

# МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

## ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

А. П. Ершов

9 октября 2009 г.

## Глава 5

# ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В этой главе рассмотрена динамика вращения систем взаимодействующих частиц и, в частности, твердых тел, а также условия равновесия.

### 5.1 Уравнение вращательного движения. Момент силы

Вращательное движение имеет свои особенности. Например, открывая дверь, действуют на нее перпендикулярно плоскости. Если давить на дверь вдоль ее плоскости, она просто не сдвинется с места (рис. 5.1). В этой ситуации величина силы не определяет результат однозначно. Конечно, если учесть силы, действующие на дверь со стороны петель, и написать уравнения динамики, можно надеяться полностью решить задачу о движении двери. Но все же кажется, что если явно использовать ограничения, вызываемые неподвижными петлями, которые позволяют двери лишь вращаться, то описание движения заметно упростится.

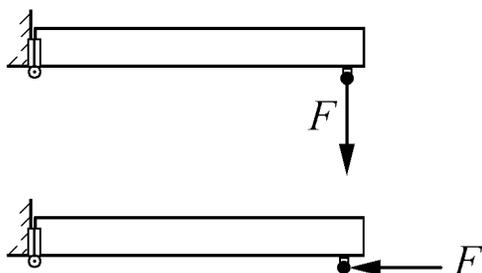


Рис. 5.1.

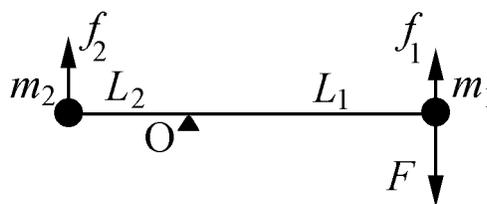


Рис. 5.2.

Рассмотрим более простую задачу. Пусть две точечные массы закреплены на невесомом и жестком стержне, который может вращаться на шарнире (точка  $O$  на рисунке 5.2). На тело массы  $m_1$  действует сила  $F$ , перпендикулярная стержню. Попробуем описать движение системы.

Для каждой массы напишем второй закон Ньютона:

$$m_1 a_1 = F - f_1, \quad m_2 a_2 = f_2.$$

Здесь  $f_{1,2}$  – силы, с которыми стержень действует на соответствующие массы. Обе эти силы, очевидно, направлены вверх (на рисунке), так как составляющей вдоль стержня быть не может, по крайней мере, в первый момент времени: ускорения тел перпендикулярны стержню. При этом ускорение  $a_1$  считаем направленным вниз, (естественно, вдоль силы  $F$ ),  $a_2$  – вверх. Уравнений для решения задачи не хватает: их всего два, а неизвестных – четыре ( $f_1, f_2, a_1, a_2$ ).

Для начала немного упростим задачу. Ускорения  $a_{1,2}$  явно не независимы. Движения масс – это поворот стержня. Для описания вращения тела линейные координаты, скорости, ускорения неудобны: они разные для разных точек. Лучше будет ввести **угол поворота**  $\varphi$  – он при твердом стержне для всего тела одинаковый. Угол меряется в радианах, то есть просто в единицах (безразмерный).

Вместо скорости тогда вводим **угловую скорость**  $\omega = d\varphi/dt$  (размерность  $1/c$ ). Она показывает быстроту вращения тела. Дальше по аналогии **угловое ускорение**  $\varepsilon = d\omega/dt$  – это скорость изменения угловой скорости ( $1/c^2$ ). Угловые кинематические величины для твердого тела просто связаны с линейными. Малое перемещение точки на радиусе  $R$  от оси вращения равно  $\Delta x = R\Delta\varphi$ . Отсюда  $v = \Delta x/\Delta t = R\Delta\varphi/\Delta t = R\omega$ . Аналогично линейное ускорение (тангенциальное)  $a = R d\omega/dt = R\varepsilon$ .

Используем эти выводы, выразив линейные ускорения через угловые. Получаем

$$a_1 = \varepsilon L_1, \quad a_2 = \varepsilon L_2.$$

Теперь систему уравнений можно переписать в виде:

$$m_1 L_1 \varepsilon = F - f_1, \quad m_2 L_2 \varepsilon = f_2.$$

Число неизвестных уменьшилось до трех, но двух уравнений все еще недостаточно. Необходимое третье уравнение уже нельзя извлечь из кинематики. Теперь, видимо, нужно искать связь между силами  $f_1$  и  $f_2$ , которую определяет стержень.

Есть надежда, что внутренние силы  $f_1$  и  $f_2$  можно найти, рассматривая деформацию стержня. Для этого его надо разбить на малые части и рассмотреть их взаимодействие. Такой путь мало вдохновляет. Хорошо бы вообще избавиться от внутренних сил. Вспомним, что в аналогичной ситуации – при описании поступательного движения центра масс системы – внутренние силы выпадают.

Для исключения внутренних сил используем энергетический подход. Силы, приложенные к концам стержня со стороны тел  $m_1$  и  $m_2$ , согласно третьему закону Ньютона равны по величине и направлены противоположно силам  $f_1$  и  $f_2$ . По отношению к стержню эти силы – внешние. Подсчитаем их работу при повороте стержня на малый угол  $\Delta\varphi$  по часовой стрелке:

$$\Delta A = f_1 L_1 \Delta\varphi - f_2 L_2 \Delta\varphi.$$

Заметим, что сила, действующая на стержень со стороны оси, не совершает работу, так как здесь нет перемещения. Работа  $\Delta A$  должна равняться изменению кинетической энергии стержня. Но для невесомого стержня масса, а с ней и кинетическая энергия, равны нулю. Тогда получаем:

$$\Delta\varphi(f_1L_1 - f_2L_2) = 0 \quad \text{или} \quad f_1L_1 = f_2L_2 .$$

Это и есть недостающее уравнение, замыкающее систему.

Выпишем все уравнения системы по порядку:

$$\begin{aligned} m_1L_1\varepsilon &= f_2 , \\ m_2L_2\varepsilon &= F - f_1 , \\ f_1L_1 &= f_2L_2 . \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на  $L_1$ , второе – на  $L_2$  и сложим почленно. Получим:

$$(m_1L_1^2 + m_2L_2^2)\varepsilon = FL_1 .$$

Отсюда сразу находится угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{FL_1}{m_1L_1^2 + m_2L_2^2}$$

и, следовательно, полностью описывается движение системы.

Заметим, что энергетический подход, как это часто бывает, не позволяет увидеть многих деталей задачи. В частности, невозможно судить о внутренних силах, не совершающих работы. Полезно рассмотреть систему более детально.

Кажется разумным, что вращение не должно сильно зависеть от устройства стержня, если он достаточно жесткий. Возьмем **модель** стержня из двух частей (длины их  $L_1$  и  $L_2$ ), которые могут одним концом поворачиваться в шарнире. Другие концы соединены очень жесткой пружиной (рис. 5.3). Силы реакций со стороны масс  $f_1$  и  $f_2$  слегка изгибают конструкцию. Поскольку модель описывает почти недеформируемый стержень, углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\gamma$  малы и на рисунке сильно преувеличены. Вдоль пружины действует сила ее сжатия  $T$ , а вдоль стержней – силы их растяжения  $G_1$  и  $G_2$ . Эти силы действуют именно **вдоль** тел, иначе пружина начнет изгибаться, а легкие стержни начнут вращаться слишком быстро.

Выделим малые участки стержней вблизи прикрепленных тел и запишем для каждого участка (с нулевой массой) второй закон Ньютона. Проектируя на перпендикуляр к пружине, получаем

$$G_1\alpha_1 - f_1 = 0 , \quad G_2\alpha_2 - f_2 = 0 .$$

Считаем синус равным углу, а косинус – единице, так как для почти недеформируемого стержня углы малы. Видно, что силы  $G_{1,2}$  в стержне гораздо больше приложенных изгибающих сил  $f_{1,2}$ . (Известно, что изогнуть и сломать линейку гораздо легче, чем разорвать ее).

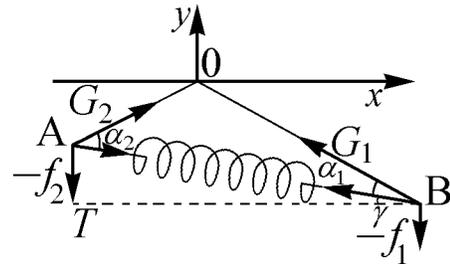


Рис. 5.3.

Тогда, проектируя силы на направление пружины, можно вообще пренебречь проекциями  $f_{1,2}$ , так что внутренние силы  $G_{1,2} = T$ : силы растяжения плеч практически равны силе сжатия пружины. Отсюда

$$f_1 = T\alpha_1, \quad f_2 = T\alpha_2.$$

Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  связаны с длинами сторон треугольника теоремой синусов:  $\alpha_1/L_2 = \alpha_2/L_1$ , откуда имеем уже полученное выше соотношение

$$f_1L_1 = f_2L_2.$$

Разумно ожидать, что и более рафинированные модели жесткого стержня дадут тот же результат. Как всегда, энергетический подход более общий и простой, но зато менее информативный. Из него так и осталось бы неизвестным существование огромных сил, деформирующих стержень.

Вернемся к рассмотренной задаче. Что изменится в решении, если сила  $F$  будет направлена не перпендикулярно стержню, а под некоторым углом  $\alpha$ ? Разложим вектор  $\mathbf{F}$  на проекции:  $F_{\parallel}$  – параллельную и  $F_{\perp}$  – перпендикулярную стержню. Легко понять, что вместо  $FL_1$  в уравнениях везде должно стоять  $F_{\perp}L_1$ . Продольная составляющая попросту не крутит.

Произведение перпендикулярной составляющей силы на расстояние от оси вращения  $M = F_{\perp}r$  называется **моментом силы**. Его можно выразить также через величины векторов и угол между ними:  $M = Fr \sin \alpha$ . С тем же успехом можно написать  $M = F \cdot r_{\perp}$ . Проекция  $r_{\perp}$  радиуса на перпендикуляр к линии действия силы называется **плечом** силы (рис. 5.4). Если плечо равно нулю, сила ничего вращать не сможет.

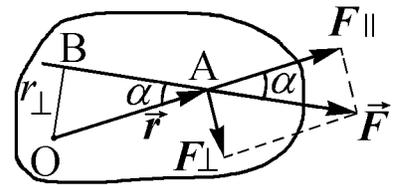


Рис. 5.4.

Если действуют несколько сил  $\mathbf{F}_i$ , приложенных в различных точках  $\mathbf{r}_i$ , и тело состоит не из двух, а из любого количества масс  $m_j$  на расстояниях  $L_j$  от оси вращения, то уравнение, описывающее динамику вращения системы, запишется в виде:

$$I\varepsilon = M,$$

где  $I = \sum m_j L_j^2$  – **момент инерции** тела,  $M = \sum M_i = \sum F_i r_{i\perp}$  – суммарный момент сил. Момент инерции считается по всем массам, входящим в тело, а в моменте сил учитываются только внешние силы (подробнее об этом см. п. 5.3). Отдельные моменты сил могут быть разных знаков (надо следить, в какую сторону они крутят). Условно можно принять положительным направление против часовой стрелки, т.е. в сторону возрастания угла поворота, определенного стандартным образом. Можно и обратное направление назвать положительным, если это кажется удобнее в конкретной задаче.

## 5.2 Теорема Штейнера. Вектор момента сил

Момент инерции тела  $I = \sum m_j L_j^2$  в уравнении динамики вращения аналогичен массе во втором законе Ньютона. Найдем моменты инерции некоторых тел.

1. Момент инерции тонкого обруча массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через центр перпендикулярно его плоскости. При любом разбиении на малые массы  $m_j$ , все они отстоят от оси на одинаковом расстоянии  $R$ . Тогда  $I = \sum m_j R^2 = mR^2$ .
2. Сплошной однородный диск (цилиндр); ось та же. Разобьем диск на соосные кольца толщины  $dr$ . Масса такого кольца радиуса  $r$ :

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr.$$

Здесь  $m/\pi R^2$  – масса единицы площади диска,  $2\pi r dr$  – площадь кольца. Вклад кольца в момент инерции  $dI = r^2 dm = (2m/R^2) \cdot r^3 dr$ . Полный момент находится интегрированием;

$$I = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{mR^2}{2}.$$

Как и следовало ожидать, сплошной диск той же массы закрутить легче, чем тонкий обруч. Еще легче, если вся масса в центре: тогда  $I = 0$ .

3. Стержень длины  $L$ , вращающийся вокруг конца:

$$dI = r^2 dm = \frac{m}{L} r^2 dr, \quad I = \frac{m}{L} \int_0^L r^2 dr = \frac{m}{L} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^L = \frac{mL^2}{3}.$$

Если вращать вокруг центра, надо взять две половинки:

$$I = 2(m/2)(L/2)^2/3 = mL^2/12.$$

4. У шара  $I = 2mR^2/5$ : меньше, чем у цилиндра – масса располагается в среднем ближе к оси. Попробуйте получить  $I$  сферы и шара, используя их симметрию. Рассмотрите для этого (одинаковые) моменты инерции вокруг трех взаимно перпендикулярных осей.

Момент инерции для данного тела зависит от положения оси вращения (пример стержня). Обозначим момент относительно оси, проходящей через центр масс,  $I_0$ . Если закрутить тело относительно оси, сдвинутой на вектор  $\mathbf{b}$  относительно центра масс, то  $I$  изменится:

$$I = \sum m(\mathbf{r}')^2 = \sum m(\mathbf{b} + \mathbf{r})^2 = \sum mr^2 + b^2 \sum m + 2\left(\mathbf{b} \sum m\mathbf{r}\right).$$

Здесь  $\mathbf{r}'$  – новый радиус-вектор  $\mathbf{b} + \mathbf{r}$  к некоторой массе  $m$ ;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор к той же массе из центра масс. В третьем слагаемом сумма нулевая – она пропорциональна положению центра масс, отмеренному от самого этого центра. Получаем

$$I = I_0 + mb^2 .$$

Это и есть **теорема Штейнера**. Проверяем для стержня:  $mL^2/3 = mL^2/12 + m(L/2)^2$ . У сплошного диска для оси, проходящей через край, будет  $3mR^2/2$ .

Аналогия уравнений для вращательного и поступательного движений пока неполна. Второй закон Ньютона связывает векторные величины  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{F}$ . Не нужны ли вектора при вращении?

Сначала припишем направление кинематическим величинам. Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение обязательно связаны с осью вращения. Вдоль этой оси и определяется направление вектора угла поворота.

*В плоскости вращения бессмысленно и пытаться найти направление поворота (хотя свежий человек именно пытается, заявляя, что угловая скорость направлена «по линейной»). Но каждая точка при вращении движется в своем направлении. Выделенного направления в плоскости вращения попросту нет.*

Остается еще произвол, какой поворот считать положительным. Принято **правило винта** (буравчика, штопора): поворот направлен туда, куда ввинчивается штопор, если его крутить так же, как вращается тело. Две массы на стержне из п. 5.1 (рис. 5.1) имеют  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , направленные вниз перпендикулярно листу бумаги, что обозначается крестиком в круге  $\oplus$  (оперение стрелы, наблюдаемой сзади). Обратное направление обозначают точкой в круге  $\ominus$  (наконечник стрелы).

Теперь надо направить куда следует (вдоль той же оси) момент сил. Направления двух моментов показаны на рисунке 5.5. Точка  $O$  – ось вращения. Заметим, что вектор  $\mathbf{M}$  получается из двух векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ . В математике для этого случая придумано **векторное произведение** векторов. Для двух векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$  векторное произведение  $[\mathbf{r} \times \mathbf{F}]$  – это вектор, по величине равный  $rF \sin \alpha$  и направленный перпендикулярно плоскости, в которой лежат исходные вектора, вдобавок по правилу винта, вращаемого от  $\mathbf{r}$  к  $\mathbf{F}$  по кратчайшему пути. Тогда короче момент сил запишется как

$$M = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] .$$

Заметим, что менять порядок сомножителей в векторном произведении нельзя – оно изменит знак.

Существует и вращательный аналог импульса. **Моментом импульса** массы  $m$  на радиусе  $\mathbf{r}$  называется вектор

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] .$$

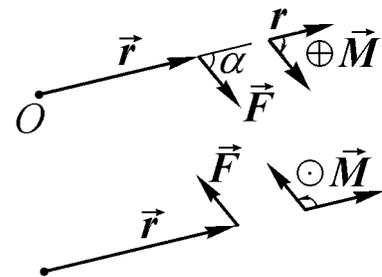


Рис. 5.5.

По величине он равен (импульс·плечо). Найдем скорость изменения  $\mathbf{L}$ :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}] + [\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] + [\mathbf{v} \times \mathbf{p}].$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p}$  параллельны ( $\sin \alpha = 0$ ). Поэтому, в точном соответствии с законом изменения импульса, скорость изменения  $\mathbf{L}$  равна моменту сил:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] = \mathbf{M}.$$

Полезно от векторного произведения уже видна: попробуйте получить последнее уравнение «скалярным» способом. Формальная запись сильно упрощает выкладки, позволяя забыть о синусах и использовать все свойства обычного числового произведения (кроме перестановочности). Для системы  $\mathbf{L}$  – сумма  $\sum[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$  по всем телам системы, а  $\mathbf{M}$  будет суммарным моментом внешних сил (почему именно внешних – см. следующий параграф).

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (для определенности – оси  $z$ ) с угловой скоростью  $\omega$ , момент импульса

$$\mathbf{L} = \sum m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \sum m[(\mathbf{r}_\perp + z) \times \mathbf{v}] = \sum m[\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v}] + \sum m[z \times \mathbf{v}].$$

Здесь  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, отмеряемый от какой-либо заданной заранее точки на оси вращения до элемента массы  $m$ ,  $\mathbf{v}$  – скорость этого элемента,  $z$  и  $\mathbf{r}_\perp$  – составляющие  $\mathbf{r}$  вдоль оси вращения и перпендикулярно ей. Учитывая, что скорость  $\mathbf{v}$  равна по величине  $\omega r_\perp$  и перпендикулярна  $\mathbf{r}_\perp$ , можно первую сумму в правой части записать в виде  $(\sum m r_\perp^2) \cdot \omega \equiv I\omega$ , где  $I$  есть момент инерции относительно выбранной оси. Вторая же сумма может быть записана как  $\omega \sum m z r_\perp$ . Получаем

$$\mathbf{L} = I\omega + \omega \sum m z r_\perp,$$

то есть в общем случае момент импульса вращающегося тела не параллелен вектору угловой скорости, а имеет также и перпендикулярную составляющую.

Однако в ряде практически важных случаев это «поперечное» слагаемое обращается в нуль. Например, так бывает при достаточной степени симметрии тела. Если цилиндр вращается вокруг продольной оси, то в каждой плоскости  $z = \text{const}$  для любой массы  $m$  в положении  $\mathbf{r}_\perp$  имеется такая же масса в положении  $(-\mathbf{r}_\perp)$ . Такими ситуациями мы в основном и ограничимся. При этом связь  $\mathbf{L}$  и  $\omega$  наиболее проста:

$$\mathbf{L} = I\omega$$

и аналогична связи  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  при поступательном движении.

Примером непараллельности  $\mathbf{L}$  и  $\omega$  является вращение стержня, отклоненного от оси (так что стержень описывает коническую поверхность). На рис. 5.6 стрелками показаны моменты импульса верхней и нижней половин. Видно, что перпендикулярная оси

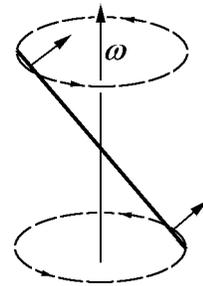


Рис. 5.6.

вращения составляющая момента импульса поворачивается вместе с движением тела, то есть не является константой. Для изменения  $\mathbf{L}$  необходим момент силы. Поэтому при таком вращении стержень «сопротивляется», пытаясь вывернуться из креплений. При строго вертикальном либо строго горизонтальном положении стержня направления  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  совпадают, и тогда вокруг центра масс он может вращаться даже без всяких креплений, по инерции.

Кинетическая энергия вращения твердого тела

$$K = \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{mr_{\perp}^2 \omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}.$$

Опять видим аналогию между поступательным и вращательным движением.

### 5.3 Сохранение момента импульса

Подобно импульсу, момент импульса физической системы при определенных условиях сохраняется. Вначале разберем подробнее вопрос о внутренних силах (мы помним, что в случае импульса они выпали «в силу» третьего закона Ньютона).

Почему внутренние силы не меняют **момента** импульса? Для случая сил, возникающих при соприкосновении тел, это очевидно – они равны по величине и противоположны по направлению, вектор  $\mathbf{r}$ , проведенный в точку касания, для них один, и их моменты уничтожаются автоматически, при любых направлениях сил.

Но то же верно для **центральных** сил, действующих на расстоянии по линии, соединяющей тела – как сила тяжести или электрическая. Хотя радиус-векторы и будут отличаться, но плечи  $r_{\perp}$  взаимных внутренних сил будут одинаковы (рис. 5.7, изображен случай отталкивания).

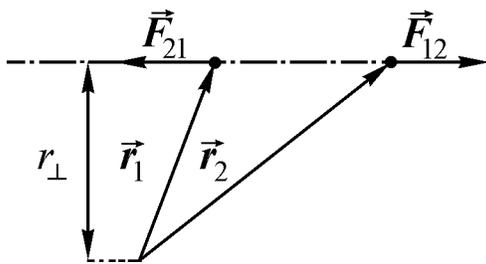


Рис. 5.7.

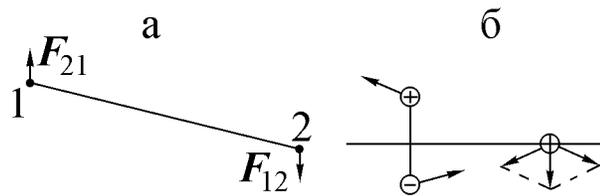


Рис. 5.8.

Ничто не мешает вообразить два тела, взаимодействующих нецентрально. Тогда сумма моментов внутренних сил ненулевая, и тела закрутятся вокруг общего центра масс (рис. 5.8а). К счастью, в природе пока не найдено такого взаимодействия двух неподвижных отдельно взятых частиц **без внутренней структуры**.

Для частиц со структурой пример построить легко – заряд возле диполя (рис. 5.8б). Диполь – это пара зарядов противоположного знака. Видно, что сумма сил, действующ-

щих на заряд со стороны зарядов диполя, при некоторых положениях поперечна линии, соединяющей центр диполя и заряд. Заряд пойдет вниз, а диполь как целое – вверх.

Появится момент импульса, направленный «крестиком» (вращение по часовой стрелке). Но диполь завертится вокруг своего центра в обратную сторону ( $\odot$ ) и как раз скомпенсирует  $\oplus$  – вращение (что и понятно: силы между зарядами центральные).

Два **движущихся** точечных заряда имеют нецентральную магнитную составляющую силы взаимодействия. В этом случае механический момент импульса может меняться (это же относится и к механическому импульсу). Но оказывается, что если учесть момент импульса электромагнитного поля, в сумме будет сохранение. Механическая часть системы «отталкивается» от электромагнитного поля. Это похоже на вращение сегнера колеса – при начальном нулевом моменте импульса колесо начинает вращаться в одну сторону, а вытекающая вода – в другую. Мы пока не умеем учитывать поле. Здесь, как и в случае с тепловой энергией, надо выйти за рамки механики.

Таким образом, **механические** импульс и момент сохраняются лишь приближенно. Но это приближение очень хорошее, пока скорости малы (по сравнению со скоростью света). Поэтому примем, как опытный факт, к тому же подтверждаемый в простых примерах расчетом, что внутренние силы не изменяют момента импульса или, другими словами, не могут вызвать вращения системы в целом:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{\text{внеш}} .$$

Тогда для замкнутой системы сразу получаем **закон сохранения момента импульса**. Для изолированной системы момент внешних сил  $\mathbf{M} = 0$ ,  $d\mathbf{L}/dt = 0$ , то есть

$$\mathbf{L}(t_2) = \mathbf{L}(t_1) .$$

Момент импульса оказывается постоянным (сохраняется).

Уже неоднократно подчеркивалась аналогия между описаниями поступательного движения материальной точки и вращения твердого тела. Для описания этих движений используются уравнения одинакового вида, лишь для различных переменных.

Заметим (и тут аналогии с поступательным движением уже не будет), что для сохранения момента импульса не обязательна замкнутость системы. Должна равняться нулю сумма моментов внешних сил. При этом сами силы могут присутствовать, имея отличную от нуля результирующую. Этот важный случай подробно рассматривается в следующей главе.

Кроме того, для угловых координат не имеет большого смысла понятие, соответствующее центру масс. Космонавт, находясь в пустоте недалеко от своего корабля, не может вернуться на него, переместив свой центр масс без «посторонней» помощи – двигателя или каната. Но космонавт **может** изменить пространственную ориентацию, например, повернуться «вниз головой» по отношению к первоначальному положению. Для этого он должен привести во вращение руки; в силу сохранения момента импульса

тело начнет вращаться в обратную сторону. Прекратив вращение рук, можно остановиться в желаемом положении. Именно таким образом кошки ухитряются приземлиться на лапы почти из любого положения, падая без всякой опоры. Разница связана с тем, что угловая координата – периодическая. Как и в поступательном случае, можно записать

$$I_{\text{тела}} \cdot \varphi_{\text{тела}} + I_{\text{рук}} \cdot \varphi_{\text{рук}} = 0.$$

Поворот тела на угол  $\pi$  получится при повороте рук, скажем, на  $11\pi$ , так что суммарный сдвиг «углового центра масс» нулевой. Но угол  $11\pi$  – это 5 полных оборотов и еще половинка. По отношению к телу как сначала были руки по швам, так и получится после вращения. При поступательном движении такое было бы возможно в мире, где предметы, отодвинутые космонавтом на метр вправо, исчезают и возникают в метре слева.

Рассмотрим примеры, связанные с сохранением момента импульса.

1. Тело  $m$  вращается на нити. Нить втягивается через малое отверстие в центре вращения. На тело действует единственная сила – натяжение нити  $T$ , и ее момент относительно центра нулевой. Поэтому сохраняется момент импульса  $L = mv_{\perp}R = mR^2\omega$ . Скорость и угловая скорость с укорачиванием нити возрастают. Энергия тоже растет. При медленном укорачивании нити работа втягивающей силы

$$\Delta A = -T\Delta R = -\frac{mv^2}{R}\Delta R = \frac{m}{2}((v + \Delta v)^2 - v^2) = mv\Delta v.$$

Получаем

$$\Delta v/v + \Delta R/R = 0, \quad \text{или } dv/v + dR/R = 0, \quad \text{или } Rdv + vdR = 0.$$

Последнее равенство – это изменение произведения  $Rv$  (поделим на  $dt$  и вспомним формулу производной произведения). Мы независимо получили, что в этом процессе сохраняется момент импульса. С уменьшением момента инерции тела его угловая скорость будет возрастать, что часто демонстрируется в фигурном катании. При этом кинетическая энергия растет, и нужно произвести работу (здесь как раз полезна форма  $K = L^2/2I$ ).

2. Нецентральное столкновение шаров. Пусть шар  $m$  со скоростью  $V$  налетает на такой же шар максимально нецентралью и прилипает. Скорость центра масс будет  $V/2$  из сохранения импульса. Считаем начальный момент импульса из центра масс:  $L = mVR$ . После слипания шары вращаются вокруг центра и тот же  $L$  можно записать как  $I\omega = 2 \cdot (7/5) \cdot mR^2\omega$ , откуда угловая скорость  $\omega = 5V/14R$ . Кинетическая энергия центра масс  $2m(V/2)^2/2 = (1/2) \cdot mV^2/2$ . Энергия вращения  $I\omega^2/2 = (5/14) \cdot mV^2/2$ . Остаток  $(1/7) \cdot mV^2/2$  пойдет в тепло – гораздо меньше, чем при лобовом соударении.

Вообще, если тело одновременно вращается и движется поступательно, его кинетическая энергия распадается на поступательную и вращательную части:

$$K = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где  $I$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Вращательная часть – частный случай внутренней кинетической энергии.

Момент импульса может зависеть от выбора начала координат, что особенно ясно для одной частицы. Рассмотрим сдвиг системы координат на вектор  $\mathbf{b}$ . Новый момент

$$\mathbf{L}' = \sum [\mathbf{r}' \times \mathbf{p}] = \sum [(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \times \mathbf{p}] = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{b} \sum \mathbf{p}].$$

Первое слагаемое – это старый момент импульса. Видим, что  $\mathbf{L}$  не зависит от сдвига начала координат, если суммарный импульс равен нулю (т.е. в системе центра масс). Аналогично момент импульса, взятый из центра масс, не зависит от системы отсчета.

## 5.4 Статика

Часто необходимо определить условия, при которых тела **не** двигаются. Например, это очень важно для зданий, мостов и подобных сооружений. Сюда же примыкают и вопросы прочности. Мы будем рассматривать **статику** – раздел механики, посвященный изучению условий равновесия тел под действием сил – как частный случай динамики. Чтобы тело находилось в покое, должны выполняться очевидные условия:

$$\sum \mathbf{F}_j = 0, \quad \sum M_j = 0.$$

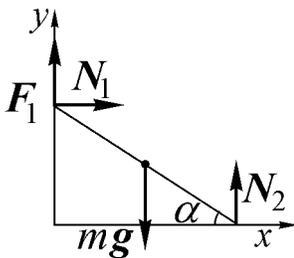


Рис. 5.9.

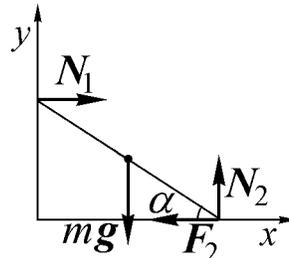


Рис. 5.10.

Рассмотрим примеры.

1. Попробуем поставить однородный стержень длины  $L$  в угол комнаты. Пусть стержень составляет угол  $\alpha$  с горизонтом и пол гладкий, то есть трения между стержнем и полом нет (рис. 5.9). Возможно ли равновесие? На рисунке изображены силы, которые должны действовать на стержень со стороны Земли ( $mg$ ), стенки ( $N_1$  и  $F_1$ ) и пола ( $N_2$ ). Очевидно, что на ось  $x$  имеет отличную от нуля

проекцию только сила  $N_1$ . Тогда первое условие равновесия выполняется лишь при  $N_1 = 0$ . Следовательно, сила трения  $F_1$  также равна нулю, а  $N_2 = mg$ . Но тогда второе условие равновесия – равенство нулю суммы моментов сил – не выполняется. Выбрав ось вращения, например, проходящей через центр стержня, получим для момента силы  $N_2$   $M = mgL \cos \alpha/2 \neq 0$ . Значит, такое равновесие невозможно. Стержень непременно упадет на пол.

2. Пусть между стержнем и полом есть трение, а стена гладкая. Возможно ли равновесие теперь? Силы, действующие в этом случае, изображены на рисунке 5.10. Условие сил в проекциях на оси  $x$  и  $y$  дает:

$$N_2 - mg = 0, \quad N_1 - F_2 = 0.$$

Выберем ось вращения проходящей через нижнюю точку стержня и запишем условие равенства нулю суммы моментов сил:

$$N_1 L \sin \alpha - mg \frac{L}{2} \cos \alpha = 0.$$

Из этих уравнений сразу получаются выражения для всех трех неизвестных сил:

$$N_1 = F_2 = \frac{mg}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad N_2 = mg.$$

Видно, что по этим формулам при малых углах сила трения неограниченно растёт. Однако сила трения не может превышать предельного значения  $F_2 \leq \mu N_2 = \mu mg$ . Значит, полученные значения  $N_1, F_2$  могут выполняться лишь при углах не меньше некоторого критического  $\alpha_*$ . Значение критического угла соответствует случаю, когда сила трения покоя максимальна:  $F_2 = \mu N_2$ , или  $mg/2 \operatorname{tg} \alpha_* = \mu mg$ , откуда для критического угла получается соотношение:  $\operatorname{tg} \alpha_* = 1/2\mu$ . Равновесие возможно лишь при углах больше критического.

Если ставить стержень с меньшим углом (более горизонтально), то формально равновесие возможно только при  $F_2 > \mu mg$ . Этого можно добиться, только удерживая стержень в нижней точке дополнительной внешней силой. Одно же трение будет неспособно обеспечить устойчивость, и стержень упадет.

Для записи равенства нулю полного момента сил можно было выбрать и любую другую ось. Так, для оси, проходящей через угловую точку  $O$ , получим:  $N_1 L \sin \alpha - N_2 L \cos \alpha + mgL \cos \alpha/2 = 0$ . Убедитесь, что ответ при этом не изменится.

Вообще, если известен момент сил  $\mathbf{M}$  относительно некоторой оси, момент  $\mathbf{M}'$  относительно новой оси, сдвинутой параллельно относительно первой на вектор  $\mathbf{b}$ , легко найти:

$$\mathbf{M}' = \sum [\mathbf{r}' \times \mathbf{F}] = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] + \sum [\mathbf{b} \times \mathbf{F}] = \mathbf{M} + [\mathbf{b} \times (\sum \mathbf{F})].$$

Но в статике  $\sum \mathbf{F} = 0$ , и второе слагаемое обращается в нуль. Момент оказывается инвариантным! Если тело не вращается, то оно не вращается относительно любой неподвижной оси. В силу этого разумно выбирать ось так, чтобы уравнение моментов было максимально простым. В последнем примере, выбрав ось, проходящую через нижнюю точку опоры, мы автоматически обратили моменты двух из четырех сил в нуль, так как плечи сил  $N_2$  и  $F_2$  равны нулю.

Объединим две предыдущих задачи. Пусть коэффициент трения между стержнем и стеной равен  $\mu_1$ , а между стержнем и полом  $\mu_2$ . Найдем сначала критический угол  $\alpha_*$ . Выберем ось вращения, проходящую через нижнюю точку стержня. Условия равновесия дают первые три уравнения, а условия проскальзывания – остальные два:

$$\begin{aligned} N_1 - F_2 &= 0, & N_2 - mg + F_1 &= 0, \\ N_1 L \sin \alpha_* + F_1 L \cos \alpha_* - \frac{mgL \cos \alpha_*}{2} &= 0, \\ F_1 &= \mu_1 N_1, & F_2 &= \mu_2 N_2. \end{aligned}$$

Решая систему из пяти уравнений, получаем критический угол:

$$\operatorname{tg} \alpha_* = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2\mu_2}.$$

При меньших углах стержень упадет. Из ответа при  $\mu_1 \mu_2 > 1$  получается (бесмысленный) отрицательный угол; это означает, что при больших коэффициентах трения проскальзывание невозможно.

Пусть теперь заранее известно, что угол больше критического и стержень заведомо находится в равновесии. Попробуем определить все силы, на него действующие. Из пяти уравнений, написанных выше, остаются в силе лишь первые три. Два последних нужно заменить на неравенства:  $F_1 < \mu_1 N_1$ ,  $F_2 < \mu_2 N_2$ .

Трех уравнений для определения четырех неизвестных недостаточно. Это не случайность. Опыт показывает, что в этом случае появляется неоднозначность: возможно равновесие при **различных** значениях сил трения и реакции. В каждом конкретном случае силы определяются соотношениями между малыми деформациями стержня, стены и пола. Если поднять стержень и поставить его снова под тем же углом, величины сил не воспроизведутся. Достаточно чуть сильнее нажать на стержень при установке, и деформации увеличатся (оставаясь малыми), следовательно, увеличатся силы. Более наглядно эта же неоднозначность проявляется при установке стержня в острый угол или в зазор между параллельными стенками.

Этот дефект имеют большинство задач статики – не решаются школьными методами. Такие задачи, не совсем точно, называют **статически неопределенными**.

Пример – задача, некогда примененная на вступительных экзаменах в НГУ. Жесткий стержень (рельс) висит на четырех канатах (рис. 5.11). Казалось бы, все просто:

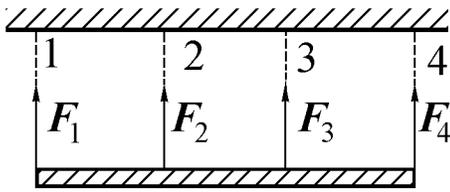


Рис. 5.11.

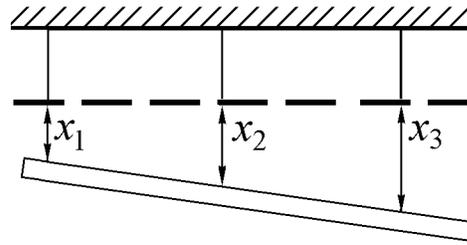


Рис. 5.12.

натяжения канатов все равны  $mg/4$ . Но попробуем перерезать один из крайних канатов, конкретно правый. Для трех неизвестных  $F_{1,2,3}$  имеем два уравнения:

$$F_1 + F_2 + F_3 = mg ,$$

$$\frac{F_1 L}{2} + \frac{F_2 L}{6} - \frac{F_3 L}{6} = 0 .$$

Уравнение моментов записано из центра. Система имеет бесконечно много решений. Смысл неоднозначности – в том, что веревки можно регулировать. Например, подвесить стержень только на средних веревках, отпустив левую. Или на левой и правой. Отсюда ясно, что нужна еще деформация веревок и их точные длины в нерастянутом состоянии. Обычно принимают закон Гука: сила пропорциональна растяжению. Предположим, что длины нерастянутых веревок **точно** равны, и при горизонтальном стержне все силы одинаковы. Это не будет равновесие – второе уравнение не выполнится. Стержень чуть перекоится правым концом вниз. Тогда, считая его недеформируемым, имеем из геометрических соображений (рис. 5.12)

$$F_3 - F_2 = F_2 - F_1$$

(такое же уравнение, как для длин растянутых стержней). Теперь уравнений хватает, и легко найти решение:

$$F_1 = \frac{mg}{12} , \quad F_2 = \frac{4mg}{12} , \quad F_3 = \frac{7mg}{12} .$$

На  $F_3$  приходится больше половины веса. Если обрезать еще левую веревку, то получится статически определенная задача. Тогда из симметрии  $F_3 = F_2 = mg/2$ , то есть угроза разрыва веревки 3 и падения всего рельса, как ни странно, уменьшается!

Во избежание недоразумений заметим, что отнюдь не всегда на практике будет получаться именно такие численные значения. Для этого надо выполнить условие равенства начальных длин и натяжений, что не так просто. Чем больше жесткость нитей, тем точнее надо отмерять их исходную длину, чтобы выполнялись условия задачи. Например, если рельс длиной 10 м (вес 300 кГ = 3000 Н) висит на стальных стержнях сечением по 1 см<sup>2</sup> и длиной (начальной) 1 м, то эта длина растянется на  $\approx 0,01$  см – толщину бритвенного лезвия. Если подвеска контролируется с меньшей точностью, то

результаты будут другие. Но неравномерность нагрузки – это общее свойство системы. Когда левая веревка длиннее других (провисает), то две средних растянуты одинаково, каждая сила равна половине веса. Но если подтянуть левую веревку, неизбежно возрастет нагрузка на правую, чтобы уравновесить моменты (до  $3mg/4$  в момент провисания средней).

Можно подвешивать рельс на жестких стержнях, которые способны и сжиматься (например, стальных уголках). Тогда сила  $F_1$  может оказаться отрицательной (левый стержень толкает вниз), и раньше других порвется средняя тяга.

В исходном состоянии, если нитей четыре и даже три, то, как правило, их натяжения не равны. С этим и связана «неопределенность». Табуретка на трех ногах статически определена, а не четырех – нет, что часто и наблюдается.

Самое широкое поле для статически неопределенных задач – строительство. Достаточно представить себе фундамент дома, опирающийся местами на мягкую глину, а местами на твердые камни. Это вносит большую неуверенность в расчет здания и вынуждает делать огромные запасы прочности. Например, при равномерной нагрузке давление в фундаменте Новосибирского университета не должно превышать  $\rho gh \approx 3000 \cdot 10 \cdot 20 = 6 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ , то есть примерно 6 кГ/см<sup>2</sup>, или 6 атм. Цемент же распространен марок 300 ÷ 500, то есть куб застывшего бетона должен не ломаться под давлением 300 ÷ 500 кГ/см<sup>2</sup>. Мосты стараются конструировать из жестких треугольных ферм, чтобы сделать конструкцию статически определенной и поддающейся более или менее простому расчету. В обычном школьном курсе о статически неопределенных задачах умалчивается, хотя они практически наиболее распространены. Статически определенные же задачи, наоборот, представляют собой редкий частный случай.