человека, способного преодолевать сопротивление. Точно так же запас кинетической энергии определяет, например, глубину пробивания пули, движущейся в среде с сопротивлением (то есть x при данной F – силе сопротивления). Действительно, приравнивая энергию K работе, которую способно совершить тело, получим:

$$\frac{mv^2}{2} = Fx \, , \quad x = \frac{mv^2}{2F} \, .$$

Таким образом, поставленный только что вопрос – «правильный»; на него имеется вполне разумный ответ. Действительно, о работе можно говорить, что она произведена не зря: она расходуется на увеличение энергии (кинетической в данном случае; других видов мы пока не знаем).

Сила $\boldsymbol{F}$ – по существу сумма всех внешних сил. Таким образом, теорема (3.7) словесно звучит так: сумма работ сил, действующих на тело, равна изменению кинетической энергии тела.

Заметим, что изменение кинетической энергии **системы** взаимодействующих тел не равно работе внешних сил. Внутренние силы также могут изменять кинетическую энергию системы. Пусть, например, замкнутая система состоит из двух притягивающихся друг к другу тел. Очевидно, оба тела при сближении будут увеличивать свою кинетическую энергию и в отсутствие внешних сил.

Работа силы и кинетическая энергия явно зависят от системы отсчета. Это ведет к парадоксам. Например, человек давит на стенку вагона, равномерно двигающегося со скоростью v относительно земли, с силой F. В системе вагона работа нулевая (нет перемещения), а в лабораторной системе человек за время Δt совершает работу $F \cdot v\Delta t$. (Получается, что заработок грузчика должен зависеть от системы отсчета.) В действительности в инерциальной лабораторной системе отсчета человек, действуя на стенку вагона с силой F, не имеет ускорения. Следовательно, сумма сил, действующая на него, равна нулю. То есть, человек, чтобы не оттолкнуться от стенки, должен на что-то опираться. Скажем, сила трения, действующая на подошвы его ботинок, равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой он давит на стенку. Тогда сумма сил, действующая на человека, равна нулю. Значит и полная работа также равна нулю в любой инерциальной системе отсчета.

Другой парадокс: тело вращается на нити по окружности с постоянной скоростью V. Сила натяжения нити перпендикулярна перемещению, и ее работа нулевая. Но в системе, имеющей скорость V в плоскости вращения, кинетическая энергия тела периодически меняется от 0 до $2mV^2$. Как это возможно? Попробуйте разобраться самостоятельно.

3.2 Потенциальная энергия в поле сил

Мы видели, что работа может приносить в виде результата полезные перемещения тел в случае подъема их против силы тяжести. Рассмотрим более общую постановку, когда тело находится в некотором силовом поле.

Под полем сил подразумевается сила, заданная в каждой точке пространства: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ или $F(x)$ при прямолинейном движении. В поле тяжести вблизи земной поверхности $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$, то есть сила постоянна. Но, вообще говоря, сила вполне может быть и переменной.

Пусть вместе с силой F, характеризующей поле (короче – просто полем) действует еще внешняя «наша» сила f. Мы уже знаем, что

$$(f + F)\Delta x = \Delta K = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad \text{или } f\Delta x = -F\Delta x + \Delta K \ .$$

Мы всегда можем подобрать f так, что $\Delta K \approx 0$, то есть кинетическая энергия не меняется (для этого должно быть $f \approx -F$). Куда же в этом случае пойдет работа нашей внешней силы?

Если определить **потенциальную энергию** так, чтобы ее изменение ΔU было равно $\Delta U = -F\Delta x$, то мы сможем сказать, что **наша** работа, то есть работа силы f, не пропала, а перешла в изменение потенциальной энергии:

$$\Delta A = f\Delta x = -F\Delta x = \Delta U \ .$$

Вместо того, чтобы всякий раз рассуждать о двух силах, почти уравновешивающих друг друга, для краткости используется именно последнее равенство, то есть потенциальная энергия определяется через силу F:

$$\Delta U = -F\Delta x \ . \tag{3.8}$$

Однако при этом часто забывают, откуда произошел знак минус в (3.8). Он появился именно потому, что потенциальную энергию тела изменяем мы, прилагая силу $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{F}$. Допустим, в поле тяжести мы поднимаем тело массы m на высоту h. Мы прикладываем силу $f = mg$, направленную вверх. Затраченная нами работа $fh = mgh$ положительна. Потенциальная энергия возрастает на mgh. Работа же поля будет $-mgh$, так как сила тяжести направлена вниз. Чтобы получить изменение потенциальной энергии, надо брать работу поля с обратным знаком. **Не забывайте знак минус!**

Так же как и кинетическая энергия, потенциальная энергия представляет собой некоторый резерв работы. Поднятое тело, опускаясь, может приводить в движение другие тела и совершать работу.

При переменной силе надо разбить перемещение на малые участки, в пределах которых сила будет практически постоянной:

$$U(x_2) - U(x_1) = -\int\limits_{x_1}^{x_2} F dx \,. \tag{3.9}$$

Задав значение U в одной точке, можно согласно (3.9) определить потенциальную энергию во всех других. То есть, потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной.

Отсутствие выделенного нуля потенциальной энергии приводит к неоднозначности величины U. Этот произвол может вызвать некоторое беспокойство. Но заметим, что всегда требуются **разности** U в двух точках, не зависящие от выбора начала отсчета U. Рассматривая падение камня на пол, можно его потенциальную энергию измерять от положения на полу, а можно – от потолка или от поверхности Земли. И даже от дна Марианской впадины. Скорость удара камня о пол получится во всех случаях одна и та же. Произвольная постоянная (или локализация нуля потенциальной энергии) выбирается из соображений удобства. Кинетическая же энергия имеет вполне определенный нуль при неподвижном теле.

При несовпадении направлений силы $\boldsymbol{F}$ и элементарного перемещения в пространстве

$$U(\boldsymbol{r}_2) - U(\boldsymbol{r}_1) = -\int\limits_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} (\boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}) \,. \tag{3.10}$$

При этом **любой** путь интегрирования должен давать один и тот же результат (рис. 3.3). Поля, в которых это получается, называются **консервативными**, или **потенциальными**. Если же разные пути из одной точки в другую дают разные значения работы силы $\boldsymbol{F}$, то понятие потенциальной энергии в таком поле не имеет смысла. Потенциальная энергия должна зависеть только от положения в пространстве. В этом смысле говорят о поле потенциальной энергии (скалярном, в отличие от поля силы).

Если по любому замкнутому контуру работа поля равна нулю, то такое поле потенциально (признак потенциальности поля). Действительно, берем в этом поле два различных пути (1 и 2) из точки B в точку C (рис. 3.3). Если пройти путь 1 из B в C, а затем вернуться по пути 2 назад, получим замкнутый контур. Полная работа по нему равна разности работ по путям 1 и 2, так как перемещения по 2 изменили знак. Раз работа по замкнутому контуру нулевая, следовательно работы по путям 1 и 2 равны.

Например, сила трения неконсервативна, так как она всегда направлена против перемещения. По замкнутому контуру работа будет ненулевая. «Потенциальной энергии трения» не существует. Сила тяжести консервативна. Можно поднять тело вверх, а затем перенести его в сторону, или наоборот – работа от этого не зависит. Существует потенциальная энергия mgh.

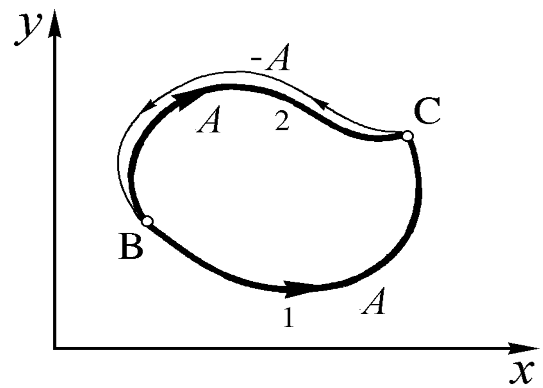

Рис. 3.3.

Примеры.

1. При деформации пружины жесткости k на величину x возникает упругая сила, определяющаяся законом Гука: $F = -kx$. При изменении деформации от x_1 до x_2, изменение потенциальной энергии выразится формулой:

$$U(x_2) - U(x_1) = -\int\limits_{x_1}^{x_2} (-kx)dx = \frac{kx^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \ .$$

Естественно выбрать потенциальную энергию равной нулю при нерастянутой пружине, то есть $U(0) = 0$. Тогда для потенциальной энергии деформированной пружины имеем:

$$U = \frac{kx^2}{2} \ .$$

Это выражение почти всегда наиболее удобное.

2. Ньютоновское поле тяготения. Пусть M – масса Земли. Поместим начало координат в центр Земли. Забегая немного вперед (это будет обсуждаться в гл. 6), примем, что сила, действующая на тело массы m со стороны Земли, определяется формулой:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^3} \cdot \boldsymbol{r} \ ,$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор тела. Введем малое перемещение Δr, направленное вдоль радиуса. (Поперечные перемещения не дают вклада в работу, откуда и следует потенциальность гравитационного поля). Изменение потенциальной энергии при перемещении тела из точки, отстоящей от центра на r_1, в точку, отстоящую на r_2, выразится формулой:

$$U(r_2) - U(r_1) = -\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) dr = -\frac{GMm}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \ .$$

Удобно принять, чтобы на больших расстояниях потенциальная энергия стремилась к нулю: $U(\infty) = 0$. Тогда имеем:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \; . \tag{3.11}$$

Это стандартный выбор нуля потенциальной энергии для задач, связанных с космическими полетами в поле тяготения Земли. Если же рассматривать тело, все время остающееся вблизи поверхности Земли, разумно договориться, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль на поверхности Земли: $U(R) = 0$, где R – радиус Земли. Это даст другое выражение потенциальной энергии:

$$U(r) = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) \; . \tag{3.12}$$

Разумеется, формулы (3.11) и (3.12) применимы только вне Земли, при $r \geq R$. На рис. 3.4 это нижняя и верхняя кривая; они отличаются на постоянную GMm/R. Оба графика, конечно, дадут одинаковые разности $U(r_2) - U(r_1)$ между любыми двумя точками.

Пусть $r = R + h$, где h – высота над поверхностью земли. Из (3.12) имеем:

$$U(h) = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{GMm}{R(R+h)} \cdot h \; .$$

При малых высотах ($h \ll R$) в знаменателе можно пренебречь h, и тогда $U(h) \approx (GMm/R^2)\cdot h$. Но GMm/R^2 – это просто сила, с которой Земля притягивает тело массы m на поверхности, то есть mg. Окончательно получаем: $U(h) = mgh$, что согласуется с полученным ранее выражением. На рис. 3.4 эта зависимость – прямая, касательная к (3.12) вблизи поверхности Земли.

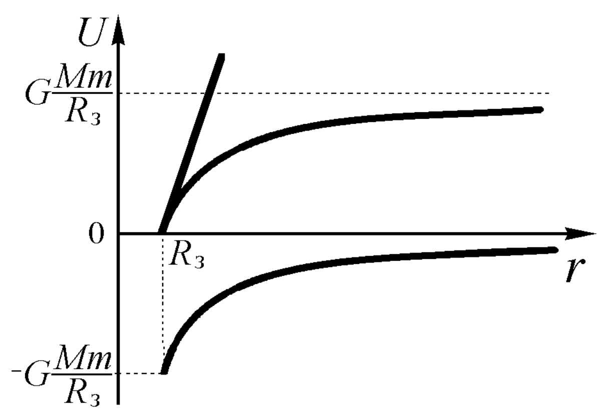

Рис. 3.4.

По третьему закону Ньютона, тело также притягивает Землю. Поэтому не совсем корректно говорить, что mgh или же (3.11) – это энергия тела. Правильнее считать, что она не является собственностью ни тела, ни Земли; это энергия их взаимодействия и принадлежит им совместно. Вообще потенциальная энергия взаимодействия тел не делится между телами, а принадлежит взаимодействующим парам. Например, пусть два тела притягиваются друг к другу с потенциальной энергией взаимодействия U. Помещаем такое же третье тело так, что тела образуют равносторонний треугольник. Всего имеется три пары тел, и энергия станет равной $3U$. Если бы мы считали, что каждое тело имеет $2U$ по числу соседей, то получили бы $6U$ и ошиблись бы в два раза.

Для прямолинейного движения из (3.8) непосредственно следует выражение силы через потенциальную энергию:

$$F = -\frac{dU}{dx} \,. \tag{3.13}$$

Например, для потенциальной энергии поля тяготения $U(r) = -\dfrac{GMm}{r}$ сила

$$F = -\frac{dU}{dr} = GMm\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}\,,$$

как и следовало ожидать. Знак минус означает, что сила стремится уменьшить расстояние r между телами (притяжение). Потенциальная энергия часто удобнее силы, поскольку функция $U(\boldsymbol{r})$ – скаляр, и, тем не менее, полностью определяет силовое поле (одна величина вместо трех компонент силы). Более аккуратные векторные выражения приведены ниже, в приложении.

В общем случае работа силы изменяет и кинетическую, и потенциальную энергию:

$$A = \Delta U + \Delta K \,.$$

. Сумма $E = U + K$ называется **полной** энергией (иногда полной механической). Важно, что это равенство применимо также и к системам тел. Если мы сумели определить потенциальную энергию так, чтобы учесть все существенные взаимодействия частей системы, то работа внутренних сил отражена в ΔU. Тогда работа **внешних** сил равна изменению полной энергии:

$$\Delta A = \Delta U + \Delta K = \Delta E \,. \tag{3.14}$$

Пример. Пусть тело массой $m = 1$ кг поднимают силой $F = 30$ Н на высоту $h = 1$ м. Ускорение силы тяжести g будем считать равным 10 м/с^2. Работа силы F на пути h равна $Fh = 30$ Дж. Эта работа идет на увеличение энергии системы, которая складывается из потенциальной энергии взаимодействия тела с Землей ($mgh - mg \cdot 0 =$ 10 Дж) и кинетической энергии тела[1] $mv^2/2$. Приравнивая работу внешней силы изменению полной механической энергии, получим: $mv^2/2 + mgh = Fh$, откуда $K = mv^2/2 = 20$ Дж. Мы можем теперь найти скорость тела на высоте 1 м: $v = \sqrt{2K/m} = \sqrt{40} \approx 6{,}3$ м/с. Тело ускоряется, так как сила F больше силы тяжести. То же значение скорости можно получить, найдя ускорение тела $a = (F - mg)/m = 20$ м/с ; тогда $v = \sqrt{2ah}$.

Для любой системы тел полная энергия определяется как сумма видов энергии: надо сложить кинетические энергии всех тел и потенциальные энергии взаимодействия всех пар.

[1]Покажите, что кинетической энергией Земли из-за ее большой массы можно пренебречь: Земля практически неподвижна.

Если работа внешних сил положительна, энергия системы растет. Если же работа отрицательна, энергия уменьшается. В этом случае говорят, что система совершает положительную работу над телами, с которыми она взаимодействует, за счет запасенной в ней энергии.

Приложение. Векторная связь силы и потенциальной энергии

Для того, чтобы получить выражения для компонент вектора силы в пространстве, поступим следующим образом: сдвинемся из точки на Δx, сохраняя y и z постоянными; тогда, в пределе при $\Delta x \to 0$ получим для компоненты силы

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \, . \tag{3.15}$$

«Круглая» буква ∂ в (3.15) – знак так называемой **частной** производной, подчеркивающий, что при дифференцировании функции $U(x, y, z)$ по переменной x остальные аргументы (y и z) считаются постоянными.

Аналогично для остальных компонент вектора силы имеем

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \, .$$

Тогда полный вектор силы можно записать в виде:

$$\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right) \equiv -\nabla U \, . \tag{3.16}$$

Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – единичные векторы по осям. Значок ∇ (набла) символически обозначает процедуру вычисления, стоящую в скобках. Это же выражение называется «градиент U» и записывается еще одним способом:

$$\mathrm{grad} U \equiv \nabla U \equiv \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) U \, .$$

Для ньютоновского потенциала поля тяготения, рассмотренного выше,

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

Частная производная по x:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -GMm \cdot \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial x} = -GMm \cdot (-1/2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x \, .$$

Преобразовывая, получим компоненту силы по оси x:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -GMm \cdot \frac{x}{r^3} \, .$$

Полная сила

$$\boldsymbol{F} = -GMm\left(\boldsymbol{i}\frac{x}{r^3} + \boldsymbol{j}\frac{y}{r^3} + \boldsymbol{k}\frac{z}{r^3}\right) = -GMm \cdot \frac{\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z}{r^3} = -GMm \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \, .$$

Мы получили, как и следовало, закон всемирного тяготения.