

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ГИДРОДИНАМИКА

Курс лекций для ФМШ

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
КОНВЕКЦИЯ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

А. П. Ершов

15 апреля 2010 г.

Глава 6

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В этой главе рассматривается влияние трения на течения жидкости. Излагается понятие пограничного слоя, позволяющее выяснить природу сопротивления при обтекании тел.

6.1 Сила трения. Течение Пуазейля. Формула Стокса

В отличие от газов, для жидкостей не удастся сколько-нибудь надежно вычислить вязкость. Но существование вязкости и ее важная роль не вызывают сомнений. Поэтому мы займемся механическими проявлениями вязкости, считая ее величину известной из эксперимента.

Полезно ввести вязкость заново модельно-независимым способом. Рассмотрим жидкость, «зажатую» между двумя плоскостями (рисунок 6.1), причем нижняя неподвижна, а верхняя движется со скоростью V . Движение считаем установившимся. При небольших скоростях и достаточно тонком зазоре эксперимент дает линейную связь силы трения, действующей на верхнюю пластину, и скорости V :

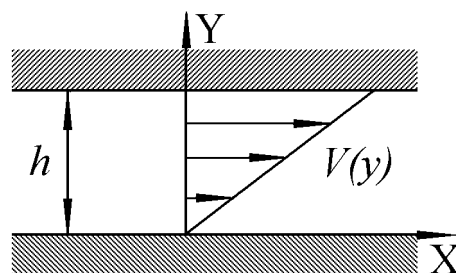


Рис. 6.1.

$$F = \frac{\eta VS}{h}. \quad (6.1)$$

Если при различных значениях V , S , h выполняется закон (6.1) с одним и тем же коэффициентом η , этот коэффициент и будет вязкостью рассматриваемой жидкости.

Такая же сила действует на нижнюю пластину, но в сторону движения. Разумеется, эти силы – не прямое взаимодействие пластин. Из-за малости межмолекулярных расстояний пластины взаимодействуют через последовательные слои жидкости. На любой слой действует пара сил $\pm F$, причем верхняя направлена по течению, а нижняя – против. В результате слой движется без ускорения. Нижние слои толкаются верхними, а самый верхний – движущейся пластиной.

Но величины V и h не имеют смысла для произвольной границы раздела между слоями. Жидкость, кроме верхней и нижней поверхностей, вообще не взаимодействует с пластинами («не знает» об их существовании). Отношение V/h следует заменить на локальную характеристику течения, а именно на производную dV_x/dy , имеющую смысл для любой точки в жидкости. Поэтому закон трения надо записать в виде

$$\frac{F}{S} = \tau = \eta \cdot \frac{dV_x}{dy}. \quad (6.2)$$

В описанном выше простейшем **течении Куэтта** силы, действующие в любой плоскости, одинаковы. Следовательно, производная dV_x/dy не должна зависеть от координаты y . Это выполняется только при линейном распределении x – компоненты скорости жидкости: $V_x = V \cdot y/h$. Видим, что локальный закон трения (6.2) позволил найти скорость течения в любом месте.

Сила на единицу площади τ (размерность как у давления) называется **напряжением трения**. В отличие от силы давления сила трения направлена вдоль поверхности, но определяется по-прежнему условиями на этой поверхности. Коэффициент η называется динамической вязкостью жидкости, ее размерность в системе СИ $\text{Па} \cdot \text{с} = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$, в системе СГС $\text{г}/(\text{см} \cdot \text{с}) = \text{пуаз}$. Часто используется кинематическая вязкость $\nu = \eta/\rho$ размерности $\text{м}^2/\text{с}$ (в СГС $\text{см}^2/\text{с} = \text{стокс}$). В таблице приведена кинематическая вязкость некоторых жидкостей и воздуха при различных температурах в единицах $\text{см}^2/\text{с}$.

температура, °С	0	10	20	40	60	80	100
вода	0,018	0,013	0,01	0,0066	0,005	0,004	0,003
глицерин			6,80				
ртуть	0,0013						0,001
воздух(1 атм)			0,15				0,25

При 20 °С динамическая вязкость воды $\eta = \rho \cdot \nu = 10^3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Если пластины имеют площадь 1 м², расстояние между ними 1 мм, скорость верхней пластины 1 м/с, то сила трения равна 1 Н $\approx 100 \text{ Г}$, если в зазоре находится вода, и около 10⁻² Н для воздуха.

Если вначале жидкость была неподвижной, а затем внезапно привести одну из пластин в движение, течение уже не будет стационарным. Вначале двинется слой, прилегающий к пластине, затем следующий, и т.д. Оценим время, за которое придет в движение слой толщины δ . Вязкая сила придает слою скорость порядка V :

$$\frac{\eta V S}{\delta} \cdot t \cong \rho \delta S V \quad \Rightarrow \quad \delta \cong \sqrt{\frac{\eta t}{\rho}} = \sqrt{\nu t}.$$

Можно сказать, что происходит «диффузия скорости» в неподвижную исходно жидкость (эта аналогия уже отмечалась в п. 5.2). Течение Куэтта установится, когда δ

возрастет примерно до h , т.е. через время порядка h^2/ν . Для рассмотренного выше примера время установления составит около 1 с.

Рассмотрим более сложное течение Пуазейля (1799–1869) в трубе (рис. 6.2). На участке трубы длиной L имеется перепад давления ΔP , который и вызывает течение.

Профиль скорости, очевидно, симметричен относительно оси, где скорость максимальна. Выделим в жидкости цилиндр радиуса y . Его толкает вперед сила давления $\Delta P \cdot \pi y^2$ и тормозит сила трения $-L \cdot 2\pi y \eta \cdot dV/dy$.

В стационарном течении эти силы равны:

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{\Delta P}{2L\eta} \cdot y, \quad \text{откуда} \quad V = V_0 - \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot y^2.$$

При $y = R$ (на стенках) скорость обращается в нуль, так что

$$V_0 = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot R^2, \quad V = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot (R^2 - y^2). \quad (6.3)$$

Отметим, что невязкая жидкость текла бы без градиента давления и могла бы иметь любое распределение скоростей поперек течения.

Расход жидкости

$$Q = \int_0^R V \cdot 2\pi y \cdot dy = \frac{\pi \Delta P R^4}{8\eta L}. \quad (6.4)$$

Средняя скорость $Q/\pi R^2$ равна половине максимальной и пропорциональна градиенту давления. Через капилляр радиуса 1 мм, длиной 1 м, при перепаде давления 0,1 атм = 1 м водяного столба вода потечет со скоростью 1,25 м/с, при расходе 4 см³/с. Течение Пуазейля (опубликовано в 1840 г.) удобно для измерения вязкости по формуле (6.4).

Другая важная формула – для силы сопротивления, действующей на шар в вязкой жидкости – получена Стоксом (1819–1903) в 1851 г. Мы ограничимся оценкой по порядку величины. Если шар радиуса R обтекается жидкостью, имеющей скорость V на бесконечности, то вблизи поверхности шара естественно ожидать, что производная скорости $dV/dr \approx V/R$. Напряжение трения τ будет иметь порядок $\eta V/R$, а сила трения получается умножением τ на площадь поверхности шара: $F \approx 4\pi\eta VR$. Удивительно, но это – точная формула для силы, возникающей из-за напряжений трения на поверхности. Кроме того, вязкость приводит и к разнице давлений на передней и задней сторонах шара. Оказывается, что давление вносит вдвое меньший вклад в сопротивление и окончательно сила имеет вид:

$$F = 6\pi\eta VR. \quad (6.5)$$

Сопротивление опять пропорционально скорости.

Какова применимость полученных формул? Формула Стокса не из тех, которые выполняются всегда и везде. Попробуйте бросить металлический шарик в воду и сравните наблюдаемую скорость с вычисленной. Совпадения не получится. Скорее можно

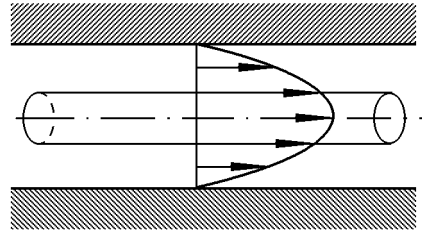


Рис. 6.2.

сказать, что с некоторым трудом для очень вязких жидкостей можно получить подтверждение закона Стокса. Формула Пуазейля выполняется «легче». Но все же, если увеличить в нашем примере радиус трубки до 1 см, мы не получим скорости 125 м/с.

6.2 Число Рейнольдса. Парадокс Даламбера

Какую вязкость надо считать достаточно большой для выполнения закона Стокса? Сила трения должна быть основной силой в течении и превышать гидродинамический напор, который имеет порядок ρV^2 . Отношение гидродинамического напора к вязкому напряжению

$$\frac{\rho V^2 L}{\eta V} = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V \cdot L}{\nu} \equiv \text{Re} \quad (6.6)$$

называется **числом Рейнольдса** (1842–1912). Большой следует считать вязкость, при которой $\text{Re} \ll 1$. Если же Re велико, вязкие силы несущественны, т.е. вязкость мала. Размер L , входящий в число Рейнольдса, характерен для течения (диаметр шара, трубы, длина крыла и т.д.).

Сделаем несколько оценок. Если человек гуляет при отсутствии ветра со скоростью 1,5 м/с, то число Рейнольдса $150 \cdot 50 / 0,15 = 5 \cdot 10^4$. Поперечный размер, существенный для обтекания, принят равным 50 см. Капля дождя, падающая со скоростью 10 м/с, имеет $\text{Re} = 2 \cdot 10^3$; струя воды, медленно вытекающая из крана, – около 10^3 ; число Рейнольдса аквариумных рыб равно $10^3 - 10^4$.

Даже небольшие тела, обтекаемые с малой скоростью, имеют очень большие числа Рейнольдса, не говоря уже о кораблях и самолетах. Вязкие силы почти всегда должны быть пренебрежимо малы. Казалось бы, отсюда прямо следует пригодность почти на все случаи жизни модели идеальной жидкости. Но реальность оказывается сложнее, что хорошо видно на задаче о сопротивлении тел. На первый взгляд, следует ожидать, что сила сопротивления в потоке идеальной жидкости будет порядка $\rho V^2 S / 2$ – произведения динамического напора на площадь поперечного сечения. Рассмотрим, однако, шар, обтекаемый идеальной жидкостью.

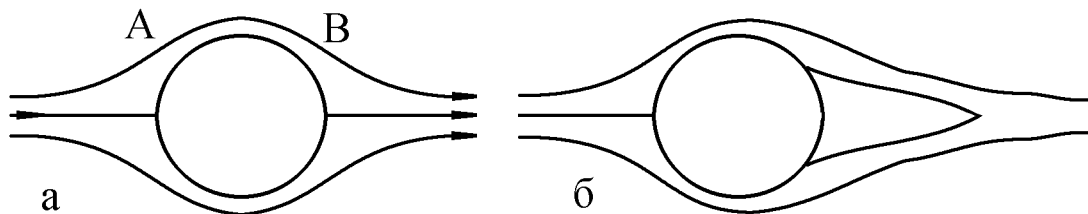


Рис. 6.3.

Из симметричной картины линий тока на рисунке 6.3,а видно, что в точках А и В скорости одинаковы и, следовательно, одинаковы давления (закон Бернулли). Но тогда на шар в идеальной жидкости поток не действует. Сила сопротивления равна

нулю! Этот вывод – **парадокс Даламбера** (1717–1783) – справедлив для тела любой формы. При движении тела с постоянной скоростью энергия течения не меняется, так что работа силы сопротивления FVt равна нулю и $F = 0$.

Более точным будет утверждение, что идеальная жидкость **может** обтекать тело без сопротивления. Это не значит, однако, что она **обязана** так течь и что в идеальной жидкости сопротивление непременно равно нулю. Например, жидкость может отрываться на задней кромке тела, образуя полость (кавитационное обтекание, рисунок 6.3,б). Тогда не будет симметрии в распределении давления, поскольку сзади жидкость не тормозится, и появится значительное сопротивление¹.

Вопрос в том, какая картина обтекания соответствует реальности. Оказывается, что вовсе не редкость обтекание, близкое к «далаंबरскому» и соответствующее практически полной компенсации гидродинамических напоров. Именно поэтому парадокс Даламбера и заслуживает внимания.

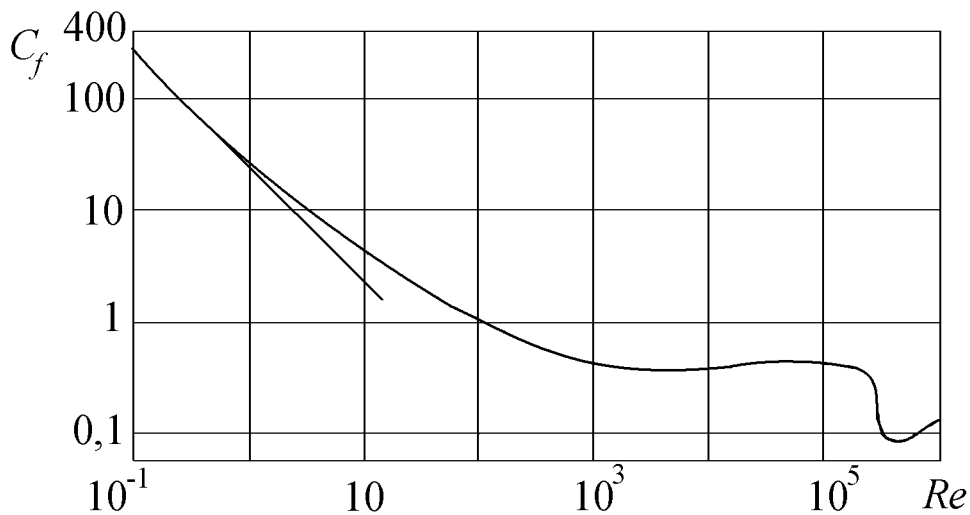


Рис. 6.4.

Если число Рейнольдса для реальной жидкости велико, т.е. вязкость исчезающе мала, то должна быть малой (скажем, порядка стоксовой) сила сопротивления. Это совершенно не согласуется с практикой. Сопротивление гораздо больше, меняется и картина течения. От ветра можно спрятаться за углом здания. Но идеальная жидкость обязана обтекать препятствие, и за углом скорость ветра должна увеличиться!

На рисунке 6.4 приведен экспериментальный график сопротивления шаров в зависимости от числа Рейнольдса, вычисленного по диаметру шара. По вертикальной оси

¹Кроме того, в рамках модели идеальной жидкости сила сопротивления появится при ускоренном движении тела; она равна μW , где W – ускорение, а μ – присоединенная масса, которая порядка (для шара – ровно половина) массы вытесненной жидкости. Плывущий корабль создает на поверхности волны, уносящие энергию на бесконечность; волновое сопротивление в идеальной жидкости также не равно нулю.

отложен коэффициент сопротивления C_f , определяемый из формулы

$$F = C_f \cdot S \cdot \frac{\rho V^2}{2}. \quad (6.7)$$

Если выполняется закон Стокса, то $C_f = 24/\text{Re}$. Такая зависимость, в логарифмическом масштабе – прямая с наклоном (-1) , согласуется с экспериментом, пока $\text{Re} < 1$. Но далее в очень широкой и практически важной области чисел Рейнольдса коэффициент сопротивления гораздо больше, чем по Стоксу, и не зависит от вязкости, входящей в Re . Постоянство коэффициента сопротивления при $\text{Re} = 10^2 \div 10^5$ и определяет полезность его введения. C_f показывает эффективную долю сечения S , на которую действует гидродинамический напор $\rho V^2/2$. Кривая имеет универсальный характер: C_f зависит от Re , а не от d , V , ν по отдельности. Следовательно, при заданной форме тела число Рейнольдса определяет картину обтекания.

6.3 Пограничный слой. Сопротивление. Обтекаемость

Пока мы не уделяли достаточного внимания условиям на границе тела. Идеальная жидкость, имеющая точно нулевую вязкость, может скользить вдоль твердых поверхностей. Но даже при очень малой вязкости скольжение невозможно: жидкость прилипает к твердым границам. Например, при обтекании шара идеальной жидкостью скорость достигала бы максимального значения на экваторе шара ($1,5 \cdot V$), а в действительности на шаре скорость равна нулю. Но тогда должно меняться все течение и неясно, где должна проявиться малость вязкости.

Решение проблемы исчезающей вязкости в 1904 г. нашел Л. Прандтль (1875–1953). Он понял, что при обтекании тел с большими числами Рейнольдса вязкость существенна в тонком слое, непосредственно прилегающем к телу. Вне этого слоя скорость жидкости такая же, как в течении идеальной жидкости. В этом легко убедиться, протаскивая через жидкость пластинку (пытаясь «разрезать» воду ножом). Почти вся вода при этом остается неподвижной, и только прилегающий к ножу слой увлекается.

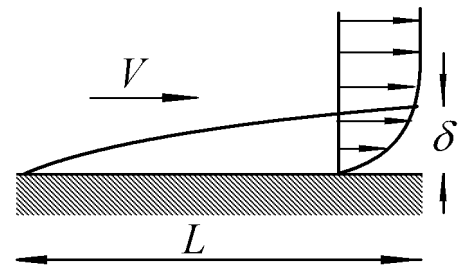


Рис. 6.5.

Разберем простейшую задачу – обтекание тонкой пластины потоком со скоростью V (рисунок 6.5). Толщину **пограничного слоя** оценим из диффузионной аналогии (п. 6.1, стр. 64): $\delta \simeq \sqrt{\nu t}$, где $t = L/V$ – характерное время, в течение которого натекающая порция жидкости взаимодействует с пластиной длины L . Отсюда

$$\delta \approx \sqrt{\frac{L\nu}{V}} = L \cdot \sqrt{\frac{\nu}{LV}} = L \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{Re}}}. \quad (6.8)$$

Здесь число Рейнольдса вычислено по длине пластины. Так как Re велико, $\delta \ll L$ – пограничный слой тонкий.

Внутри слоя скорость растет от нуля до идеального значения V , поэтому напряжение трения $\tau \approx \eta V/\delta$. Это значительно больше стоксовской величины $\eta V/L$. Сила сопротивления, действующая на пластину, $F = \tau \cdot 2bL$, где b – ширина пластины (обтекаемой с двух сторон). Используя (6.8), получим

$$F \approx \frac{\rho \nu V}{L} \sqrt{\frac{LV}{\nu}} \cdot 2bL = \frac{\rho V^2}{2} \cdot 2bL \cdot \frac{2}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (6.9)$$

Видим, что коэффициент сопротивления равен $2/\sqrt{\text{Re}}$. Точное решение Блазиуса (1914) дает близкое значение коэффициента: $C_f = 1,328/\sqrt{\text{Re}}$.

Толщина пограничного слоя определяется по порядку величины, так как скорость стремится к V асимптотически. Однако величина силы может быть измерена. Для пластин, протаскиваемых через жидкость, получается хорошее совпадение с экспериментом. Как видно из (6.9), сила пропорциональна $V^{3/2}$. Для пластины размеров 1×1 м, обтекаемой водой со скоростью 50 см/с, $\text{Re} = 5 \cdot 10^5$, $\delta \approx 2$ мм, $C_f = 0,0019$, сила сопротивления $0,47 \text{ Н} = 0,047 \text{ кГ}$.

Но для объемных тел типа шара полученное сопротивление все еще слишком мало: в $\sqrt{\text{Re}}$ раз больше, чем по формуле Стокса, тогда как надо в Re раз больше, чтобы получилось пропорциональность V^2 . Чем отличается обтекание выпуклой поверхности?

Пусть происходит обтекание с тонким пограничным слоем (рисунок 6.6). Вне слоя жидкость течет как идеальная. В точке А давление повышено на $\rho V^2/2$, а в точке В понижено. От точки А до В, где скорость максимальна, жидкость разгоняется под действием разности давлений. Затем от В до С жидкость (снаружи пограничного слоя) движется в сторону увеличения давления за счет набранной инерции.

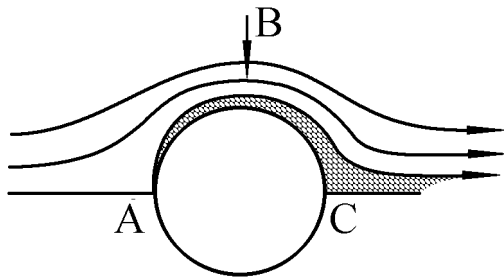


Рис. 6.6.

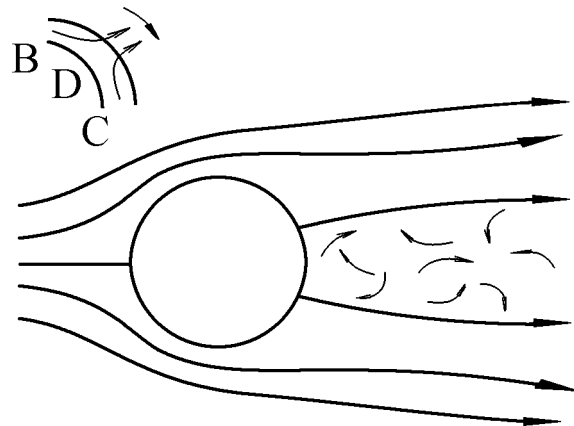


Рис. 6.7.

Но внутри пограничного слоя торможением нельзя пренебречь, там скорость жидкости уменьшена (на стенке – вообще до нуля). Поэтому слой не в силах преодолеть разность давлений между В и С. Остатки инерции позволяют ему лишь несколько продвинуться от точки В в сторону повышения давления. От точки С в заторможенном

слое под действием разности давлений возникает возвратное течение (рисунок 6.7). В некоторой точке D поверхностные потоки встретятся и вынуждены будут оторваться от тела. В дальнейшем формируется обтекание с отрывом². Внутри отрывной зоны возникает более или менее турбулентное (беспорядочное) течение, причем вблизи шара жидкость в среднем неподвижна. Давление в ней порядка давления в основном потоке и заведомо меньше, чем на лобовой части тела. Этим и объясняется вид закона сопротивления при большом числе Рейнольдса. Коэффициент сопротивления, грубо говоря, отражает долю сечения, соответствующего отрывной зоне. В большой области Re обтекание практически не меняется и C_f почти постоянен (см. рисунок 6.4).

Малая вязкость влияет не прямолинейно, а окольным путем, вызывая появление пограничного слоя, неустойчивость которого уже приводит к отрыву. Этим и объясняется появление большого сопротивления, притом почти не зависящего от вязкости.

При $Re = 5 \cdot 10^5$ у шара наблюдается так называемый **кризис сопротивления**. С ростом скорости C_f резко падает примерно вчетверо, при этом уменьшается и сила сопротивления. Это происходит потому, что пограничный слой становится турбулентным, его способность преодолевать рост давления увеличивается, а зона отрыва уменьшается. Если искусственно турбулизовать слой ниткой, надетой на обтекаемое тело, сопротивление можно уменьшить при меньших Re. Таким приемом пользуются авиамоделлисты.

Интересный пример обтекания – **вихревые кольца**, способные проходить большие расстояния в воздухе или воде без заметного торможения. Картина течения (рисунок 6.8) такова, что нет выраженного пограничного слоя и, следовательно, отрыва. Воздушный шарик таких же размеров способен пролететь всего 10–15 своих диаметров, так как имеет неподвижную границу. Высказывалась идея (пока не реализованная) выбрасывать дым в виде таких вихрей и тем избавиться от дымовых труб.

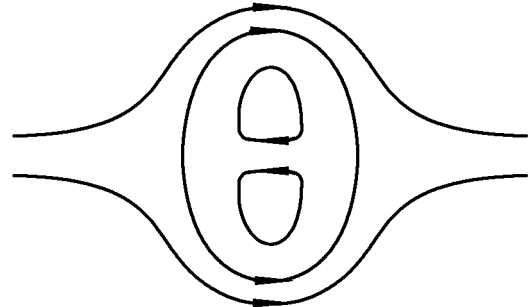


Рис. 6.8.

Сопротивление трения в пограничном слое примерно такое же, как у тонкой пластины, т.е. невелико. Поэтому для уменьшения сопротивления следует прежде всего минимизировать отрыв.

Хорошо обтекаемое тело должно быть закругленным спереди, но очень плавно сужающимся вниз по потоку (рисунок 6.9,а). Тогда рост давления на участке сужения будет медленным и зона отрыва будет мала. Заметим, что при этом тело, например крыло самолета, необязательно должно быть очень тонким, что важно с точки зрения прочности. Когда-то крылья делали тонкими и приходилось укреплять их дополнительными расчалками, отчего самолет напоминал этажерку и росло сопротивление.

²При внезапном разгоне течения сначала обтекание почти идеальное, как на рисунке 6.5. Развитие отрыва происходит за время порядка времени обтекания d/V .

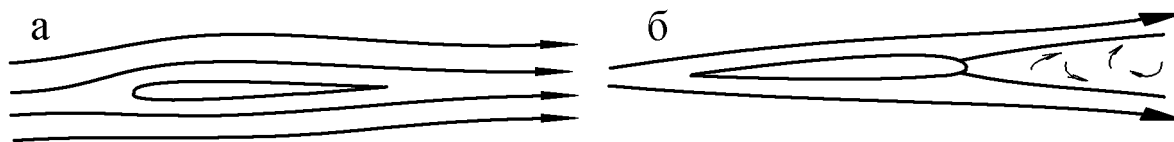


Рис. 6.9.

Впервые свободонесущее крыло (без расчалок) применил Юнкерс (1915 г.). Парадокс Даламбера для обтекаемых тел работает (с точностью до малого C_f)! Если же обратить обтекание, отрыв произойдет очень быстро и C_f будет около единицы (рисунок 6.9 б).

6.4 Турбулентность. Турбулентный слой

В 1883 г. О. Рейнольдс опубликовал свой знаменитый опыт. Он подкрасил тонкую струйку воды, текущей в трубе. При малых скоростях струйка смещается вдоль трубы, оставаясь ровной и резко окрашенной. Это значит, что жидкость движется в направлении оси, течение слоистое, или ламинарное. Но с увеличением скорости струйка размывается, растягивается в поперечном направлении и почти равномерно окрашивает весь поток. В таком турбулентном течении имеются беспорядочные продольные и поперечные пульсации скорости, приводящие к перемешиванию. Оказывается, что ламинарное течение Пуазейля теряет устойчивость при значении числа Рейнольдса около 2300 (вычислено по средней скорости и диаметру).

За прошедшие сто лет не удалось полностью разобраться в переходе к турбулентности. Достаточно заметить, что критическое число Рейнольдса отнюдь не близко к единице, как это бывает с безразмерным параметром в простой теории. Чтобы получить такое большое число, нужна достаточно сложная аргументация. Можно привести два соображения (видимо, недостаточных): во-первых, потеря устойчивости вызвана вязкостью (прилипанием к стенкам), которая в то же время определяет диссипацию (затухание пульсаций) и должна быть мала; во-вторых, течение Пуазейля имеет большой запас устойчивости.

Оценим, когда произойдет переход к турбулентности в пограничном слое. Если считать критическое число Рейнольдса по толщине слоя, мы должны получить примерно тот же результат, что для трубы:

$$\text{Re}_\delta = \frac{V\delta}{\nu} = \frac{VL}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{2}{\text{Re}}} = \sqrt{2 \cdot \text{Re}} \approx 2 \cdot 10^3,$$

откуда $\text{Re} = VL/\nu \approx 2 \cdot 10^6$. В опыте получается критическое Re , рассчитанное по длине, в диапазоне $(0,3 - 1) \cdot 10^6$, возможно, из-за меньшей устойчивости течения в ламинарном пограничном слое.

Крыло дозвукового самолета шириной 4 м на скорости 250 м/с имеет $Re \approx 6,7 \cdot 10^7$, т.е. почти на всей поверхности пограничный слой турбулентный. Как уже говорилось, турбулентный слой устойчивее к отрыву, чем ламинарный. У реального крыла при небольших углах атаки отрыв практически не возникает, сопротивление формы (давления) не превышает сопротивления трения.

Для турбулентного пограничного слоя довольно хорошо выполняются полуэмпирические формулы

$$\delta \approx 0,04 \cdot L \cdot Re^{-0,2}, \quad C_f \approx 0,074 \cdot Re^{-0,2}.$$

Для крыла самолета при $Re = 6,7 \cdot 10^7$ $\delta = 6$ мм, $C_f = 0,002$. Сопротивление трения крыла размером 30×4 м² около 1,2 тонны. Два крыла и фюзеляж, сопротивление которого того же порядка, дают 5 – 6 Т. Если отрыв удваивает сопротивление, получим 10–12 Т. Максимальная тяга двигателей ТУ-154 равна $3 \times 9,5$ Т, что дает представление о точности оценок. На высоте 10 км плотность воздуха и, значит, сопротивление уменьшается примерно в три раза.

Подъемная сила (вес) того же самолета около 90 Т, на 1 м крыла приходится около 3 Т. По формуле Жуковского (1847–1921), полученной в 1904 г., подъемная сила

$$F_y = \rho V \Gamma, \quad (6.10)$$

где $\Gamma = \oint (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{l})$ – **циркуляция** вокруг крыла, а интеграл берется по контуру, охватывающему крыло. Как возникает такая зависимость? Под крылом давление должно быть больше и, значит, скорость меньше. Для тонкого крыла (рисунок 6.10) можно считать, что на основной поток со скоростью V накладывается дополнительная скорость $+u$ сверху и $-u$ снизу крыла. Разность давлений

$$\frac{\rho}{2} \cdot ((V + u)^2 - (V - u)^2) = 2\rho V u,$$

а подъемная сила $\rho V \cdot 2uL$ на единицу длины. Произведение $2uL$ и будет циркуляцией Γ вокруг крыла.

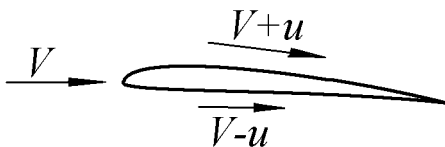


Рис. 6.10.

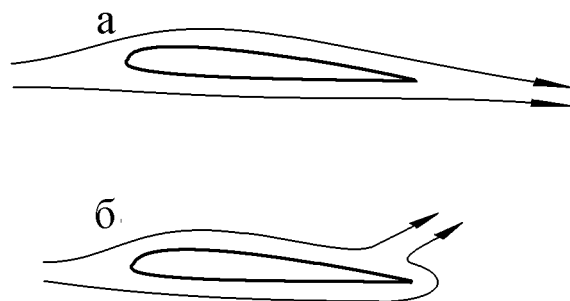


Рис. 6.11.

Формула Жуковского не содержит вязкости, в идеальной жидкости циркуляция может быть любой. На самом деле Γ опять определяется поведением пограничного слоя.

Циркуляция устанавливается такой, чтобы пограничные слои с обеих сторон крыла сходились с острой задней кромки (рисунок 6.11,а). Обтекание с другим расположением точки схода (рисунок 6.11,б) неустойчиво, так как на кромке скорость будет велика, а далее жидкость, приближаясь к точке схода, будет тормозиться. Так же как при обтекании выпуклого тела, рассмотренном в п. 6.3, в слое разовьются встречные течения, и он оторвется. В результате течение перестроится и точка встречи слоев передвинется на кромку. Для малых углов и тонких крыльев теоретическая подъемная сила

$$F_y = 2\pi \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot L,$$

т.е. $\Gamma = \pi V L \cdot \sin \alpha$, где α = угол атаки. На высоте 10 км для ТУ-154 получаем $\alpha = 6^\circ$. Коэффициент подъемной силы $C_y = 2\pi \cdot \sin \alpha = 0,6$. Отношение C_y/C_f , в нашем примере порядка 10, называется **аэродинамическим качеством** и показывает, во сколько раз вес самолета может превосходить тягу двигателей.

Отсасывая пограничный слой, можно добиться его малой толщины на всем крыле. Достаточно тонкий слой будет ламинарным и, значит, создающим малое трение. При этом одновременно предотвращается отрыв. По оценкам, управление пограничным слоем снизит сопротивление и увеличит дальность полета на 30%. Пока такие идеи не внедряются из-за увеличения сложности конструкции.

6.5 Конвекция и теплопередача

Как показано в п. 5.2, при наличии разности температур возникает поток тепла. Энергия, проходящая через единичную площадку в единицу времени

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx}.$$

Вид этой зависимости напоминает закон вязкого трения. Коэффициент теплопроводности, или просто теплопроводность, имеет размерность энергия/(см град с). Кирпич имеет $\kappa = 0,5$ ккал/(м час град) = 0,6 Вт/(м град). Из комнаты, через стену площадью 10 м² в два кирпича (0,5 м) при перепаде температур 50 К уходит на улицу 600 Дж каждую секунду; требуется мощность 600 Вт для обогрева. Если кирпичи сделать из меди, понадобится мощность в 660 раз большая ($\kappa = 400$ Вт/(м град)). У воды $\kappa = 0,6$ Вт/(м град), у воздуха 0,027 Вт/(м град). Окружающая нас среда имеет малую теплопроводность.

Как распространяется тепло в среде? Нагреем стержень сечением 1 см² с одной стороны на ΔT . За время t волна пройдет расстояние L . Тепловой поток $q \sim \kappa \Delta T/L$. Тепло qt распространяется по этому участку: $qt \sim CL\Delta T$. Получаем $L^2 \sim \kappa t/(\rho C)$ (ρ – плотность, C – удельная теплоемкость). Величина $\chi = \kappa/(\rho C)$ называется **температуропроводностью** и имеет ту же размерность (м²/с), что и кинематическая вязкость.

Для газов $\chi \simeq \nu$, так как и тепло, и импульс переносятся вместе с молекулами. Отношение ν/χ называют числом Прандтля Pr . Для воды $Pr = 7$, для жидких металлов $Pr \sim 0,01$. Для воздуха $\chi = 0,2 \text{ см}^2/\text{с}$.

Допустим, что легко одетый человек вышел на мороз $-23,4 \text{ }^\circ\text{C}$. Допустим, что градиент температуры будет порядка 3 К/см , т.е. 60 К на 20 см – характерном размере, на котором должна меняться температура воздуха. Тогда с 1 м^2 , площади теплообмена, будет уходить около 10 Вт . Через окно с двойными рамами площадью 2 м^2 можно ожидать утечки в 30 Вт . Эти оценки явно неверны. Зимой можно замерзнуть, а через окно выходит гораздо больше тепла, иначе в нашем климате делали бы окна во всю стену³. Далее, слой воздуха в 20 см должен прогреваться за время 2000 с – это никак не похоже на время установления теплообмена человека с окружающей средой. Аналогично парадоксам малой вязкости мы наблюдаем парадокс малой теплопроводности: реальный теплообмен гораздо больше.

Передача тепла через газы и жидкости возможна в основном путем конвекции. Сначала рассмотрим **вынужденную конвекцию** при обтекании тела потоком с другой температурой, отличающейся на ΔT . Для газов, у которых вязкость и теплопроводность, по сути, один и тот же процесс, $\chi \simeq \nu$, в особенности очевидно, что тепло при обтекании передается через пограничный слой. Как малая вязкость сказывается только вблизи тела, так и температура в потоке меняется в пределах температурного пограничного слоя.

Время t контакта частицы жидкости с телом порядка L/V , и успевает прогреться слой, толщина которого

$$\delta \simeq \sqrt{\chi t} \simeq \sqrt{\nu t} \approx L \cdot \sqrt{\frac{\nu}{LV}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}.$$

Поэтому градиент температуры и тепловой поток сильно увеличиваются:

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx} \sim \kappa \frac{\Delta T}{\delta}.$$

Для ламинарного слоя увеличение будет в \sqrt{Re} раз. Если человек обдувается холодным ветром со скоростью 2 м/с , то $Re = 6 \cdot 10^4$, и вместо 10 Вт получаем теплоотдачу около $2,5 \text{ кВт}$, что уже похоже на правду. Избежать замерзания помогает одежда, в порах которой воздух не движется, и таким образом используется его малая теплопроводность.

В жидких металлах вязкость определяется движением атомов, а перенос тепла – легкими электронами, поэтому их теплопроводность непропорционально велика, тепловой пограничный слой примерно на порядок толще динамического.

В турбулентном пограничном слое для газов хорошо выполняется полуэмпирическая зависимость:

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{L} \cdot 0,037 Re^{0,8}.$$

³Впрочем, иногда их как раз делают, к неудовольствию жильцов.

В этом случае уже нельзя оценить q как $\kappa\Delta T/\delta$ – через толщину турбулентного слоя. При турбулентности теплопередача становится еще более интенсивной из-за поперечного движения элементов потока и перемешивания. То же, кстати, относится и к формуле трения.

При **самостоятельной конвекции** само движение вызвано перепадом температур. Пусть вертикальная стенка на ΔT теплее окружающего воздуха. Слой вблизи стенки также нагревается и расширяется; изменение его плотности $\Delta\rho$ равно $\rho\beta\Delta T$, где β – коэффициент объемного расширения. Возникает выталкивающая сила.

Разность давлений $\Delta P = \Delta\rho gh$ при малой вязкости, как всегда, порядка ρV^2 , откуда скорость в нагретом слое $V \simeq \sqrt{\beta\Delta T gh}$. Число Рейнольдса, вычисленное по высоте стенки, $Re \simeq \sqrt{\beta\Delta T gh^3/\nu^2}$. Величину под корнем называют числом Грасгофа Gr. Надобность в новом безразмерном числе появилась потому, что конвекция возникает только при определенном перепаде температур, и число Рейнольдса может не иметь смысла. При теплообмене отопительной батареи с воздухом в комнате $\beta = 1/T \approx 1/300$, $\Delta T = 30$ К, $h = 0,5$ м, $Gr = 5 \cdot 10^8$, $Re = 2 \cdot 10^4$, т.е. течение в пограничном слое ламинарное. Толщина слоя $h/\sqrt{Re} = 3,5$ мм. Через этот тонкий слой и происходит теплоотдача (иначе батарея была бы неэффективна).

Нагретый воздух поднимается вверх и создает постоянную циркуляцию в комнате, перемешиваясь далее с холодными объемами и так передавая им тепло. Аналогично происходит унос тепла через двойные рамы: основное изменение температуры приходится на два пограничных слоя на внутреннем и наружном стеклах, т.е. эффективная толщина теплоизоляции невелика. По тем же причинам зимой холодно даже при полном безветрии: скорость конвективного течения будет порядка 1 м/с.

Если слой жидкости толщины h подогревается снизу, конвекция возникает при условии (Релей, 1916 г.)

$$Gr \cdot Pr = \frac{g\beta\Delta Th^3}{\nu\chi} > 1700 .$$

Понять эту неожиданно большую цифру можно из таких соображений. При обычном обтекании тела для $Re \sim 1$ даже имеющееся движение гасится вязкостью (течение Стокса). Поэтому ожидать возникновения конвекции с $Re \sim 1$ не приходится: вязкость слишком велика, либо нехватает перепада температур. Число Рейнольдса, соответствующее началу конвекции, порядка $\sqrt{1700} \approx 40$. Но при обтекании как раз при Re в диапазоне нескольких десятков наблюдается периодический отрыв вихрей от тела (дорожка Кармана, с которой связано, например, гудение проводов при ветре), т.е. возбуждаются вторичные течения.

При небольшом превышении условия Релея возникают конвективные **ячейки Бенара**, имеющие форму почти правильных шестиугольников, причем жидкость всплывает в центре и опускается по краям. Вода слоем 1 см при 20 °С ($\beta = 1,8 \cdot 10^{-4}$ 1/К) может быть нагрета снизу не более чем на 0,15 °С без конвекции. В невесомости для

теплообмена необходима вынужденная конвекция (специальные вентиляторы). В пористых материалах конвекция прекращается при миллиметровых размерах пор.

В жизни очень важна **атмосферная конвекция**. Большие масштабы требуют учета сжимаемости. Пусть Солнце нагревает поверхность Земли, так что нижние слои воздуха теплее верхних, имеющих температуру T_0 , на ΔT . Поднимаясь вверх, объем газа адиабатически охлаждается из-за падения давления; на высоте h

$$T = (T_0 + \Delta T) \cdot \left(\frac{p_0 - \rho gh}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Здесь ρ – средняя плотность воздуха в столбе высотой h . Если температура T выше, чем «законная» T_0 на высоте h , поднявшийся объем будет легче окружающего воздуха, что заставит другой объем опуститься вниз. Считая h и ΔT малыми, получаем

$$\frac{\Delta T}{T_0} > \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho gh}{p_0}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta T}{T_0} > \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R}.$$

Для воздуха $\gamma = 1,4$; $\mu = 30$ г/моль и критический градиент температуры будет 10 град/км. Такие условия возникают часто. Струи теплого влажного воздуха легко распознать по облакам, сидящим на их вершинах. (При адиабатическом падении температуры на некоторой высоте начинается конденсация пара, поднятого вместе с воздухом с поверхности). Конвекция в Солнце распространяется от поверхности примерно до половины радиуса, что объясняет возникновение пятен, протуберанцев и т.п., причем важную роль играет магнитное поле.

Конвекция определяет динамику земной атмосферы в целом. Воздух поднимается на экваторе и опускается в средних широтах. В результате возникает циркуляция. Вдоль поверхности Земли к экватору дуют постоянные ветры – пассаты, которые вращением Земли (силой Кориолиса) отклоняются к западу. Перетекание воздуха между материками и океанами из-за разного нагрева вызывает муссонную циркуляцию с сухим и влажным временами года. При большой влажности конвекция с последующим выпадением дождя вызывает резкую смену температур, что приводит к тропическим ураганам. Для урагана необходима жаркая погода, вызывающая сильное испарение и поднятие нагретого воздуха, и сила Кориолиса, которая закручивает сходящиеся к освободившемуся месту потоки. Сила Кориолиса в южном полушарии закручивает ураган по часовой стрелке, а в северном – против. На экваторе ее влияние нулевое, и поэтому ураганы возникают в сороковых («ревуших») широтах, где еще достаточно жарко.

Интересна проблема прогноза погоды. Казалось бы, зная уравнения движения и условия в атмосфере, можно предсказать будущее состояние погоды. Научным прогнозом впервые занялся адмирал Фицрой (1805–1865), бывший капитан корабля «Бигль», на котором совершил свое знаменитое плавание Ч.Дарвин. Фицрой понял, что важна не погода в данном месте в прошлом, а различие давлений в окрестностях, в особенности положение резких перепадов давления – атмосферных фронтов. В идеале, зная условия

на достаточно густой сетке точек, можно предсказать движение фронтов. Сейчас разработан гидродинамический прогноз погоды примерно на неделю. Почему не удается предсказать погоду на месяц вперед (это было бы полезно для сельского хозяйства) или на год?

Конвективные процессы тесно связаны с неустойчивостью. Ранее эта трудность не осознавалась. Однако в 1963 г. Э.Лоренц обнаружил принципиальную невозможность долгосрочного прогноза на упрощенной математической модели. Представим себе кольцеобразную трубку, заполненную вязкой жидкостью (см. рис. 6.14 на стр. 81). Трубка расположена в вертикальной плоскости и подогревается снизу. При достаточной разности температур нагретый внизу участок начнет подниматься и жидкость придет во вращение, направление которого зависит от начального возмущения. С увеличением ΔT жидкость время от времени начнет менять направление вращения. Скажем, она разгоняется настолько, что какой-то объем проскакивает нижнее положение, не успев вновь как следует нагреться. В результате не доходит до верха и может остановиться, а затем двинуться в обратном направлении. Эксперимент и численный расчет показывают, что при большой разности температур моменты смены направления случайны. Трубка моделирует конвективную ячейку в атмосфере.

Пример Лоренца – это одно из первых наблюдений **динамического хаоса**, когда безобидные с виду детерминированные системы развиваются непредсказуемым образом. Атмосферный фронт может рассыпаться без видимых причин или возникнуть на «ровном месте» из-за слабых воздействий, которые невозможно контролировать. По выражению Лоренца, существует «эффект бабочки»: взмах крыльев бабочки через некоторое время может совершенно изменить погоду. Решение уравнений динамической метеорологии неустойчиво: малые отклонения нарастают со временем. Время удвоения случайной ошибки составляет 3 – 5 дней, а через 2 – 3 недели расчет не будет иметь ничего общего с реальностью (хотя и даст вполне возможную в принципе погоду). Переход к турбулентности, по-видимому, тоже связан с динамическим хаосом. Подробнее эти вопросы освещены ниже, в приложении.

Время от времени газеты пропагандируют достижения отдельных синоптиков с диапазоном действия порядка года. При этом упоминаются обоснования только самого общего характера (всему причиной – Солнце), делается упор на важность работ для народного хозяйства и безразличие официальной науки. Изложение иллюстрируется множеством верных предсказаний. Например, некто занялся метеорологией случайно, без специального образования, поскольку кому-то надо было давать прогнозы. Первый же прогноз оказался удачным. Пока что физика не может объяснить такие феномены.

Приложение. Логистическое отображение и модель Лоренца

На простейшем примере покажем результаты сравнительно нового раздела современной физики – динамического, или детерминированного, хаоса. Против ожидания, самые простые эво-

люционные зависимости могут приводить к непредсказуемому поведению.

Пусть на некотором острове обитают кролики (rabbits). Естественно предположить, что при малой населенности их количество Ra подчиняется уравнению:

$$\frac{dRa}{dt} = k \cdot Ra, \quad (6.11)$$

то есть скорость увеличения населенности пропорциональна уже имеющемуся населению. Величина k – коэффициент размножения.

Решение уравнения (6.11) известно – население растет экспоненциально:

$$Ra = Ra_0 \cdot \exp(kt),$$

где Ra_0 – число кроликов в начальный момент. Через характерное время, равное $1/k$, это число возрастет в $e = 2,71828$ раз, еще один такой промежуток снова даст такое же увеличение, и т.д. Видна полная аналогия с механической неустойчивостью, которую мы уже обсуждали. Сейчас только напомним, что экспоненциально развивающийся процесс со временем приобретает характер взрыва.

Скоро наш остров переполнится. Пусть его «емкость» $N_0 = 1000$ кроликов. При меньшей численности кролики размножаются, при большей – мрут от голода. В уравнение надо ввести поправку на Lebensraum (нем. – жизненное пространство):

$$\frac{dRa}{dt} = k \cdot Ra(1 - Ra). \quad (6.12)$$

Здесь и дальше число кроликов измеряется в единицах N_0 (kilorabbit). Если $Ra = 1$, то скорость прироста населения равна нулю – достигается равновесие между числом рождений и смертей. При любом начальном значении, кроме нуля, Ra стремится к 1 – равновесному значению. Действительно, при $Ra < 1$ правая часть (6.12) положительна, и население возрастает. При обратном неравенстве правая часть отрицательна, и население уменьшается.

Кролики вряд ли знакомы с дифференциальными уравнениями (как и многие школьники). Скорее, размножение кроликов носит сезонный характер и подчиняется разностному уравнению:

$$\frac{Ra' - Ra}{\tau} = k \cdot Ra(1 - Ra),$$

или

$$Ra' = Ra + k\tau Ra(1 - Ra).$$

Можно сказать, что по текущему значению Ra планируется новое значение Ra' через период размножения τ . Выбрав τ за единицу времени, окончательно имеем

$$Ra' = Ra(1 + k - kRa). \quad (6.13)$$

Уравнения такого вида, когда следующее значение величины вычисляется через предыдущее, называются **итерационными**. Сразу видно, что при $Ra = 1$ получается $Ra' = 1$. Таким образом, равновесное значение для непрерывного уравнения (6.11) и его дискретной модели (6.13) одно и то же.

Но это не значит, что решение дискретной модели обязательно будет напоминать поведение непрерывной. Оказывается, что при большом коэффициенте размножения (точнее, произведении $k\tau$) равновесное значение в дискретной модели неустойчиво.

Легче это понять при графическом подходе. Точка $Ra' = Ra = 1$ – это пересечение графиков (рис. 6.12)

$$y = x \quad \text{и} \quad y = x(1 + k - kx) \equiv f(x).$$

Зависимость (6.13), если говорить о равновесном значении – точке пересечения графиков – можно понимать как способ решения уравнения

$$x = f(x)$$

методом итераций. Пусть мы начали с какого-то значения $x_0 = Ra_0$. Отмечаем его на действительной оси. Ему согласно (6.13) соответствует новое значение $x' = f(x_0)$, лежащее на графике функции (точка 1). Его снова надо подставить в уравнение итераций. Переносить это значение на горизонтальную ось не обязательно. Проще найти пересечение с прямой $y = x$ (точка 2). Из нее опять проводим вертикаль до графика $f(x)$ (точка 3), и т.д. Видим, что последовательные значения приближаются к точке пересечения по спирали. Как говорят, итерации сходятся. Решение как бы притягивает к себе траекторию. Но так бывает не всегда. На рис. 6.13 показан

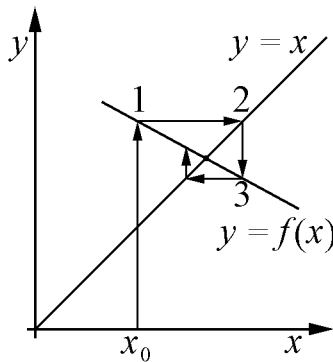


Рис. 6.12.

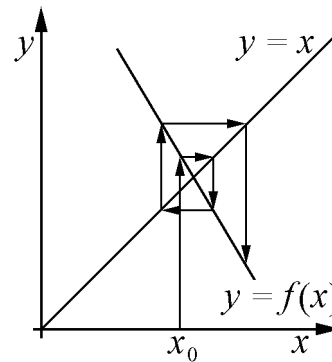


Рис. 6.13.

пример расходящихся итераций, «отталкивающихся» от решения. Легко убедиться (нарисовав несколько графиков типа рис. 6.12 и 6.13), что для сходимости итераций необходимо, чтобы график $y = f(x)$ имел в точке пересечения меньший наклон, чем у прямой $y = x$, то есть f слабее зависела от x , чем $y = x$.

Метод итераций часто применяется для численного решения уравнений. Попробуйте решить, например, $x = \cos(x)$. Правую часть можно вычислять на калькуляторе. Начальное приближение возьмите в интервале $0 < x < \pi/2$. Попробуйте так же решить уравнение $x = 10 - \operatorname{tg}(x)$. Сходятся ли итерации?

Из (6.13) видно, что с возрастанием k функция f становится все более крутой. Оказывается, что неустойчивым равновесие становится при $k > 2$.

Что же будет с кроликами, если равновесие неустойчиво? Объяснить это на словах не так просто. Опишем кратко результаты, которые дает компьютерная программа.

При $k < 2$ поведение $Ra(t)$ близко к непрерывной модели. При любом начальном значении со временем решение стремится к 1 – равновесию.

Однако при k в интервале от 2 до 2,44 наблюдаются колебания. При большой плодовитости малая заселенность дает быстрый рост и переход через равновесие; затем перенаселение приводит к вымиранию. Устойчиво не равновесное значение, а цикл с периодом 2.

При дальнейшем увеличении k возникает цикл с периодом 4, и т.д., а при $k > 2,5699457$ начинается хаотическое (беспорядочное) поведение. При k около 3 последовательные итерации дают практически случайные числа. Это происходит, несмотря на вполне определенный (детерминированный) характер всех вычислений. Такое поведение и называется детерминированным хаосом. Как видно, к нему могут приводить с виду вполне безобидные модели.

Если перейти к числам $x = Ra \cdot k / (1 + k)$, получается более простое уравнение

$$x' = rx(1 - x), \quad (6.14)$$

где $r = (1 + k)$. Величина x удобнее тем, что не превышает единицы. Уравнение (6.14) называется **логистическим отображением**⁴, или отображением Фейгенбаума.

Мы рассуждали о кроликах, следуя лекции Д.Маркса⁵, известного венгерского физика, единственно для придания изложению известной занимательности. На самом же деле рассмотренная задача имеет отношение к турбулентности. С увеличением скорости течение становится неустойчивым; возникают первичные вихри. Один оборот вихря можно рассматривать как цикл отображения типа (6.13). Далее эти вихри тоже теряют устойчивость: появляется цикл с периодом 2. На место k в гидродинамике следует поставить число Рейнольдса Re . Как и в нашей задаче, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при небольшом относительном изменении числа Рейнольдса.

Вообще детерминированный хаос сейчас находят во множестве областей. Например, быстро развивающаяся экономика при большом периоде планирования тоже может дать хаотическое поведение. И, в довершение всего, даже в Солнечной системе есть элементы хаоса. Когда-то Лаплас предлагал рассчитать все будущее Вселенной, зная ее начальное состояние и законы развития. Похоже, что это невозможно не только технически, но и принципиально. Со времен Ньютона считалось, что роль науки – предсказание будущего. Теперь мы видим, что будущее может быть случайным. Возможно, хаотические явления помогут разобраться в таких проблемах, как свобода воли.

Теперь опишем результаты простейшей **модели Лоренца**, описывающей конвекцию и тоже демонстрирующей динамический хаос. Это даст нам некоторое представление о современном взгляде на проблему турбулентности.

Кольцеобразная трубка, стоящая вертикально, заполнена жидкостью (рис. 6.14). Трубка подогревается снизу так, что температура ее стенок равна $-\Delta T \sin \varphi$. Угол φ отмеряется от оси x : в нижней точке имеется $+\Delta T$, а в верхней $-\Delta T$ относительно среднего уровня.

Тепловое расширение изменяет плотность жидкости и вызывает конвекцию (вращение); вязкость «пытается» сдержать конвекцию. Оказывается, что поведение системы зависит от интенсивности подогрева – величины ΔT . Представим температуру жидкости в виде

$$T = -\Delta T \sin \varphi + y \cos \varphi + z \sin \varphi,$$

⁴ «Логистика» (не путать с логикой) довольно близко переводится русским термином «снабжение».

⁵ George Marx, Simulation games in science education, Proc. of GIREP Conf. on the teaching of physics in schools, Budapest, 1981. Не путать с К.Марксом.

так что y – это температура в правой точке, а z – отклонение от температуры стенки в верхней точке трубки. Уравнение движения жидкости

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{mgby}{2} - kv .$$

Здесь m – масса жидкости в трубке, v – скорость течения. Первое слагаемое справа описывает «движущую силу» из-за перекоса массы при тепловом расширении с коэффициентом b . При положительной амплитуде y справа жидкость теплее и, значит, менее плотная⁶. Второе слагаемое в правой части – пропорциональное скорости трение. Удобны безразмерные переменные (с ними меньше коэффициентов).

$$\frac{dV}{dt} = s(Y - V) ,$$

где s – константа, зависящая от геометрии и свойств жидкости. Еще два уравнения описывают изменения Y и Z :

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= -Y - VZ + RV , \\ \frac{dZ}{dt} &= -Z + VY . \end{aligned}$$

Первые слагаемые в правых частях – это теплообмен со стенкой. Из-за него температура выравнивается: положительная амплитуда Y приводит к уменьшению Y . Остальные слагаемые описывают конвективный перенос тепла (они содержат скорость V). Например, согласно последнему уравнению, при положительной скорости (против часовой стрелки) и положительной температуре справа, через некоторое время возрастет температура сверху из-за переноса горячей жидкости. Такую же природу имеет слагаемое $(-VZ)$ во втором уравнении; слагаемое же RV – это перенос «равновесной» температуры T снизу в правую точку.

Выражения для безразмерной скорости V и амплитуд Y и Z мы здесь не выписываем. Достаточно знать, что они пропорциональны соответствующим размерным величинам v, y, z . Три уравнения образуют знаменитую систему Лоренца (E.Lorenz, Deterministic non-periodic flow. Journal of Atmos. Sciences, 1963, v.20, p.130).

Как обычно принято, зафиксируем параметр $s = 10$ (это означает довольно большое трение). Параметр R пропорционален перепаду температуры ΔT и может меняться. Он аналогичен числу Рейнольдса в проблеме турбулентности. Опишем поведение системы при различных R , то есть при разной интенсивности подогрева.

При $R < 1$ устойчиво состояние покоя жидкости, то есть

$$V = Y = Z = 0 ,$$

в котором обращаются в нуль правые части уравнений. Начальные отклонения от равновесия затухают.

При $1 < R < s(s+4)/(s-2) = 17,5$ устойчивым состоянием будет конвекция – постоянное вращение жидкости в сторону, определяемую случайными отклонениями от состояния покоя.

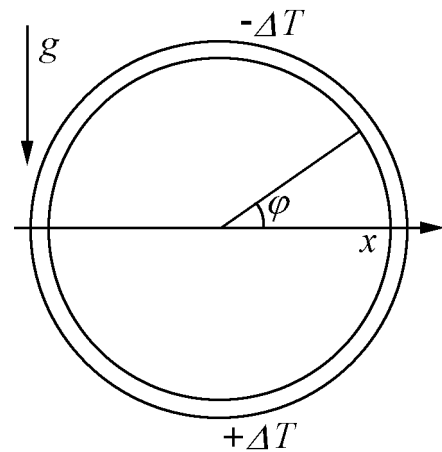


Рис. 6.14.

⁶Точнее, вращает жидкость момент сил. Но уравнение вращения приводится именно к такому виду.

Снова правые части должны обращаться в нуль. Из первого уравнения имеем $Y = V$, из второго тогда $Z = R - 1$, а из третьего $Y = V = \sqrt{R - 1}$. Состояние покоя по-прежнему останется равновесием, но уже неустойчивым.

Наконец, при $R > 17,5$ неустойчивой становится стационарная конвекция. Решение становится хаотическим: температура и скорость изменяются непредсказуемым образом. Модель Лоренца – первый обнаруженный пример динамического, или детерминированного хаоса. Оказалось, что детерминированные системы, которые должны рассчитываться точно, могут вести себя совершенно неожиданно. Отсюда видна трудность прогноза погоды. Если решение неустойчиво, то отклонения от него нарастают. Как уже говорилось, через 2 – 3 недели прогноз не будет иметь ничего общего с реальностью.

Если следить за последовательными максимумами одной из переменных, то такое отображение ($n \Rightarrow n + 1$) будет похоже на отображение Фейгенбаума. Разница же состоит в том, что задача Фейгенбаума – дискретная, а модель Лоренца – непрерывная. Оказывается, что в непрерывной модели для возникновения динамического хаоса нужно не менее трех дифференциальных уравнений. Интересно, что более сложный вариант Лоренца был найден раньше.