

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Курс лекций для ФМШ

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

А. П. Ершов

2 января 2011 г.

В этом семестре мы начинаем изучение электродинамики. Это не просто новый раздел, что-то вроде усовершенствованной механики. Развитие физики – это развитие представлений людей о природе. Сейчас уместно вспомнить историю.

Основы **механики** заложили Галилей и Ньютон еще в XVII веке. Хотя современный вид эта наука приобрела в XVIII – XIX веках (Лагранж, Гамильтон), это было в основном развитие форм, методов и приемов. Механикой занимаются и до сих пор; нынешние продвижения – это новые решения, иногда даже новые неожиданные области (как динамический хаос). В механике есть еще нерешенные задачи, есть и такие, которые вряд ли удастся решить в обозримом будущем. Но все они в принципе уже содержатся в законах Ньютона. Механика в этом смысле проста и понятна. Она опирается на житейский здравый смысл и повседневный опыт каждого человека. Объекты механики тоже просты и привычны (кирпичи, повозки), а более сложные вещи (автомобили, самолеты) – это не более как комбинации простых деталей. Благодаря расцвету механики в XIX веке приобрела популярность концепция материи, в то время попросту понимаемой как вещество, и развелись во множестве философы-материалисты.

**Молекулярная физика** начала развиваться в XIX веке. Такая задержка вызвана тем, что объекты «теплоты» более сложны и часто плохо доступны восприятию. Вначале появилась идея тепла как неосязаемой жидкости, которая как бы плещется в нагретых кирпичках и может из одного в другой перетекать. Прорыв начался, когда была осознана идея молекулярной структуры вещества, и всячески пытались свести теплоту к механике. Этот путь привел к частичному успеху (например, про горячее тело мы говорим не как бывало, что в нем избыток теплорода, а что его молекулы имеют много кинетической энергии). Но выявились проблемы следующего уровня: поведение теплоемкости, излучение... В прошлом семестре мы замели их под ковер, объявив, что это область квантовой механики и электродинамики. Возможно, преподавателям и не удалось в должной мере всех в этом убедить, но хорошо уже, если мы донесли, что тут не годится классическая механика. Впрочем, теплоемкость и фотоны – это некие тонкости, а есть проблема более грубая и зримая. Почему вещество делится на части только до масштаба порядка  $10^{-8}$  см, а не дальше? Откуда взялся этот размер, который мы называем атомным?

В этом году мы попробуем разобраться в этих вопросах. И для начала займемся **электродинамикой**. В течение XIX века было осознано (Фарадей, Максвелл, Герц и др.), что кроме вещества (того, что делится на атомы), есть в природе и другие сущности – **поля**, из которых предметом электродинамики являются **электрическое** и **магнитное** поле.

«На глаз» нельзя отличить провода «под током» и отключенные, что и приводит к электрическим поражениям. Но это не значит, что наши органы чувств не реагируют на поля. Электрическое поле мы прекрасно чувствуем: если оно присутствует в организме (одновременно идет ток), то непроизвольно сокращаются мышцы и возникают непривычные ощущения, памятные каждому, кто хоть раз хватался за провода. Менее сильное поле (от батарейки) ощущается на вкус. Связаны эти эффекты с тем, что

управляющие сигналы в организме, в нервах и пр. – электрические. Магнитное поле человек не замечает: попробуйте отличить магнит и простой кусок железа, не прибегая к таким индикаторам, как гвозди. Однако некоторые птицы как будто ориентируются по довольно слабому земному магнитному полю. С другой стороны, свет – это чистое электромагнитное поле, больше в нем ничего нет, а именно свет мы только и видим. И вообще все наши ощущения на микроуровне формируются именно полями, в основном электрическое поле действует как передаточный ремень. Можно сказать, что наши ощущения нас обманывают. Мы чувствуем не то, что есть на самом деле.

Видно, что восприятие полей какое-то косвенное, оно резко отличается от восприятия грубо материальных предметов. Потому-то понятие поля возникло достаточно поздно, приблизительно с работ Фарадея (первая треть XIX века). Если теплота как-то свелась к механике, правда не всегда обычной, то электродинамика – вещь принципиально не механическая. Хотя электромагнитное поле имеет энергию и импульс, может воздействовать на «обычные»<sup>1</sup> макроскопические предметы с некоторой силой, но это воздействие никак не главное, а сами поля не имеют ничего общего с основой ньютоновской механики – материальными точками. Это гораздо более тонкие вещи. Напротив, на микроскопическом уровне все вещество пронизано и «скреплено» полями: в атомах в основном электрическое поле не дает электронам разбежаться.

---

<sup>1</sup>То есть не несущие заметного электрического заряда, см. п. 1.1.

# Глава 1

## ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### 1.1 Закон Кулона. Электрическое поле заряда

Притяжение/отталкивание «наэлектризованных» тел известно с древности. В 1785 г. Кулон установил закон взаимодействия

$$F = \frac{q_1 q_2}{R^2}, \quad (1.1)$$

похожий на закон тяготения. Разница с тяготением в том, что **заряд**  $q$  может быть положительным и отрицательным:  $(+,+)$  и  $(-,-)$  отталкиваются, а  $(+,-)$  притягиваются.

Строго говоря, Кулон установил **пропорциональность**, а не равенство, поскольку понадобилось ввести новые сущности – заряды, единиц измерения которых на тот момент, естественно, не было. Далее закон созрел для более точной формулировки – равенства, причем долгое время чаще всего он употреблялся именно в виде (1.1) в системе СГС. Этим определяется и размерность заряда  $q$ : (сила)<sup>1/2</sup> · длина, и его единица. Заряд 1 (г)<sup>1/2</sup> · (см)<sup>3/2</sup>/сек взаимодействует с таким же зарядом на расстоянии 1 см с силой в 1 дину. Кратко его называют единицей заряда СГС, или 1 CGS(Q).

В системе СИ вводится гораздо бóльшая единица заряда – кулон (Кл); 1 Кл = 3 · 10<sup>9</sup> CGS(Q). Обратим внимание, что отличается не только единица заряда, но и форма записи закона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{R^2} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{R^2}. \quad (1.2)$$

Электрическая постоянная (она же диэлектрическая проницаемость вакуума)

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  Кл<sup>2</sup>сек<sup>2</sup>/(кг · м<sup>3</sup>), а коэффициент  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  Н · м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>. По-

явление таких коэффициентов – следствие произвольного введения новой единицы измерения; таким же образом, определив градус как единицу температуры, мы вынуждены запоминать коэффициент, переводящий эту энергетическую по своей природе величину из джоулей или эргов в градусы (постоянную Больцмана).

Сила взаимодействия зарядов в 1 Кл на расстоянии 1 км будет 9 · 10<sup>3</sup> Н, или 900 кг. Часто полезность системы СИ видят в том, что в ней единицы «бытовой» величины. Видно, что кулон как единица нескомпенсированного заряда не подходит под это правило. В природе заряды порядка сотен кулон возникают разве что в грозových облаках.

Заметим, что кулон отличается от единицы заряда СГС не только величиной, но и его размерность не выражается через метр, килограмм и секунду. Основная единица в СИ – ампер<sup>1</sup> (А),  $1 \text{ Кл} = (1 \text{ А}) \cdot (1 \text{ с})$ .

Мы будем использовать систему СИ, при необходимости приводя несовпадающие формулы и в более удобной для физика системе СГС. Поскольку полное дублирование нереально, укажем простое правило: для данной главы всякая формула СИ, содержащая коэффициент  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , переделывается в СГС просто опусканием этого коэффициента; если имеется только  $\epsilon_0$ , то в СГС в том же месте ставится  $1/4\pi$ , или  $4\pi$  вместо  $1/\epsilon_0$ . Если же в выражение не входит ни  $k$ , ни  $\epsilon_0$ , оно будет универсальным в пределах электростатики. Ранее (в механике и молекулярной физике) не было критично, какая система используется: вид уравнений от этого не зависел, а единицы отличались на степени 10.

Существует элементарный заряд  $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ СГС} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ . Заряд электрона равен  $-e$ , протона  $+e$ . Любой заряд в природе «набирается» из таких единиц. Поскольку элементарный заряд мал, мы обычно не замечаем дробности заряда (так же как и дробности вещества), но чувствительные приборы реагируют на отдельный электрон.

Сейчас известно, что многие элементарные частицы (**адроны**) состоят из так называемых **кварков**, имеющих дробные заряды, именно  $\pm e/3$  и  $\pm 2e/3$ . Но кварки живут не в свободном виде, а тройками (**барионы**, например протон и нейтрон) либо парами кварк-антикварк (**мезоны**, например  $\pi$ -мезон), так что заряд наблюдаемой частицы всегда получается целый<sup>2</sup>. **Лептоны** (например, электрон) кварков не содержат; их заряд целый без всяких усложнений.

Заряд **сохраняется**. Сохранение заряда просто понять, учитывая его дробность: это означает, что электрон не может возникнуть из ничего или исчезнуть без следа. Однако возможно парное рождение в одной точке частиц с противоположными зарядами, например, электрона и позитрона из двух фотонов, либо обратный процесс – аннигиляция. Если в каком-то объеме изменился заряд, то он или прибыл извне (через границу), или удалился; и то и другое – в результате движения заряженных частиц.

Электрическая сила между двумя протонами больше гравитационной (ньютоновской) в  $e^2/(4\pi\epsilon_0 G m_p^2) \approx 10^{36}$  раз (здесь  $m_p$  – масса протона,  $G$  – постоянная всемирного тяготения). Отсюда следует, что заряды электрона и протона близки с очень хорошей точностью (по современным представлениям, точно равны). Иначе в сколько-нибудь заметном куске вещества заряды компенсировались бы не совсем, и гравитационное притяжение планет могло бы «забываться» электрическим взаимодействием.

Электроны притягиваются к протонам, образуя атомы. Сила взаимодействия между элементарными зарядами достаточно велика, чтобы при бытовых условиях нейтральные атомы преобладали. При больших расстояниях между атомами взаимодействие их зарядов практически компенсируется благодаря нейтральности. Но при сближении

<sup>1</sup> Ампер определяется как величина тока, который, проходя по двум тонким параллельным прямым проводникам, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

<sup>2</sup> Найдены более редкие четырех- и пятикварковые состояния, также имеющие в сумме целый заряд.

компенсация сил нарушается, поскольку становится существенным не только суммарный (нулевой) заряд, но и его распределение. Поэтому между близко расположенными атомами возникают заметные силы взаимодействия, хотя и уступающие по величине кулоновским силам между нескомпенсированными зарядами. В случае притяжения из атомов могут образоваться стабильные молекулы. Молекулы также способны притягиваться, образуя вещество. И более сложные конструкции, такие как вирусы, медведи, люди, также скрепляются вместе электрическими силами. В основном наш мир – электрическая система.

Правильнее считать, что не заряды действуют друг на друга, а каждый из них создает в пространстве **электрическое поле**. Это поле и действует на другой заряд. По определению, если на неподвижный пробный<sup>3</sup> заряд  $q$  в некоторой области пространства действует сила, пропорциональная  $q$  и зависящая, возможно, от времени и координат:

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

то в этой области имеется электрическое поле напряженности  $\mathbf{E}$ , или короче: электрическое поле равно  $\mathbf{E}$ . Можно сказать, что  $\mathbf{E}$  – это сила, действующая на единичный заряд<sup>4</sup>. Поле может быть однородным (не зависеть от координат в некоторой конечной области), статическим (не зависеть от времени), но в общем случае  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . В этой главе мы рассматриваем простейший случай – **электростатические**, то есть не зависящие от времени, электрические поля. Строго говоря, это значит, что заряды должны быть неподвижны. Практически допустимы движения со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света (как и в ньютоновской механике).

Поскольку заряд – явный скаляр, поле  $\mathbf{E}$  – вектор. Из (1.2,1.3) следует, что напряженность поля, созданного зарядом  $Q$  в точке, куда «смотрит» радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , проведенный из этого заряда,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q \cdot \mathbf{r}}{r^3} \text{ (СГС)}. \quad (1.4)$$

В рамках электростатики нет разницы между набором уравнений (1.3), (1.4) и одним (1.2). Но позже мы увидим, что поле может существовать отдельно от зарядов и поэтому является не лишним неизвестным, а реальным фактором. Например, при смещении одного из зарядов сила меняется не сразу, как можно ожидать из (1.1) (это называлось бы **дальнодействие**), а с некоторой задержкой. Сначала изменится поле в непосредственной близости от смещаемого заряда, а потом область этих изменений расширяется. Когда она «зацепит» второй заряд, изменится и сила (**близкодействие**). Мы увидим, что изменения поля распространяются со скоростью света. Можно представлять себе поле как некую среду, через которую взаимодействуют заряды.

<sup>3</sup>Пробным называют заряд, достаточно малый, чтобы не влиять на рассматриваемое поле.

<sup>4</sup>Аналогом электрического поля в гравитации является ускорение силы тяжести  $\mathbf{g}$ .

## 1.2 Принцип суперпозиции

Этот принцип установлен на опыте и означает, что поля от нескольких зарядов складываются:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3}. \quad (1.5)$$

**В электростатике** электрическое поле создается зарядами и только ими (это также опытный факт). Любое электростатическое поле можно представить как сумму полей от некоторых зарядов. Говорят, что заряды – **источники** поля. Рассмотрим примеры.

1. Кольцо радиуса  $R$  с зарядом  $q$ ; на расстоянии  $z$  от центра на оси кольца:

$$E = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot qz/(R^2 + z^2)^{3/2}, \text{ направление – вдоль оси кольца.}$$

2. Нить с зарядом  $\lambda$  на единицу длины: поле при  $\lambda > 0$  направлено «от нити». Разделив нить на элементы длины  $dx$ , заряды которых  $\lambda dx$ , суммируем проекции полей на поперечное к нити направление:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot dx}{(r^2 + x^2)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}.$$

3. Плоскость с зарядом  $\sigma$  на единицу площади: режем на кольца площади  $dS = 2\pi R dR$ . Поле направлено по нормали и равно

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot dS}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma z \int_0^{\infty} \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

независимо от расстояния  $z$  до плоскости. Для оценки можно считать, что поле создает кусок плоскости размером  $z$ , скажем круг такого радиуса. Его заряд  $\pi z^2 \sigma$ , расстояние до точки наблюдения порядка  $z$ , и поле должно быть порядка  $(1/4\pi\epsilon_0) \cdot \pi z^2 \sigma / z^2 \sim (1/4\pi\epsilon_0) \cdot \pi \sigma$ . Получилась ошибка в два раза, чего и следовало ожидать от оценки. Остальная часть плоскости имеет бесконечный заряд, но поля от удаленных участков быстро спадают, да и направлены почти вдоль плоскости, поэтому их вклад невелик.

Важный случай – поле равномерно заряженной сферы. Эту задачу решил еще Ньютон (в гравитационном варианте). Проследив за его решением, мы одновременно вернем долг (в первом семестре результат мы приняли без доказательства).

Легко показать, что внутри сферы поле равно нулю. На рис. 1.1 показаны два узких конуса с вершинами в произвольной точке наблюдения  $A$ , которые опираются на два противоположных малых участка поверхности. Площади этих участков  $dS_1$  и  $dS_2$  относятся как квадраты расстояний  $r_1$  и  $r_2$  (обратите внимание на подобие узеньких треугольников). Поля от участков  $dS_1$  и  $dS_2$  в точке  $A$  направлены вдоль отрезков  $r_1$  и  $r_2$ , и их сложение дает

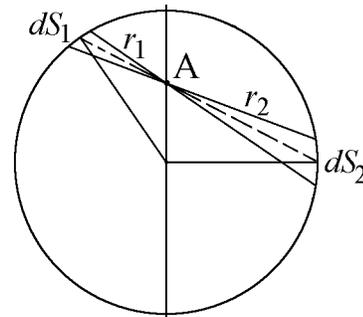


Рис. 1.1.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \left( \frac{dS_1}{r_1^2} - \frac{dS_2}{r_2^2} \right) = 0.$$

Отсюда нулевым будет и суммарное поле сферы, так как ее поверхность исчерпывается такими малыми участками.

Более сложно найти поле снаружи сферы. Решение Ньютона – пример математического изящества. Приведем его в современных обозначениях.

На рис. 1.2 на расстоянии  $R$  от центра сферы радиуса  $a$  расположена точка наблюдения (обозначенная также  $R$ ). Внутри сферы имеется так называемая сопряженная точка  $A$ , на расстоянии  $x = a^2/R$  от центра. Проведем через точку  $A$  прямую, пересекающую сферу в точке  $B$ . Прямая будет осью узкого конуса, с телесным углом<sup>5</sup>  $d\Omega$ , вырезающего на сфере малый участок поверхности  $dS_B$ . Расстояния  $AB = r$ ,  $BR = l$ , а угол  $BRO$  обозначим через  $\varphi$ .

Треугольники  $AOB$  и  $BRO$  подобны, так как угол  $\alpha$  у них общий, а отношения соответственных сторон равны:  $x/a = a/R$ . Тогда и отношение  $r/l = a/R$ , а угол  $OBA$  равен  $\varphi$ . Участок поверхности вокруг точки  $B$  имеет заряд  $q_B = \sigma dS_B = \sigma r^2 d\Omega / \cos \varphi$ , поскольку  $r^2 d\Omega$  – элемент поверхности, перпендикулярной радиусу  $r$ ; деление на косинус учитывает наклон поверхности сферы к оси конуса. Поле в точке наблюдения из симметрии направлено горизонтально:

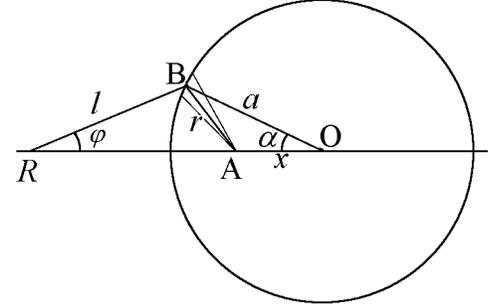


Рис. 1.2.

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B}{l^2} \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r^2 d\Omega}{l^2 \cos \varphi} \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma a^2 d\Omega}{R^2}.$$

Теперь суммируется очень просто: полный телесный угол (площадь любой сферы, деленная на квадрат ее радиуса) равен  $4\pi$ , а  $4\pi a^2 \sigma$  есть заряд сферы  $Q$ . Отсюда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Снаружи сфера действует, как будто весь заряд расположен в ее центре. Значит, любое сферически симметричное распределение заряда создает снаружи такое же поле, как суммарный точечный заряд.

### 1.3 Потенциал

При движении пробного заряда в электростатическом поле изменяется его потенциальная энергия  $U$ . Поскольку электрическая сила – вторичное понятие, а основное – электрическое поле  $\mathbf{E}$ , или сила на единичный заряд, то в электростатике важна потенциальная энергия единичного заряда – **потенциал**  $\varphi$ . Для пробного заряда  $q$  по определению  $U = q\varphi$ . Соответствия:

$$F \iff U : \quad F = -dU/dx, \quad U(x_2) - U(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} F dx, \quad U(x) = - \int F dx$$

(от места, где  $U = 0$ )

$$E \iff \varphi : \quad E = -d\varphi/dx, \quad \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} E dx, \quad \varphi(x) = - \int E dx.$$

(от места, где  $\varphi = 0$ )

<sup>5</sup>Телесным углом называется отношение площади участка сферы, проведенной из данной точки, к квадрату радиуса.

(Не забывайте знак минус !!!). В пространстве имеются три направления, которым соответствуют три частных производных:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Короче то же самое записывается в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \equiv -\text{grad}\varphi = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (1.6)$$

Здесь  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – единичные векторы по осям,  $\nabla$  и  $\text{grad}$  – различные обозначения дифференциального оператора градиента:

$$\nabla \equiv \text{grad} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

который как бы умножается на функцию, стоящую справа от него. Если не пользоваться координатами, то градиент есть вектор, направленный в сторону быстрейшего изменения потенциала и равный производной потенциала вдоль этого направления.

Из (1.6) видна выгода использования потенциала – в одной функции содержится та же информация об электрическом поле, как в трех функциях – компонентах напряженности поля. Правда, эта информация присутствует в «свернутом» виде: чтобы ее извлечь, надо вычислить три производных. Далее мы увидим, что потенциал полезен не только для сокращения, но и сам по себе, как физическая величина.

Пока ниоткуда не следует, что потенциал – функция, которая обращает (1.6) в тождество – существует. В общем случае, для произвольного поля  $\mathbf{E}$ , это и неверно. Но в электростатике потенциал существует и даже (при известном расположении зарядов) выписывается явно. А именно, точечный заряд  $q$  на расстоянии  $r$  создает потенциал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.7)$$

Действительно,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{r^3}.$$

Остальные компоненты отличаются тем, что  $x$  заменяется на  $y$  или  $z$ . Вектор поля

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{\mathbf{i}x}{r^3} + \frac{\mathbf{j}y}{r^3} + \frac{\mathbf{k}z}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$$

в полном соответствии с (1.4). В силу принципа суперпозиции поле любого числа зарядов есть сумма элементарных полей вида (1.4), но тогда и потенциал суммарного поля можно найти как сумму элементарных потенциалов:

$$\varphi = \sum \varphi_i = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}. \quad (1.8)$$

Как и потенциальная энергия, потенциал определен с точностью до постоянной: выражение  $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot (q/r) + 2011$  даст точно такое же поле. Другими словами,

существует свобода выбора «нуля потенциала» – точки, где  $\varphi = 0$ . Иногда нуль потенциала фиксируется из соображений удобства, но часто имеется естественный выбор. Для точечного заряда и удобно, и естественно полагать потенциал равным нулю на бесконечности.

Обратный переход от поля к потенциалу в пространстве имеет вид

$$\varphi(2) - \varphi(1) = - \int_L (\mathbf{E}d\mathbf{L}), \quad (1.9)$$

где  $L$  обозначает любой путь, соединяющий точки 1 и 2, а  $d\mathbf{L}$  – векторный элемент длины этого пути. Такое выражение имеет определенное значение, если интеграл зависит от начальной и конечной точек, а не от пути между ними (**условие потенциальности**). Другая формулировка этого условия:

$$\oint (\mathbf{E}d\mathbf{L}) = 0, \quad (1.10)$$

где  $\oint$  – интеграл по **любому** замкнутому контуру, называемый также циркуляцией  $\mathbf{E}$ . В этом случае существует однозначно определенный потенциал.

Потенциальность поля точечного заряда легко установить и прямым интегрированием. Действительно, подставляя (1.4) в (1.9), можно заметить, что поперечные радиусу перемещения не дают вклада в интеграл, и его можно свести к интегралу вдоль радиуса. Для определенности выбираем  $\varphi(\infty) = 0$ :

$$\varphi(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{qdr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

что совпадает с (1.7). Отметим, что «на заряде»  $\varphi = \infty$ ; реально заряд либо имеет размер, либо (на очень малых расстояниях) нарушается классическая электродинамика, то есть излагаемая теория; то же касается поля  $\mathbf{E}$ .

Складывать потенциалы по принципу суперпозиции (1.8) проще, чем поля, поскольку  $\varphi$  – скаляр. На оси кольца (пример 1 из п. 1.1)  $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot \sum \Delta q / \sqrt{R^2 + z^2} = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot q / \sqrt{R^2 + z^2}$ . Проверим:  $E_z = -\partial\varphi/\partial z = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot qz / (R^2 + z^2)^{3/2}$ !

Сложнее ситуация с потенциалом заряженной нити (пример 2 из п. 1.1).

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln \left( \sqrt{x^2 + r^2} + x \right) \Big|_0^{\infty}.$$

Подставляя пределы, получим бесконечность (интеграл расходится). Но бесконечных заряженных нитей не бывает. Пусть длина нити  $2L$  велика, но конечна. Заменим предел на  $L$ :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln \left( \sqrt{x^2 + r^2} + x \right) \Big|_0^L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln \left( \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{r} \right).$$

Потенциал обращается в бесконечность при  $r = 0$  и  $L = \infty$ . Первая расходимость – это по существу бесконечность на точечном заряде, ослабленная размазанностью линейного распре-

деления. Вторая вызвана бесконечной длиной нити и для реальных задач несущественна. Полученным выражением уже можно пользоваться, в частности, дифференцировать его:

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \frac{d}{dr} \ln \left( \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{r}.$$

При  $L \rightarrow \infty$   $E = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot 2\lambda/r$ , как и при прямом суммировании полей. Можно также писать  $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot 2\lambda \ln(r_0/r)$ , при любом значении радиуса фиксации нуля потенциала  $r_0$ . Здесь «естественный» нуль потенциала (расстояния, значительно большие длины нити) не очень удобен.

Единица потенциала в СГС  $(\text{г})^{1/2} \cdot (\text{см})^{1/2}/\text{сек}$ , в СИ – вольт (В). С учетом всех  $\epsilon_0$   
 $1 \text{ CGS(U)} = 300 \text{ V}$ .

Это число легко запоминается и полезно для перевода других единиц. Пример:  $q\varphi = U$ ;  $1 \text{ Дж} = (1\text{В}) \cdot (1\text{Кл}) = (1/300) \cdot 1 \text{ Кл} = 10^7$ ;  $\rightarrow 1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9$ . Мнемоника: в розетке фаза и ноль = 1,0 СГС  $\cong 300 \text{ В}$  ( $220\sqrt{2} = 311$ ). Поле в СИ выражают в В/м, часто удобна внесистемная единица В/см. Воздух пробивается при  $E \cong 30 \text{ кВ/см} = 100 \text{ СГС}$ .

## 1.4 Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Для наглядного изображения поля введем геометрические образы. От точечного заряда  $q$  проведем прямые лучи. Это и будут **силовые линии** в простейшем случае (рис. 1.3). Полезно запомнить нехитрые правила: направление силовых линий совпадает с направлением поля в каждой точке, а **густота** отображает величину поля. Густотой назовем число силовых линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную им, или отношение  $\Delta N/\Delta S$ . Убедитесь, что при таком определении для точечного заряда  $q$  силовые линии нигде не прерываются и не возникают (кроме как на самом заряде).

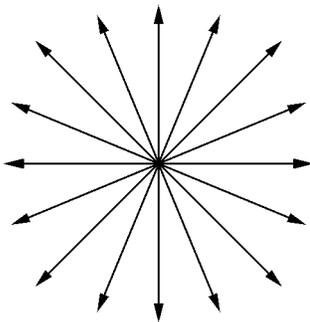


Рис. 1.3.

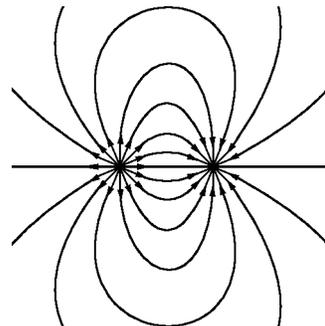


Рис. 1.4.

Очевидно, силовые линии в общем случае не могут пересекаться (позднее это уточним). Для двух зарядов разного знака и равной величины силовые линии выходят из «+» и входят в «-» (рис. 1.4). Число линий должно быть пропорционально величине заряда. При рисовании полезно следить сначала за картиной вблизи зарядов, затем на бесконечности, и наконец совместить изображения на средних расстояниях. Заряды

одного знака с большого расстояния напоминают суммарный заряд, так что все силовые линии уходят на бесконечность (рис. 1.5). Опять видно, хотя пока не доказано, что силовые линии начинаются и кончаются только на зарядах.

**Уточнение.** На рис. 1.5 между зарядами одного знака есть не только пересечение, а даже «столкновение» силовых линий. Легко видеть, что такая особая точка всего одна, а поле в ней нулевое. Нулевой вектор способен иметь любое направление. Строго говоря, в эту точку не следовало бы тянуть силовую линию, так как здесь их густота обращается в нуль; присутствие здесь линий – дань симметрии.

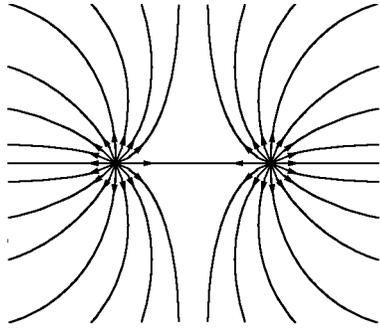


Рис. 1.5.

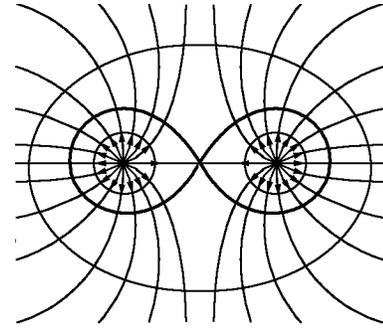


Рис. 1.6.

**Эквипотенциальные поверхности** – это поверхности одинакового потенциала. Для точечного заряда  $q$  это будут концентрические сферы. Если условиться рисовать их через одинаковое значение потенциала, допустим через 1 СГС, то эквипотенциали будут густо располагаться в областях, где поле велико. Поэтому для точечного заряда такая программа невыполнима, так как эквипотенциальных поверхностей понадобится бесконечное число. Здесь, как и при рисовании силовых линий, необходим компромисс между строгостью и выполнимостью. Применимы те же рекомендации, что и для силовых линий. Заметим, что эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям (опять кроме особых точек, см. рис. 1.6).

## 1.5 Теорема Гаусса

Уточним качественные рассуждения п. 1.4. Окружим точечный заряд  $q$  концентрической сферой радиуса  $R$  (рис. 1.7). Поскольку густота линий пропорциональна величине поля, число линий через  $1 \text{ см}^2$   $\Delta N/\Delta S \sim q/R^2$ . Для определенности вместо пропорциональности примем равенство:  $\Delta N/\Delta S = E = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot q/R^2$ . Через всю сферу проходит  $S \cdot \Delta N/\Delta S = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot 4\pi R^2 q/R^2 = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot 4\pi q = q/\epsilon_0$  силовых линий. Это число не зависит от радиуса сферы. Значит, силовые линии, хотя бы в этом простом случае, не прерываются и не возникают в пустом месте.

Переходя от геометрических образов к алгебраическим, можно записать на языке поля:

$$\sum E \Delta S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi q = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Пока мы видим, что это верно для концентрической сферы любого радиуса.

Но очевидно, что для **одного точечного заряда** концентричность не важна. Можно даже брать и не сферу. Для любой замкнутой поверхности  $S$ , содержащей внутри заряд  $q$ , число выходящих силовых линий **тоже** равно  $4\pi(1/4\pi\epsilon_0) \cdot q!$  Это ясно из картины силовых линий, известной нам в этом случае точно, см. рис. 1.7. Замкнутая поверхность обязательно пересечет их все, если заряд сидит внутри. Форма поверхности может быть довольно замысловатой (например, памятник Пушкину).

Снова переключимся на язык поля. В общем случае вектор поля будет под углом к поверхности, и надо брать площадку, перпендикулярную  $\mathbf{E}$ . Число линий дается произведением  $E\Delta S_{\perp} = E_{\perp}\Delta S = E\Delta S \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между  $\mathbf{E}$  и нормалью к площадке  $\mathbf{n}$ . То же самое можно записать как скалярное произведение  $(\mathbf{E}_n\Delta S)$  или еще короче:  $(\mathbf{E}\Delta\mathbf{S})$ . Под вектором  $\Delta\mathbf{S}$  понимается вектор, длина которого равна площади элемента поверхности  $\Delta S$ , а направление совпадает с внешней нормалью  $\mathbf{n}$  данного элемента, разумеется, малого и практически плоского<sup>6</sup>.

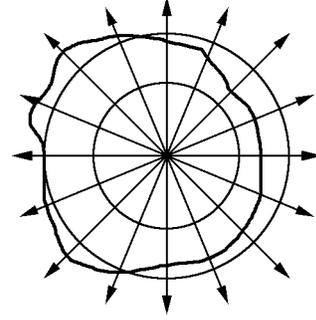


Рис. 1.7.

Окончательно для одного заряда  $q$  имеем

$$\sum_S (\mathbf{E}\Delta\mathbf{S}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

для любой замкнутой поверхности  $S$ , содержащей в себе этот заряд. Выражение вида  $\sum_S (\mathbf{E}\Delta\mathbf{S})$  называется **поток**ом вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность  $S$ . Название происходит из гидродинамической аналогии: если заменить  $\mathbf{E}$  на вектор  $\mathbf{V}$  скорости несжимаемой жидкости, то поток  $\mathbf{V}$  – это синоним расхода ( $\text{м}^3/\text{сек}$ ).

Наконец, если заряд внутри поверхности не один, то полное поле – сумма полей отдельных зарядов  $q_i$ . Для каждого из них поток равен  $(1/4\pi\epsilon_0) \cdot 4\pi q_i$ , а для всех вместе

$$\sum_S (\mathbf{E}\Delta\mathbf{S}) = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot \sum 4\pi q_i = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \text{или} \quad \oint_S (\mathbf{E}d\mathbf{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.11)$$

где  $Q$  – полный заряд внутри  $S$ . Это и есть **теорема Гаусса**.

Надо осознать, что если один из зарядов выйдет из  $S$  наружу, то сразу после пересечения  $S$  он перестанет вносить вклад в полный заряд. Для этого может быть достаточно сколь угодно малое смещение, то есть поток изменится скачком. Еще замечание: поток через **незамкнутую** поверхность, скажем, половинку сферы, ничему замечательному не равен. Тут не ясно, что находится внутри, стало быть, и внешняя нормаль плохо определена. Конечно, какое-то число получится, но никакого уравнения типа (1.11) ожидать не приходится.

Теорема Гаусса – второе из полученных нами **уравнений Максвелла** (первым было условие потенциальности (1.10)). Оба они есть уравнения в **интегральной форме** и оба не являются локальными уравнениями, связывая значения поля в разных местах.

<sup>6</sup>Во избежание путаницы: перпендикулярность линии либо вектора к поверхности означает их параллельность нормали и вектору площади.

Существует и **дифференциальная форма** этих уравнений, которая уже локальна (связывает величины, относящиеся к данной точке пространства).

*Примеры.*

Известное уже поле нити: выбираем в качестве поверхности  $S$  цилиндр радиуса  $r$  и длины  $L$ , для которого нить является осью. Из симметрии потока через «доньшки» цилиндра нет. На боковой поверхности цилиндра поле всюду одинаково по величине и направлено по нормали. Отсюда

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = E \cdot 2\pi r L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \lambda L \implies E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}.$$

Сфера радиуса  $a$ , равномерно заряженная по поверхности зарядом  $q$ : опять из симметрии поток равен  $4\pi r^2 E$  через любую концентрическую сферу. При  $r < a$  внутри контрольной сферы заряда нет,  $\implies E = 0$ , при  $r > a$  весь заряд находится внутри контрольной поверхности,  $\implies E = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot q/r^2$ . Вспомним, что получить последний результат суммированием полей (п. 1.2) было не так просто. Заметим, что на поверхности сферы происходит скачок поля, равный  $(1/4\pi\epsilon_0) \cdot q/a^2 = 4\pi(1/4\pi\epsilon_0) \cdot (q/4\pi a^2) = \sigma/\epsilon_0$ , где  $\sigma = \Delta q/\Delta S = q/4\pi a^2$  – поверхностная плотность зарядов на сфере.

Если заряд  $q$  равномерно распределен по шару радиуса  $a$ , то снаружи шара поле точно такое же:  $E = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot q/r^2$ ; вообще любое сферически симметричное распределение зарядов снаружи дает поле, как точечный суммарный заряд. Внутри шара поток по-прежнему записывается как  $4\pi r^2 E$ , а заряд внутри контрольной поверхности равен  $qr^3/a^3$  из подобия; получаем  $4\pi r^2 E = 4\pi(1/4\pi\epsilon_0) \cdot qr^3/a^3 \implies E = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot qr/a^3$ . На поверхности шара никакого скачка нет. И в общем случае для скачка поля необходима конечная поверхностная плотность заряда  $\sigma$ , т.е. бесконечная объемная плотность  $\rho$ .

Теперь вернемся к силовым линиям. Если в каком-то месте силовые линии оборвались или, наоборот, возникли, то окружаем эту область замкнутой поверхностью. Так как числа входящих и выходящих линий не равны, имеется поток поля и внутри поверхности будет некомпенсированный заряд. Мы убедились, что силовые линии начинаются и оканчиваются только на зарядах.

## 1.6 Проводники в электрическом поле. Метод изображений

Для симметричного распределения зарядов электрическое поле удастся найти с минимальными затратами, применяя теорему Гаусса. Такие случаи, разумеется, сравнительно редки. При произвольном, но известном расположении зарядов нахождение поля требует только применения принципа суперпозиции. Однако распределение зарядов не всегда известно. Метод изображений – это полезный частный прием для систем, включающих известные заряды и проводники.

В **проводниках** электрические заряды движутся свободно. Наиболее типичные

проводники – это металлы, но есть и много других видов проводников. В принципе, любой материал проводит ток, но не любой годится для изготовления проводов.

Если внести проводник в поле, оно начнет перемещать заряды (другими словами, пойдет ток). Легко видеть, что заряды перемещаются так, чтобы компенсировать внешнее поле внутри металла. Иначе в куске металла неопределенное время протекал бы ток из-за того только, что к нему поднесли заряд (вечный двигатель). Реально токи идут короткое время, пока не исчезнет поле. После установления равновесия в проводнике  $\mathbf{E} = 0$ . Следовательно, в электростатике проводники будут эквипотенциалами при любой форме и независимо от распределения зарядов снаружи. (Конечно, конкретные значения потенциалов зависят от этих факторов). Электрическое поле у поверхности проводника всегда перпендикулярно этой поверхности. Типичная задача электростатики и состоит в нахождении поля и/или потенциала в области, часть границ которой образована проводниками.

Еще одно свойство проводников: внутри проводника не может находиться нескомпенсированный заряд. Действительно, при нулевом поле нулевым будет и поток через любую замкнутую поверхность, которая уместается целиком внутри проводника. Тогда согласно (1.11) заряд внутри такой поверхности нулевой. Это не значит, что проводник нельзя зарядить. Избыточные заряды на проводнике – совершенно обычное дело, но все они «выталкиваются» на поверхность проводника. Если в проводнике имеется полость, не содержащая зарядов, то и внутри полости поле равно нулю (экранировка).

Поднесем заряд  $q$  к тонкой металлической плоскости. Он притянет заряды обратного знака на обращенную к нему поверхность. Силовые линии выходят из заряда и оканчиваются на плоскости перпендикулярно к ней (рис. 1.8). Картина поля очень похожа на левую половину рис. 1.4, где изображены силовые линии для противоположных зарядов  $q$  и  $-q$ . Поэтому дополним рис. 1.8 симметрично расположенным зарядом  $-q$ , проведем к нему пунктиром линии поля и уберем металлическую пластину. Плоскость симметрии – эквипотенциаль  $\varphi = 0$ . Если вернуть пластину, поле не изменится. После этого  $-q$  можно убрать, что не повлияет на левую часть картины. Значит, такая же конфигурация поля получится и в исходной задаче между зарядом и пластиной (а также между зарядом и проводящим полупространством).

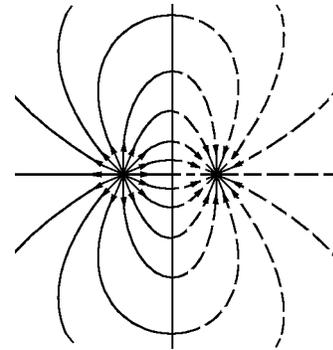


Рис. 1.8.

Распределение зарядов на плоскости имитирует заряд  $-q$ , находящийся с другой стороны плоскости – **изображение** заряда  $q$ . Наблюдатель, находящийся с той же стороны, что и  $q$ , чувствует действие настоящего  $q$  и фиктивного ( $-q$ ) в симметричном положении за плоскостью. На самом деле справа поля и тем более заряда  $-q$ , нет. Наблюдатель, расположенный справа от плоскости, чувствует поле настоящего  $q$  и поле распределенных по плоскости зарядов, неотличимое от изображения  $-q$ , «наложенного» на настоящий  $q$ : в итоге справа получается  $\mathbf{E} = 0$ , как и должно быть.

Поле на границе получим, складывая поля заряда и изображения:  $\mathbf{E} =$

$(1/2\pi\epsilon_0)qh/(h^2 + r^2)^{3/2}$ ; здесь  $h$  – расстояние от  $q$  до плоскости,  $r$  – радиус из центра симметрии. Из теоремы Гаусса, примененной к участку плоскости, найдем плотность поверхностных зарядов  $\sigma = \epsilon_0 E$ . Сила взаимодействия заряда с плоскостью такая же, как с фиктивным зарядом:  $F = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot q^2/4h^2$ . Попробуйте получить эту силу, интегрируя взаимодействия  $\sigma$  и  $q$ .

В общем, если удалось решить задачу с известным распределением зарядов и найти форму эквипотенциалей, то тем самым решен еще класс задач о взаимодействии куска металла в форме любой из этих эквипотенциалей со всеми зарядами, кроме попавших внутрь этого куска. Последние теперь сидят на поверхности, но действуют в наружной области точно, как внутренние. Говорят, что они являются «изображением» внешних зарядов, которые в куске металла видны, как в зеркале (в общем случае кривом).

Например, что «видит» заряд  $q$  в металлическом шаре радиуса  $a$ , находясь на расстоянии  $R > a$ ? Вначале рассмотрим шар с нулевым потенциалом, т.е. заземленный. Известно, что в выпуклом зеркале (самовар, елочный шар) мы видим уменьшенное зеркальное изображение. Попробуем, следуя этой аналогии, поместить внутрь шара, напротив  $q$ , заряд  $-q'$  на некотором расстоянии  $x$  от центра. Взяв любую точку на шаре, расстояния от которой до зарядов  $r_1$  и  $r_2$ , запишем условие  $\varphi = 0 = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot (q/r_1 - q'/r_2)$ , откуда  $r_1/r_2 = q/q'$ . В п. 1.2 мы видели, что при  $x = a^2/R$  отношение  $r_1/r_2 = R/a$  для любой точки на сфере. Получаем  $q' = qa/R$ : изображение подобрано. Простое решение получилось благодаря счастливой форме шара; для куба, например, потребуется бесконечное число изображений. Еще раз отметим, что шар при нулевом потенциале (заземленный) имеет ненулевой заряд  $-q'$ ; он пришел из земли, притянутый зарядом  $q$ .

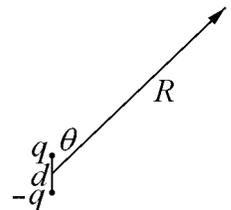
Незаряженный шар получим, поместив дополнительно в центр заряд  $+q'$ . При этом эквипотенциальность не нарушится. В действительности заряды обоих изображений сидят на поверхности шара, создавая некоторую плотность заряда, и кажутся точечными только снаружи. Заметим, что незаряженный шар притягивается к заряду  $q$  (изображение обратного знака находится ближе).

## 1.7 Поле и потенциал диполя

«Гольй» заряд встречается в быту не так часто, иначе вокруг постоянно ударяли бы молнии. Обычно заряд компенсирован (например, в атомах). Однако следы распределения заряда и в этом случае могут проявляться. На близких расстояниях не может быть общих и в то же время простых зависимостей, и мы займемся полем системы зарядов на больших расстояниях.

Рассмотрим **диполь**: два заряда  $q$  и  $-q$  на расстоянии  $d$  (рис. 1.9). Рис. 1.9.

На большом расстоянии  $R$  расстояния  $r_1$  и  $r_2$  от зарядов до точки наблюдения близки. Потенциал  $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot q \cdot (1/r_1 - 1/r_2) = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot q(r_1 - r_2)/r_1 r_2 \cong (1/4\pi\epsilon_0) \cdot qd \cos \theta / R^2$ . Произведение  $qd$  называют **дипольным моментом**  $p$ . Поскольку входит угол  $\theta$ , естественно считать  $p$  вектором, направленным от  $(-q)$  к  $(+q)$ :  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ . В векторном виде



$\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot (\mathbf{p}\mathbf{R})/R^3$ . Поле считается как  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ; в сферических координатах

$$E_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{R^3}, \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{R^3}.$$

Иногда нужны проекции на направление вдоль оси диполя и перпендикулярное к нему:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(3 \cos^2 \theta - 1)}{R^3}, \quad E_\perp = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot 3 \cos \theta \sin \theta}{R^3}.$$

Можно было бы получить  $\mathbf{E}$  прямым сложением полей от зарядов, учитывая их почти одинаковую величину и почти противоположное направление. Заметим, что  $\varphi$  и  $E$  спадают с расстоянием быстрее, чем в кулоновском случае.

Для произвольной системы зарядов  $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot \sum q_i/r_i$ . На больших по сравнению с размером системы расстояниях пишем (в том же приближении)

$$r_i = R - \frac{(\mathbf{R}\mathbf{X}_i)}{R},$$

где  $\mathbf{X}_i$  – радиус-вектор заряда  $q_i$ . Получаем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sum q_i}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum q_i(\mathbf{R}\mathbf{X}_i)}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{R} \cdot \sum q_i \mathbf{X}_i)}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{R}\mathbf{p})}{R^3}.$$

Видно, что дипольный момент системы дается суммой  $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{X}_i$ . Проверьте, что для простейшей системы ( $\pm q$ )  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ . Дипольный момент не зависит от положения начала координат (откуда отмеряются векторы  $\mathbf{X}_i$ ), если полный заряд системы  $Q = 0$ . Если  $Q \neq 0$ , то зависимость будет. К счастью, в этом случае дипольный момент не так нужен, так как первое слагаемое на больших расстояниях преобладает.

Бывает, что и  $Q$  и  $\mathbf{p}$  равны нулю (например, два навстречу направленных одинаковых диполя). Тогда поле спадает еще быстрее и надо учитывать так называемый квадрупольный момент, и т.д. В этом и состоит смысл утверждения, что разноименные заряды компенсируются. Полная компенсация будет только при сферически симметричном распределении заряда, а при любом отклонении поле просто спадает быстрее, чем кулоновское. По сравнению с кулоновским дипольные и более симметричные поля называют короткодействующими. Поэтому, скажем, водяной пар можно считать идеальным газом, хотя у молекул есть заметный дипольный момент. Газ из заряженных частиц (плазма) с дальнедействующими кулоновскими силами будет идеальным при сравнительно больших температурах, нежели газ нейтральных молекул.

## 1.8 Конденсаторы. Энергия электрического поля. Электрические натяжения

Простейший – плоский – конденсатор состоит из двух пластин площади  $S$ , разделенных расстоянием  $d$ . Пластины заряжают разноименно (заряды  $\pm\sigma$  на единицу площади). Снаружи системы поля практически нет, внутри  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Найдем силу притяжения пластин. Писать  $F = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot q^2/d^2$  неверно, так как заряды не точечные; правильная

сила  $F = qE/2 = q \cdot (\sigma/2\varepsilon_0)$ . Для каждой пластины надо брать внешнее поле – от другой пластины; либо надо учесть, что на заряд  $q$  действует среднее поле по толщине слоя, в котором этот  $q$  распределен. От нуля до  $E = \sigma/\varepsilon_0$  среднее как раз  $\sigma/2\varepsilon_0$ .

Сила на единицу площади  $F/S = qE/2S = \sigma E/2 = \varepsilon_0 E^2/2$ . Эту величину, зависящую только от  $E$ , называют **натяжением** электрического поля. (Иногда говорят об электрическом давлении, однако это «давление» отрицательно – сила направлена в ту сторону, где поле есть: пластины притягиваются). Можно представлять себе линии поля как некие резинки, растянутые с силой  $\varepsilon_0 E^2/2$  на единицу площади.

Пусть вначале конденсатор был «сплюснен», имея  $d \cong 0$ , а затем его растянули до зазора  $d$ . При этом придется произвести работу  $W = Fd = \varepsilon_0 E^2 Sd/2 = (\varepsilon_0 E^2/2) \cdot V$ , где  $V$  – объем конденсатора. Поскольку в системе нет других изменений, кроме появления в объеме поля  $E$ , эту работу следует считать израсходованной на создание энергии электрического поля. Следовательно, энергия единицы объема поля  $E$  равна

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \text{ (СИ); } w = \frac{E^2}{8\pi} \text{ (СГС).}$$

Если  $E$  переменна в пространстве, полная энергия поля

$$U = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV \text{ (СИ); } U = \int \frac{E^2}{8\pi} dV \text{ (СГС).} \quad (1.12)$$

*Пример.*

Энергия поля сферы радиуса  $r$ , на поверхности которой равномерно распределен заряд

$$q: E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2}, \quad U = \int \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2R^4} \cdot 4\pi R^2 dR = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2} \cdot \int_r^\infty \frac{dR}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2r}.$$

Как быть с точечными зарядами? Например, у электрона размера пока найти не удалось, а энергия поля в проверенном объеме гораздо больше, чем электрону полагается (забегая вперед: полагается  $mc^2$ ). Реально на малых расстояниях и при больших полях неправильна электростатика (как и вообще классическая электродинамика; это уже отмечалось в п. 1.3).

Казалось бы, вместо (1.12) проще написать энергию взаимодействия зарядов  $U = \sum q\varphi = \int \rho\varphi dV$ . Проверим: для сферы потенциал на поверхности  $\varphi = (1/4\pi\varepsilon_0) \cdot q/r$ , весь заряд при этом потенциале,  $\rightarrow U = (1/4\pi\varepsilon_0) \cdot q^2/r$ . Получилось вдвое больше, поскольку так каждое взаимодействие учитывается дважды. Это легко исправить; окончательно **в электростатике** формула

$$U = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV \quad (1.13)$$

тоже верна, если правильно выбран потенциал ( $\varphi = 0$  на  $\infty$ ). Подразумевается, что потенциал  $\varphi_i$  в месте расположения заряда  $q_i$  создается всеми зарядами, кроме него самого. Формула (1.12) обычно удобнее и к тому же верна и вне рамок электростатики. Заметим, что для рассмотренного примера  $\rho\varphi/2$  «концентрировано» на поверхности шара, совсем не там, где настоящая плотность энергии поля  $\varepsilon_0 E^2/2$ .

Для плоского конденсатора  $U = (\varepsilon_0 E^2/2)Sd = \sigma^2 Sd/2\varepsilon_0 = q^2 d/(2\varepsilon_0 S) = q^2/2C$ . Здесь  $C = \varepsilon_0 S/d$  – **емкость** конденсатора; в СГС  $C = S/(4\pi d)$ . Вместо плоских одинаковых пластин можно взять любые два куска металла (обкладки), заряд  $q$  с одного переносится на другой и тоже получается конденсатор. Поле в пространстве в общем пропорционально  $q$ , а энергия опять  $q^2/2C$ , причем емкость  $C$  зависит только от геометрии (формы и расположения обкладок). Для простой формы емкость будет порядка размеров $\cdot\varepsilon_0$ , а в СГС – просто порядка размеров; плоский конденсатор ( $d \ll S^{1/2}$ ) не подходит под это правило.

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора. Если текущее напряжение  $V$ , то работа для увеличения заряда на  $dq$  будет  $V dq$ . С другой стороны, эта величина равна изменению энергии конденсатора  $d(q^2/2C) = qdq/C$ . Получаем равенства

$$q = CV, \quad U = \frac{q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2},$$

верные для конденсатора любой формы.

Чтобы найти емкость, конденсатор мысленно заряжают. Затем вычисляется напряжение и по связи  $q = CV$  – емкость. Можно задавать напряжение и рассчитывать заряд, а также определять энергию по заряду либо напряжению.

*Примеры:*

Сферический конденсатор с концентрическими обкладками радиусов  $r$  и  $R$ . Надо интеграл в прошлом примере взять в пределах от  $r$  до  $R$ ,  $U = (1/4\pi\varepsilon_0) \cdot (q^2/2)(1/r - 1/R)$ , откуда  $C = 4\pi\varepsilon_0 rR/(R - r)$ . Проверьте, что при малом зазоре  $R - r$  это переходит в формулу для плоского конденсатора. При  $R = \infty$  имеем  $C = 4\pi\varepsilon_0 r$  (СИ), в СГС  $C = r$ . Можно говорить о емкости шара (равной радиусу в СГС), имея в виду емкость между ним и землей, эквивалентной бесконечно удаленной второй сфере.

Цилиндрический конденсатор. Радиусы те же, длина  $L$ . Заряжаем зарядом  $q$  внутреннюю обкладку, на внешней  $-q$ . Внутри поле  $(1/4\pi\varepsilon_0) \cdot 2\lambda/r = (1/4\pi\varepsilon_0) \cdot 2q/(Lr)$ , снаружи нуль. Напряжение  $V = \int (1/4\pi\varepsilon_0) \cdot 2q/(Lr) dr = ((1/4\pi\varepsilon_0) \cdot 2q/L) \ln(R/r)$ . Емкость  $C = 4\pi\varepsilon_0 L/(2 \ln(R/r))$ , в СГС  $C = L/(2 \ln(R/r))$ .

Способность конденсаторов накапливать энергию ограничена опасностью пробоя. Если между пластинами воздух, то предельное  $E < 30$  кВ/см, или 100 СГС, откуда  $w < 500$  эрг/см<sup>3</sup> = 50 Дж/м<sup>3</sup>. Разные ухищрения увеличивают плотность энергии не более чем на 1 – 2 порядка. Зато конденсаторы содержат высококачественную энергию в отличие от дров и т.п. и развивают при разряде большую мощность.

В СИ единица емкости – **фарада**. Ее<sup>7</sup> можно выразить через единицу СГС (см), зная вольт:  $\Phi \cdot \text{В}^2 = \text{Дж}$ , откуда  $1 \Phi = 10^7 \cdot 300^2 = 9 \cdot 10^{11}$  см. Емкость человека около  $30 \div 50$  см или почти столько же пФ. Пико ( $10^{-12}$ ) – это, без сомнения, довольно редкая приставка, т.е. фарада – крайне неудобная единица. Зато ее введение позволяет короче записать размерность  $\varepsilon_0$ :  $\Phi/\text{м}$ .

<sup>7</sup>В последнее время (где-то между 1977 и 1980 г.) фарада «сменила пол» и теперь называется фарад. Мы предпочитаем женский род, как в старину, в основном потому, что долгие единицы: один микрофарад, один пикофарад звучат несколько дико.

Последовательное соединение  $C_1$  и  $C_2$ :  $q$  один, а  $V$  складываются;  $\rightarrow 1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ . Параллельное:  $C = C_1 + C_2$ . Еще бывают **никакие** соединения (не сводящиеся к параллельному и последовательному). Тогда нужно честно находить состояние каждого конденсатора в цепи, из тех условий, что суммарный заряд в узлах равен нулю (или заданному  $q$  для входного и выходного узла) и сумма напряжений по любому замкнутому контуру нулевая. Затем делим  $q$  на суммарное напряжение между входным и выходным узлом.

Рассмотрим металлическую пластину, помещенную в плоский конденсатор (рис. 1.10). Пусть на обкладках конденсатора помещены заряды  $\pm q$ . Энергия системы  $U = q^2/2C(x)$ , где  $C(x)$  – емкость, зависящая от расстояния  $x$ , на которое вставлена пластина:

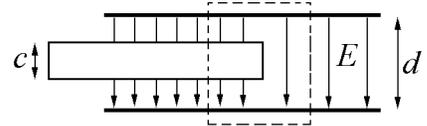


Рис. 1.10.

$$C(x) = \varepsilon_0 b \left( \frac{x}{d-c} + \frac{a-x}{d} \right) = \varepsilon_0 \frac{ab}{d} + \varepsilon_0 b x \left( \frac{1}{d-c} - \frac{1}{d} \right),$$

$a$  – длина обкладок,  $b$  – ширина обкладок (перпендикулярно плоскости рисунка). Поскольку энергия уменьшается с возрастанием  $x$ , пластина втягивается с силой

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx} = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx} = \varepsilon_0 \frac{V^2 b}{2} \left( \frac{1}{d-c} - \frac{1}{d} \right).$$

В таком направлении силы легко убедиться, рассмотрев картину силовых линий вблизи торца пластины. Замечательно, что втягивание – в чистом виде краевой эффект, но энергетический подход позволил решить задачу, не рассматривая неоднородностей поля явно (область неоднородности смещается вместе с пластиной, и связанная с неоднородностью часть энергии поля постоянна).

Рассмотрим ту же задачу, используя электрические натяжения. Поле в свободной части конденсатора  $E = E_y = V/d$ , тогда в зоне пластины  $E_1 = V/(d-c)$ . Выделяем поверхность с границами вне зоны краевого эффекта (показана пунктиром). Сила справа  $\varepsilon_0 b d E^2/2 = \varepsilon_0 b V^2/2d$ , сила слева  $\varepsilon_0 b (d-c) E_1^2/2 = \varepsilon_0 b V^2/2(d-c)$ , их разность  $\varepsilon_0 (bV^2/2)(1/(d-c) - 1/d)$ . Выходит тот же результат, что и при энергетическом подходе; правильный знак силы (пластина втягивается) получается, если силовым линиям приписать **давление**  $\varepsilon_0 E^2/2$  поперек их направления ( $E^2/8\pi$  в СГС). Обратите внимание, что сила, вычисляемая по натяжениям, приложена «к пустому месту», а реально втягивающая сила действует на торец металлической пластины, где собираются поляризационные заряды. Следовательно, действие электрических давлений/натяжений на элементарную площадку физического смысла не имеет, а правильный результат получается только для полной замкнутой поверхности.

Таким образом, электрическое поле можно рассматривать как некоторую упругую среду, для которой не выполняется закон Паскаля: вдоль силовых линий действует натяжение  $\varepsilon_0 E^2/2$  ( $E^2/8\pi$  в СГС), как будто это натянутые резинки, а поперек – такой же величины давление, как будто резинки друг от друга отталкиваются. Иногда такое представление позволяет вычислять силы проще, чем прямолинейное суммирование

произведений поля на заряды. При этом надо помнить, что правильное значение силы, вычисленной по натяжениям, получается, если рассматривать объем, ограниченный замкнутой поверхностью.

Сейчас уместно вспомнить об элементарном заряде. Милликен помещал маленькие электрически заряженные капли в конденсатор. Без поля капли падают с постоянной скоростью  $mg/(6\pi\eta R)$ , которую можно измерить непосредственно. Затем, включая поле, можно капли уравновесить или заставить их падать вверх. По величине напряжения на конденсаторе определяется уравнивающая сила  $qE$ . Оказалось, что заряд капли меняется только квантами величины  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  СГС =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

В заключение напомним основные уравнения электростатики:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{по любой замкнутой поверхности } S; \quad \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q \text{ в СГС,}$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{L} = 0 \quad \text{по любому контуру } L.$$

Это – два из **уравнений Максвелла** (для случая электростатики). Дальше мы увидим, как они изменятся в более общем случае и как к ним добавятся новые.