

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Курс лекций для ФМШ

ДИЭЛЕКТРИКИ

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

А. П. Ершов

3 января 2011 г.

Глава 2

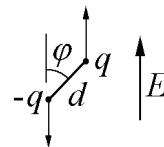
ДИЭЛЕКТРИКИ

Противоположностью проводникам являются **изоляторы**, или **диэлектрики**, в которых заряды не могут свободно двигаться по всему объему. Однако любой атом или молекула состоят из электрических зарядов, которые, разумеется, реагируют на электрическое поле. Поэтому и диэлектрик как целое взаимодействует с полем. Механизмы такого взаимодействия и его следствия рассмотрены в этой главе.

2.1 Диполь во внешнем поле

Некоторые диэлектрики **полярны** – состоят из молекул, имеющих дипольный момент. Естественный масштаб дипольного момента – произведение заряда электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл = $4,8 \cdot 10^{-10}$ СГС на атомный размер $a \simeq 10^{-8}$ см¹. Реально «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов разнесены на меньшее расстояние, и типичное значение p порядка 10^{-18} СГС, или $(1/3) \cdot 10^{-29}$ СИ. Эта внесистемная единица называется **дебай**. Например, дипольный момент молекулы воды 1,85 дебая.

На диполь в поле \mathbf{E} будет действовать пара сил, разворачивающая его вдоль поля. Момент сил $\tau = qEd \sin \varphi = pE \sin \varphi$ (угол φ от направления E). Потенциальная энергия диполя, отсчитанная от «нейтрального» положения поперек поля:



$$U = -q(d/2) \cos \varphi \cdot E - q(d/2) \cos \varphi \cdot E = -pE \cos \varphi = -(\mathbf{pE}).$$

Рис. 2.1.

Отдельно взятый, свободный и произвольно направленный диполь при включении внешнего поля начнет колебаться. С учетом взаимодействия молекул (хотя бы столкновений) в дипольном газе установится равновесие по Больцману: число молекул с энергией U пропорционально² $\exp(-U/kT)$. Возникнет ненулевая средняя компонента \mathbf{p} вдоль поля, так как положение вдоль энергетически выгоднее. Примем для оценки простейшую модель: пусть диполь ориентирован либо точно по полю (n_+ молекул из

¹Единица длины 10^{-8} см = 10^{-10} м, удобная для атомных явлений, называется ангстрем (Å).

²Здесь и далее k понимается как постоянная Больцмана, поскольку электростатический коэффициент с таким же обозначением мы практически не используем.

общего числа N), либо против (таких n_-). Из уравнений баланса и равновесия

$$n_+ + n_- = N, \quad n_+/n_- = \exp(2pE/kT) \quad \text{следует:}$$

$$n_+ = N \frac{\exp(pE/kT)}{\exp(pE/kT) + \exp(-pE/kT)}, \quad n_- = N \frac{\exp(-pE/kT)}{\exp(pE/kT) + \exp(-pE/kT)},$$

откуда средний дипольный момент

$$\langle p \rangle = p(n_+ - n_-)/N = p \frac{\exp(pE/kT) - \exp(-pE/kT)}{\exp(pE/kT) + \exp(-pE/kT)} = p \cdot \text{th}(pE/kT).$$

Для типичной молекулы с дипольным моментом $p = 1$ дебай при 300 К отношение $pE/kT = 1$ при $E \simeq 40000$ СГС $\approx 10^7$ В/см. Такое поле создать практически нельзя из-за пробоя. При $pE/kT \ll 1$, что бывает на практике, выражение для среднего момента упрощается: $\langle p \rangle = p \cdot (pE/kT)$. Средний момент составляет малую долю собственного дипольного момента. Тепловое движение мешает диполям упорядочиться.

Рассмотренная модель кажется странной, но она зато простая. В более сложном случае, когда допускаются любые ориентации диполя,

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{\int p \cos \varphi \cdot \exp(pE \cos \varphi/kT) \cdot 2\pi \sin \varphi d\varphi}{\int \exp(pE \cos \varphi/kT) \cdot 2\pi \sin \varphi d\varphi} = \\ &= p \cdot \frac{\int x \cdot \exp(pEx/kT) \cdot dx}{\int \exp(pEx/kT) \cdot dx} = p \cdot \mathcal{L} \left(\frac{pE}{kT} \right). \end{aligned}$$

Здесь \mathcal{L} – функция Ланжевена

$$\mathcal{L}(\xi) = \left(\frac{e^\xi + e^{-\xi}}{e^\xi - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right).$$

В данном случае $\xi = pE/kT$. Для $pE/kT \ll 1$ можно показать, что $\mathcal{L} \cong pE/3kT$ (надо разложить экспоненты в ряд). Получаем степень, или средний процент ориентации диполя $\langle p \rangle/p = pE/3kT$ – небольшую величину, пропорциональную внешнему полю и того же порядка, как в простейшей модели. В поле 30 кВ/см диполь ориентирован на $\cong 10^{-3}$. Эта малая, по видимости, доля достаточна, чтобы существенно изменить поле в среде, из-за относительно большой величины дипольного момента p .

2.2 Наведенная поляризация. Поляризуемость.

Бывают также **неполярные** диэлектрики, молекулы которых не имеют собственного дипольного момента. Таковы, например, симметричные молекулы типа H_2 , O_2 , CO_2 . Однако во внешнем поле заряды неизбежно «разъедутся», и некоторый дипольный момент появится (**наведенная** поляризация).

Простая модель – атом Томсона: электрон e^- сидит в центре шара, равномерно заряженного зарядом e^+ . Внешнее поле E сместит электрон из центра на расстояние x . В равновесии $E = (1/4\pi\epsilon_0)ex/a^3$, где a – радиус атома. Смещение $x = 4\pi\epsilon_0 Ea^3/e$, а наведенный дипольный момент $p = ex = 4\pi\epsilon_0 Ea^3$.

Другая модель – металлический шарик радиуса a . Внешнее поле E создает на его поверхности потенциал $\varphi_E = -Ea \cos \vartheta$. Помещаем в духе метода изображений внутрь диполь p , создающий на поверхности $\varphi_p = (1/4\pi\epsilon_0)p \cos \vartheta/a^2$. Суммарный потенциал занулится при $p = 4\pi\epsilon_0 E a^3$ – то же значение.

Как ни странно, такие грубые модели дают результат, близкий к истине. Реально для атома водорода $p = 4\pi\epsilon_0 \cdot (9a_0^3/2)E$, если a_0 – боровский радиус ($0,53 \cdot 10^{-8}$ см). Коэффициент 4,5 не так мал, но и атом на самом деле не имеет четко определенного размера. Из этих примеров следует мораль: грубость модели не препятствует выполнению ее предсказаний. Атом Томсона, как и «металлический шарик» атомных размеров дают неплохое приближение с точки зрения наведенного момента, хотя реальный атом устроен не так. В то же время видно, что предсказания модели не обеспечивают ее реалистичности.

У дипольной молекулы тоже есть наведенная поляризация, но она несущественна: собственный $p \simeq ea$, средний $\langle p \rangle \simeq e^2 a^2 E/kT$, наводится $p' = 4\pi\epsilon_0 E a^3$. Отношение $\langle p \rangle/p' \simeq ((1/4\pi\epsilon_0)e^2/a)/kT$ – отношения химической энергии связи атома к тепловой.

Полезна внесистемная единица **электронвольт**: 1 эВ приобретает 1 электрон, пройдя разность потенциалов 1 вольт. $1 \text{ эВ} = e \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$. Для атома водорода характерная энергия $(1/4\pi\epsilon_0)e^2/(2a_0) = 13,6 \text{ эВ}$. При химических реакциях в молекулах происходит перестройка, и характерные изменения энергии порядка электронвольта. Например, батарейка дает 1,5 вольта из-за того, что в ней идет химическая реакция с выигрышем 1,5 эВ. Эта же «химическая» энергия поддерживает функционирование живых существ.

1 эВ равен тепловой энергии kT при температуре $1 \text{ эВ}/k = 11600 \text{ К}$. Эту температуру тоже называют электронвольт. Видно, что при комфортной температуре ориентационная поляризация превышает наведенную порядка на два: по существу, потому, что внешнее поле меньше внутримолекулярного. При высоких же температурах атомов нет как таковых.

Следовательно, в обоих типах диэлектриков во внешнем поле молекула приобретает дипольный момент вдоль поля, пропорциональный напряженности поля E , что записывается в виде:

$$p = \epsilon_0 \alpha_{SI} E \text{ (СИ)}, \quad p = \alpha_{CGS} E \text{ (СГС)}. \quad (2.1)$$

Поляризуемость α для неполярных веществ порядка объема молекулы, для полярных гораздо больше; p тогда имеет смысл среднего в тепловом равновесии.

Естественно, величина поляризуемости зависит от системы единиц; неожиданность состоит в том, что различие не сводится к пересчету по размерности (в обоих случаях – объема), а требуется еще коэффициент 4π . Например, для модели проводящего шара $\alpha_{SI} = 4\pi a^3$, тогда как $\alpha_{CGS} = a^3$. Обратим внимание, что здесь нарушилось правило перевода из СИ в СГС $\epsilon_0 \rightarrow 1/4\pi$, которым мы до сих пор пользовались. Причина расхождения – в несколько нестандартном определении СИ-поляризуемости в (2.1): вместо

$4\pi\epsilon_0$ использован ϵ_0 – «укороченный» коэффициент³. Здесь кроется опасность: указанная в справочнике поляризуемость 10^{-30} м³ может соответствовать 10^{-24} см³, а может – и $0,798 \cdot 10^{-25}$ см³, в зависимости от аккуратности авторов. Отчасти поэтому вместо поляризуемости удобнее пользоваться более однозначной диэлектрической проницаемостью (см. ниже).

В однородном поле суммарная сила, действующая на диполь, нулевая. В неоднородном, например вблизи заряда q , диполь ориентируется так, чтобы притягиваться к q (т.е. втягиваться в область сильного поля). Сила, действующая на диполь, будет $e\Delta E = ed \cdot |\nabla E| = p \cdot |\nabla E| = \epsilon_0(\alpha/2) \cdot \nabla(E^2)$ (СИ), или $(\alpha/2) \cdot \nabla(E^2)$ (СГС).

2.3 Поле в среде. Векторы поляризации и электростатической индукции

Каждая молекула диэлектрика в поле E приобретет момент $p \propto E$. Следовательно, и дипольный момент единицы объема вещества, содержащей n молекул, также пропорционален полю:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E} \quad (\mathbf{P} = \chi\mathbf{E} \text{ в СГС}).$$

\mathbf{P} называется **вектором поляризации**. В СГС размерности вектора поляризации и электрического поля совпадают (заряд·длину/длину³ = заряд/длину²); в СИ размерность \mathbf{P} Кл/м² и отличается от размерности \mathbf{E} . Безразмерный коэффициент χ называется **диэлектрической восприимчивостью**. В простейшем случае, когда взаимное влияние молекул несущественно, $\chi = n\alpha$, откуда видно, что справочные данные способны вызвать ту же путаницу, как в случае с поляризуемостью. На данный момент для нас важна пропорциональность: $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$.

Поляризовать диэлектрик можно, внося его в заряженный конденсатор (рис. 2.2). Пластины, на которых плотность поверхностных зарядов равна $\pm\sigma$, создают поле E_{out} ; в диэлектрике возникнет поляризация P . Суммарный дипольный момент диэлектрика будет $PV = PSd$, где S – площадь, d – толщина образца диэлектрика. Поскольку каждая молекула поляризуется, т.е. заряды в ней разойдутся, справа на поверхности диэлектрика «вылезет» поляризационный поверхностный заряд $+\sigma_p$, а слева будет $-\sigma_p$. Внутри же диэлектрик будет нейтральным. Дипольный момент образца можно написать и как $(\sigma_p \cdot S) \cdot d$, откуда $\sigma_p = P$. Если вектор \mathbf{P} направлен под углом к поверхности, надо брать нормальную составляющую; окончательно $\sigma_p = P_{\perp}$.

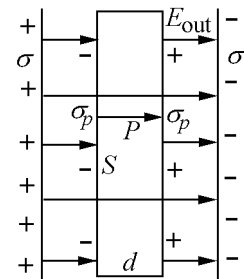


Рис. 2.2.

Между зарядами на пластинах конденсатора и зарядами на поверхности диэлектрика есть важное различие. Первые мы можем контролировать, перемещать и измерять прямо. Например, при зарядке конденсатора током I в течение времени t заряд $\sigma S = It$.

³Система СИ, как говорят, рационализирована, а именно, в закон Кулона (1.2) явно вводится 4π . Этим достигается укорочение ряда других формул, из которых 4π выпадает. Отказ от 4π в (2.1), явно непоследовательный, также сделан ради краткости.

Зарядив конденсатор, можно унести одну из пластин куда угодно вместе с ее зарядом. Такие заряды называют **свободными**.

Напротив, поляризационные заряды на поверхности диэлектрика нельзя прямо контролировать по амперметру, так как они не приходят по проводам. Их нельзя унести, даже срезав слой диэлектрика: при этом получим две противоположно заряженные поверхности. Поляризационные заряды называют еще **связанными**; их можно определять только косвенно, по их влиянию на поле свободных зарядов.

Из рис. 2.2 ясно, что поляризационные заряды ослабляют поле в диэлектрике. Снаружи диэлектрика (но, конечно, внутри конденсатора) $E_{\text{out}} = \sigma/\varepsilon_0$, а внутри $E_{\text{in}} = (\sigma - \sigma_p)/\varepsilon_0$. Вспомним, что $\sigma_p = P$ и что в вакууме $P = 0$, так как вакуум не поляризуется. Тогда можно записать равенство:

$$(\varepsilon_0 E + P)_{\text{out}} = (\varepsilon_0 E + P)_{\text{in}},$$

Полезно ввести новый вектор

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.2)$$

который в данном случае одинаков внутри диэлектрика и вне его. В то время как поле \mathbf{E} ослабляется поляризационными зарядами, \mathbf{D} их «не чувствует». В СГС $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$.

Рассмотрим теорему Гаусса для поверхностей, показанных пунктиром на рис. 2.3. Для поля \mathbf{E} считается **весь** заряд внутри, включая поляризационный (случай а):

$$\varepsilon_0 E S = Q = (\sigma S - \sigma_p S).$$

Если поверхность не захватит диэлектрик, в правой части будет другая величина: σS (случай б). Теперь напишем теорему Гаусса для вектора \mathbf{D} :

$$D S = (\varepsilon_0 E S + P S) = \begin{cases} (\sigma S - \sigma_p S) + \sigma_p S \equiv \sigma S & (\text{а: в веществе}) \\ \sigma S & (\text{б: в пустоте}). \end{cases}$$

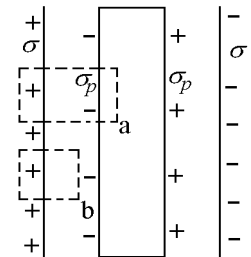


Рис. 2.3.

Результат не зависит от того, захватывает замкнутая поверхность диэлектрик или нет.

Вектор \mathbf{D} называют **вектором электростатической индукции** (короче – вектором индукции), иногда – вектором смещения (англ. displacement); он устроен так, что его источниками являются только **свободные** заряды. Рассмотренный пример – частный случай теоремы Гаусса для вектора \mathbf{D} :

$$\oint (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = Q_{\text{своб}} \text{ (СИ)}, \quad \oint (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = 4\pi Q_{\text{своб}} \text{ (СГС)}, \quad (2.3)$$

где $Q_{\text{своб}}$ – полный свободный заряд внутри S . Никакие поверхности диэлектриков с поляризационными зарядами на них, даже попавшие внутрь S , не влияют на правую часть теоремы Гаусса (2.3) для \mathbf{D} .

2.4 Диэлектрическая проницаемость. Условия на границе двух сред

Введение нового неизвестного D упрощает решение задач. Пусть свободный заряд q окружен диэлектрическим шаром радиуса R . Как найти поле, сразу не ясно: оно зависит в том числе от неизвестных заранее поверхностных зарядов. Индукция же D находится легко из (2.3): $D = q/(4\pi r^2)$ как внутри, так и вне шара (или $D = q/r^2$ в СГС).

Чтобы найти поле E , запишем $D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0(1 + \chi)E = \varepsilon_0 \varepsilon E$. Видно, что вещество удобнее характеризовать не диэлектрической восприимчивостью χ , а **диэлектрической проницаемостью**

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (\varepsilon = 1 + 4\pi\chi \text{ в СГС}).$$

У вакуума $\varepsilon = 1$, у воды 80, у воздуха 1,00057. Напомним, что восприимчивости в СИ и СГС отличаются множителем 4π , однако для диэлектрической проницаемости эта неоднозначность компенсируется, и значения ε уже инвариантны.

В нашем примере внутри шара с проницаемостью ε : $E = q/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2)$, вне его $E = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. В конденсаторе из предыдущего параграфа $D = \sigma$, $\rightarrow E = \sigma/\varepsilon_0$ вне диэлектрика, $E = \sigma/(\varepsilon\varepsilon_0)$ внутри диэлектрика. Произведение $\varepsilon\varepsilon_0$ называют абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_a . Для вакуума $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, откуда и происходит прежнее название ε_0 – «диэлектрическая проницаемость вакуума».

Простота этих примеров позволяет легко впасть в заблуждения, вроде того, что индукция вообще не зависит от диэлектрика и равна той, которую создавали бы свободные заряды в вакууме, а поле всегда ослабляется в ε раз. Рассмотрим, однако, более сложную задачу. Пусть диэлектрический шар помещен в однородное внешнее поле E_0 . Шар поляризуется, и на его поверхности возникают поляризационные заряды; внутри поле будет ослаблено. Попробуем аналогию с металлическим шаром. Для него снаружи поле было суммой внешнего E_0 и дипольного, а внутри нулевое.

Теперь внутри, конечно, не нуль, мы предположим, что будет однородное поле E_1 (рис. 2.4). Тогда вектор поляризации $P = \varepsilon_0 \chi E_1$ и дипольный момент шара $p = \varepsilon_0 4\pi R^3 \chi E_1 / 3$. Потенциал снаружи у поверхности: $\varphi(R+0) = -E_0 R \cos \theta + p \cos \theta / (4\pi\varepsilon_0 R^2)$. Внутри $\varphi(R-0) = -E_1 R \cos \theta$. Приравняем их и учтем выражение для p ; имеем $E_1 = E_0 / (1 + \chi/3) = 3E_0 / (\varepsilon + 2)$. Поскольку $\varepsilon > 1$, поле ослабляется, но отнюдь не в ε раз; соответственно индукция $D = \varepsilon\varepsilon_0 E = 3\varepsilon_0 \varepsilon E_0 / (\varepsilon + 2)$ вовсе не равна индукции от свободных зарядов $\varepsilon_0 E_0$.

Неверно, что индукция не зависит от поляризационных зарядов; правильнее сказать, что поляризационные заряды **не являются ее источниками** (не входят в теорему Гаусса). Отсюда следует, что на поверхности раздела диэлектриков нормальная (перпендикулярная) составляющая D остается непрерывной. Это

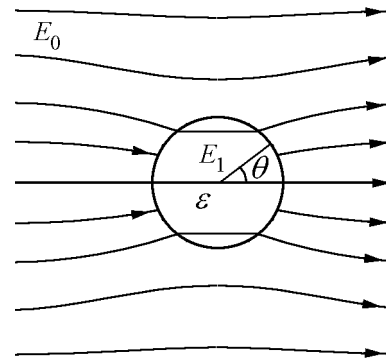


Рис. 2.4.

легко показать, поместив границу внутрь замкнутой поверхности и применив теорему: поток \mathbf{D} нулевой, так как нет свободных зарядов. Параллельная (тангенциальная) компонента \mathbf{D} может испытывать скачок на границе раздела. Наоборот, тангенциальная компонента обычного поля \mathbf{E} непрерывна (иначе можно сделать вечный двигатель, гоня заряд по замкнутому контуру вблизи поверхности). Выпишем условия на границе раздела:

$$\begin{aligned} D_{n1} &= D_{n2} & \text{или} & & \varepsilon_1 E_{n1} &= \varepsilon_2 E_{n2}, \\ E_{\tau 1} &= E_{\tau 2} & . & & & \end{aligned} \quad (2.4)$$

Второе условие мы использовали уже в прошлом примере, приравнивая потенциалы.

Еще часто думают, что диэлектрик всегда ослабляет поле внутри себя, а снаружи не меняет. Но у полюсов того же шара снаружи поле усиливается: подобно металлу, диэлектрик собирает на себя часть силовых линий и «выдает» их с другой стороны. Проводник можно трактовать как диэлектрик с $\varepsilon = \infty$.

Не лишне добавить, что индукция \mathbf{D} – это не настоящее поле, а величина, вводимая для удобства, чтобы решать задачи. В СИ это подчеркивается и отличием в размерности. Настоящее среднее поле в веществе \mathbf{E} ; в частности потенциал φ связан именно с ним: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

Часто важно знать поле внутри полости в диэлектрике. Если имеется узкая щель поперек поля, то по первому из условий (2.4) внутри $E_{in} = \varepsilon E = E + 1 \cdot P/\varepsilon_0$; в случае узкой продольной щели из второго условия $E_{in} = E = E + 0 \cdot P/\varepsilon_0$. Для сферической полости будет нечто среднее, а именно

$$E + \frac{P}{3\varepsilon_0} = E + \frac{(\varepsilon - 1)}{3} E = \frac{(\varepsilon + 2)}{3} E.$$

Коэффициент при P/ε_0 не так важен, но ясно, что поле в полости **больше** среднего в диэлектрике. Примерно такое поле действует на молекулу внутри вещества. Тогда дипольный момент этой молекулы $p = \varepsilon_0 \alpha (\varepsilon + 2) E/3$, а дипольный момент единицы объема – вектор поляризации P – будет $\varepsilon_0 n \alpha (\varepsilon + 2) E/3$. Он также равен $\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E$, откуда получаем формулу Клаузиуса-Моссотти:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3} \left(= \frac{4\pi n\alpha}{3} \text{ в СГС} \right), \quad \varepsilon = \frac{1 + 2n\alpha/3}{1 - n\alpha/3} \left(= \frac{1 + 8\pi n\alpha/3}{1 - 4\pi n\alpha/3} \text{ в СГС} \right).$$

Вспомним, что поляризуемости в СИ и СГС отличаются множителем 4π . При большой плотности n проницаемость ε может быть гораздо больше, чем примитивное приближение $1 + n\alpha$ (в СГС $1 + 4\pi n\alpha$), так как знаменатель может быть близок к нулю: в конденсированных веществах доля объема, занимаемая молекулами, $n\alpha \sim 1$. В некоторых кристаллах – сегнетоэлектриках – достигается ε порядка 10000.

2.5 Энергия поля в среде

Рассмотрим конденсатор, заполненный диэлектриком с проницаемостью ε . При заряде q поле будет $E = q/(\varepsilon_0 \varepsilon S)$, напряжение $V = qd/(\varepsilon_0 \varepsilon S)$. Емкость $C = q/V = \varepsilon \varepsilon_0 S/d$

возросла в ε раз. (Поэтому-то некоторые конденсаторы имеют неожиданно, для их размеров, большую емкость).

Если на конденсаторе имелось напряжение V , то увеличение заряда на Δq требует работы $\Delta A = V\Delta q$, а работа по зарядке конденсатора от нуля

$$A = \int_0^q V dq = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}.$$

Эта формула не чувствительна к присутствию диэлектрика. Учитывая теперь зависимость C от ε , получим, что при фиксированном напряжении V (т.е. том же поле E) энергия возрастает в ε раз, а фиксированном заряде q (который определяет индукцию D) энергия в ε раз уменьшается. Поэтому плотность энергии

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{ED}{2}, \quad \text{а в СГС: } w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{ED}{8\pi}.$$

Выражение $w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$ нетривиально. Раз настоящее среднее поле – это E , как будто должна быть энергия $\varepsilon_0 E^2/2$. Здесь влияют два фактора: средний квадрат больше квадрата среднего, а кроме того, w по смыслу вычисления включает не только чистую энергию поля, но и работу по формированию диполей. Например, в газе уместно пренебречь концентраторами поля типа Клаузиуса-Моссотти; электрическая энергия $w_e = \varepsilon_0 E^2/2$, а упругая $w_y = n\kappa x^2/2$, если диполи растягиваются как пружинки. Но $eE = \kappa x$, $w_y = neEx/2 = n\kappa E/2 = \varepsilon_0 n\alpha E^2/2 = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2/2$. Полная $w = w_e + w_y = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$.

Силы в диэлектриках тоже изменяются. Возьмем конденсатор с вертикально расположенными пластинами размера $a \times b$, частично заполненный (снизу до уровня x) жидким диэлектриком. Емкость его

$$C(x) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 xb}{d} + \frac{\varepsilon_0(a-x)}{b} = C_0 \cdot \left(1 + \frac{(\varepsilon - 1)x}{a}\right).$$

Зарядим конденсатор зарядом q . При смещении уровня жидкости на dx изменение энергии $dU = (dU/dx) \cdot dx$. Сила $F = -dU/dx = (q^2/2C^2) \cdot dC/dx$, или $(V^2/2) \cdot C_0(\varepsilon - 1)/a = (\varepsilon - 1) \cdot (\varepsilon_0 E^2/2) \cdot bd$. Диэлектрик втягивается в конденсатор (сила положительна, энергия уменьшается при увеличении x). Можно усмотреть разность электрических давлений, приложенную на площади bd : E одинаково, сверху $\varepsilon_0 E^2/2$, снизу $\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$. Обратите внимание, что проводник (меньших габаритов) тоже втягивается, но по другой причине: появляются заряды на верхней грани, см. п. 1.8. Диэлектрик этих зарядов не имеет, поскольку E параллельно поверхности, но у него зато диполи втягиваются в поле (в нижней части конденсатора, где поле неоднородно).

Если начать с формулы $U = CV^2/2$, считая V постоянным, сила будет другого знака (при втягивании энергия растет). Это потому, что не учтена работа источника, поддерживающего разность потенциалов V : $\Delta A = V\Delta q = V^2\Delta C$. Если ее учесть, все будет в порядке.

Уменьшенное значение энергии $q^2/(2C_0\varepsilon)$ мы должны получить, растягивая заряженный конденсатор, залитый диэлектриком. Значит, при том же заряде q сила притяжения пластин уменьшится в ε раз⁴. Натяжение вдоль линий поля можно записать как $D^2/(2\varepsilon\varepsilon_0) = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2 = ED/2$, а в СГС $D^2/8\pi\varepsilon = \varepsilon E^2/8\pi = ED/8\pi$.

Таким образом, в присутствии диэлектрика натяжения, выраженные через поле E , отличаются коэффициентом ε от случая пустого пространства (п. 1.8): действует натяжение $\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$ вдоль силовых линий и давление $\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$ перпендикулярно линиям поля. Эти натяжения называют **максвелловскими**; в большинстве случаев они позволяют правильно находить результирующие силы. Однако имеются еще так называемые **стрикционные** натяжения, а также изменения обычного гидростатического давления в диэлектрике при включении поля; обыкновенно эти поправки вместе дают нулевой эффект при суммировании по замкнутой поверхности. Рассмотрение их выходит за рамки данного курса.

Вопрос. Как найти притяжение пластин конденсатора, рассматривая непосредственные взаимодействия зарядов? Для верхней, допустим, пластины диэлектрик находится целиком снизу и его поляризационные заряды не создают внешнего поля. Тогда действует только другая пластина и сила должна быть, как в пустом конденсаторе – не зависеть от проницаемости при данном заряде. Но энергетическое рассмотрение дает явно уменьшенную силу. Попробуйте разобраться в ситуации самостоятельно.

Выпишем, как основной результат главы, электростатические уравнения Максвелла в присутствии диэлектрика. В системе СИ

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= q \quad (q - \text{свободный заряд внутри замкнутой поверхности } S), \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{L} &= 0 \quad \text{по любому контуру } L, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

В системе СГС

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= 4\pi q \quad (q - \text{свободный заряд внутри замкнутой поверхности } S), \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{L} &= 0 \quad \text{по любому контуру } L, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}. \end{aligned}$$

На границах раздела выполняются условия:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}, \quad E_{\tau 1} = E_{\tau 2}.$$

⁴Это верно и для любых зарядов в неограниченной диэлектрической среде.

Глава 3

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

3.1 Электрический ток. Сопротивление. Закон Ома

Ток через некоторую площадь S (допустим, сечение проводника) определяется, как заряд, проходящий сквозь эту S в единицу времени:

$$I = dq/dt .$$

В СИ как раз основная единица не кулон, а ампер: $1 \text{ A} = 1 \text{ Кл/с} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГС}$. **Плотность тока** j – это ток через 1 см^2 ,

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad \text{или} \quad I = \int_S (\mathbf{j} d\mathbf{S}).$$

Поверхность S , через которую идет ток, обычно (но не всегда) **не** замкнутая. Из второй формулы видно, что \mathbf{j} – это вектор; первая же определяет, собственно, перпендикулярную к площадке $\Delta \mathbf{S}$ компоненту \mathbf{j} . Ток I – скаляр, тем более что S не обязательно плоская (для которой велико искушение считать ток вектором). Например, ток может растекаться вообще во все стороны от заряда, помещенного в проводящую среду. Легко заметить, что

$$\mathbf{j} = nev ,$$

где n – концентрация шт/см³ носителей заряда величины e ; \mathbf{v} – их средняя скорость.

В поле \mathbf{E} на электрон действует сила $e\mathbf{E}$. За время t электрон наберет скорость $v = eEt/m$. В каждом нормальном проводнике по истечении времени свободного пробега τ происходит соударение с препятствием (в металле – с ионами кристаллической решетки), и электрон «забывает» направление скорости. Средняя скорость $\langle v \rangle$ будет порядка $eE\tau/m$. Плотность тока $j = ne\langle v \rangle = (ne^2\tau/m) \cdot E = \sigma E$. **Электропроводность** σ – свойство вещества. Равенство

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

называется **законом Ома** в дифференциальной форме.

В проводе сечения S ток $I = jS$, напряжение $V = EL$, так что

$$I = V \cdot (\sigma S/L) = V/R .$$

Это – **интегральная** форма закона Ома. Сопротивление $R = L/\sigma S$ в СИ измеряется в Омах, $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В}/1 \text{ А}$. Единица электропроводности – $\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$. СГС сопротивление имеет размерность обратной скорости: $\text{с}/\text{см}$, а электропроводность измеряется в обратных секундах. Удельное сопротивление $\rho = 1/\sigma$.

Форма закона Ома в СГС такая же, как в СИ; единица сопротивления $\text{Ом} = \text{В}/\text{А} = 1/(9 \cdot 10^{11}) \text{ с}/\text{см}$. Для меди при нормальных условиях $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, или $5,5 \cdot 10^{17} \text{ 1/с}$. Сопротивление провода длиной 1 м и сечения 1 мм^2 около $1,6 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}$, т.е. при токе 1 А на проводе будет напряжение 0,016 В. Медь – один из лучших проводников.

В металле, казалось бы, из-за тесноты электропроводность должна быть мала (сопротивление велико). Но оказывается, что электроны рассеиваются не на атомах, а на колебаниях решетки. Поэтому сечение рассеяния $s \sim x^2$ (x – амплитуда колебаний атомов) гораздо меньше квадрата атомных размеров. Энергия колебаний (т.е. x^2) пропорциональна абсолютной температуре T . Поэтому в чистых металлах электропроводность обратно пропорциональна T .

Пусть два хороших проводника помещены в среду, электропроводность которой σ сравнительно невелика. На проводниках имеются заряды $\pm q$, создающие поле \mathbf{E} и, значит, ток через поверхность, содержащую один из проводников, $I = \oint \sigma \mathbf{E} d\mathbf{S} = \sigma q/\varepsilon_0$. Напряжение $V = q/C$. Отсюда следует связь сопротивления $R = V/I$ с емкостью C :

$$\sigma RC = \varepsilon_0.$$

Если измерить R между проводниками, тогда легко находится и C (которую измерять обычно сложнее).

Оценим время Δt рассасывания скопления избыточного заряда Δq внутри однородного проводника. Ток опять будет $\sigma \cdot \Delta q/\varepsilon_0 = dq/dt \sim \Delta q/\Delta t$. Время $\Delta t = \varepsilon_0/\sigma$, а в СГС $\Delta t = 1/(4\pi\sigma)$. Даже в таких плохих проводниках, как дистиллированная вода ($\sigma \sim 10^{-4} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1} \simeq 10^6 \text{ 1/сек}$) заряд исчезнет мгновенно, но в хороших диэлектриках может держаться часами. Зная время разрядки статических зарядов, можно оценить электропроводность изоляторов. Абсолютных изоляторов не бывает, в отличие от абсолютных проводников. В любом изоляторе, хотя бы в малом количестве, имеются носители заряда, которые и приводят к постепенной разрядке.

3.2 Сторонняя эдс. Источники тока

В электростатике работа \mathbf{E} по замкнутому контуру нулевая. Аналогично при катании на санках нельзя по замкнутому пути все время ехать под действием тяжести. Нужно внешнее воздействие (например, канат подъемника), чтобы вернуть сани на гору.

В источниках тока именно и действует внешняя, или сторонняя, сила неэлектростатического происхождения. Для наглядности можно представить себе внутри источника маленьких человечков, которые толкают заряды против поля. Работа сторонней силы в расчете на единичный заряд при проходе через источник и называется **электродвижущей силой**, кратко эдс. Размерность эдс – как у напряжения. «Неправильным»

названием не надо смущаться, так как еще недавно кинетическую энергию называли живой силой.

Рассмотрим цепь, состоящую из источника и нагрузки (рис. 3.1), соединенных проводами с несущественным сопротивлением. В нагрузке трение (сопротивление) уравновешивается электрическим полем. Это записывается как

$$eE' = f'_{\text{тр}} \quad \text{или} \quad E'l = \frac{f'_{\text{тр}}l}{e}.$$

Здесь e – элементарный заряд (во избежание путаницы с направлениями носители заряда считаем положительными), l – длина сопротивления нагрузки. $E'l$ – это напряжение на нагрузке; по закону Ома равное ему выражение $f'_{\text{тр}}l/e$ есть произведение RI , где R – сопротивление нагрузки. Действительно, сила трения пропорциональна скорости движения зарядов, т.е. току. Отметим, что электрическое поле E' направлено **по току** (вниз на рис. 3.1).

Поскольку $\oint \mathbf{E}d\mathbf{L} = 0$, **внутри источника** электрическое поле направлено **против тока**, а движение зарядов против трения и поля \mathbf{E} обеспечивает эдс.

Обозначаем стороннюю силу на один электрон $f_{\text{ст}}$, силу трения в источнике $f_{\text{тр}}$. Условие постоянства тока:

$$f_{\text{ст}} = eE + f_{\text{тр}}.$$

Деля на e и умножая на толщину L слоя, где генерируется сторонняя сила в источнике, получаем

$$\frac{f_{\text{ст}}L}{e} = EL + \frac{f_{\text{тр}}L}{e}.$$

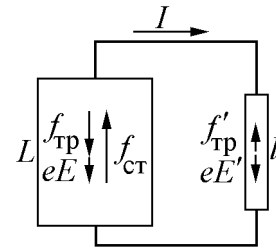


Рис. 3.1.

EL – это напряжение, набранное в источнике; из потенциальности электрического поля оно такое же, как $E'l$ на внешней цепи. Слагаемое $f_{\text{тр}}L/e$ естественно обозначить rI ; r называется **внутренним сопротивлением** источника. Наконец, $f_{\text{ст}}L/e$ – это и есть эдс \mathcal{E} . Выходит так называемый закон Ома для замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = I \cdot (R + r).$$

Мощность, развиваемая при прохождении тока I через ветвь, на которой имеется напряжение V , будет $N = I \cdot V$, поскольку V – это работа на единичный заряд, а I – заряд в единицу времени. Если ток идет через сопротивление R , получаем закон Джоуля-Ленца:

$$N = RI^2 = \frac{V^2}{R}.$$

Для простейшей замкнутой цепи на сопротивлении нагрузки R

$$N = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}.$$

Она достигает максимума при $R = r$. Максимум КПД равен 1 при $R = \infty$.

3.3 Правила Кирхгофа

В любых цепях постоянного тока выполняются правила, или законы Кирхгофа:

$$\sum I_i = 0 \quad \text{в любом узле} \quad (1 \text{ правило})$$

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum (RI)_i \quad \text{по любому замкнутому контуру} \quad (2 \text{ правило}).$$

Правило 1 выражает ненакопление заряда в узлах, 2 – обобщение закона Ома для замкнутой цепи. Разумеется, необходим учет знаков.

При последовательном соединении сопротивлений $R = R_1 + R_2$, при параллельном $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. Это легко получить из законов Кирхгофа. Важно, что, как и с конденсаторами, бывают «никакие» соединения, не сводящиеся к параллельным и последовательным. Для таких сложных цепей и приходится применять законы Кирхгофа. Уравнений легко получить больше, чем неизвестных, поэтому уравнения надо подбирать из соображений простоты и независимости.

Разберем пример. На схеме рис. 3.2 сопротивления r_1 и r_2 можно понимать как внутренние для источников \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , а R – общая нагрузка. Допустим, что к лампочке подсоединили параллельно две разные батарейки. Законы Кирхгофа имеют вид:

$$I = I_1 + I_2, \quad \mathcal{E}_1 = r_1 I_1 + RI, \quad \mathcal{E}_2 = r_2 I_2 + RI.$$

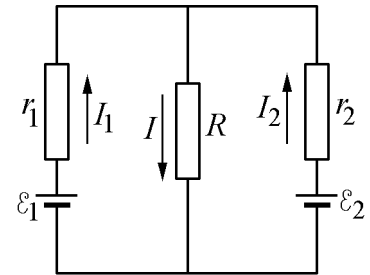


Рис. 3.2.

Решение:

$$I_1 = \frac{(R + r_2)\mathcal{E}_1 - R\mathcal{E}_2}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}, \quad I_2 = \frac{(R + r_1)\mathcal{E}_2 - R\mathcal{E}_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}, \quad I = \frac{r_2 \mathcal{E}_1 + r_1 \mathcal{E}_2}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Иногда полезны модификации этих законов. В **методе контурных токов** разыскиваются токи не в ветвях, а в контурах. Токи в ветвях – это суммы контурных токов для всех контуров, содержащих данную ветвь. Уравнения для контурных токов J_1 и J_2 для той же схемы (рис. 3.3):

$$\mathcal{E}_1 = r_1 J_1 + R(J_1 + J_2), \quad \mathcal{E}_2 = r_2 J_2 + R(J_1 + J_2).$$

Видно, что уравнений получается меньше. Для такой простой схемы выгода невелика, но в более сложных случаях сокращение числа уравнений очень помогает. Конечно, реальные токи через сопротивления получатся те же самые (здесь контурные токи J_1 и J_2 совпадают с токами в боковых ветвях I_1 и I_2 , а ток через нагрузку – их сумма).

В **методе суперпозиции**, когда имеется много батареек, находится вклад в суммарный ток от каждой из них, причем остальные заменяются внутренними сопротивлениями (в простейшем случае, когда внутренние сопротивления малы, батарейки просто закорачиваются). Например, закоротим \mathcal{E}_2 (рис. 3.4). Это настолько упрощает схему,

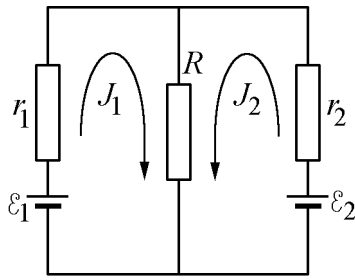


Рис. 3.3.

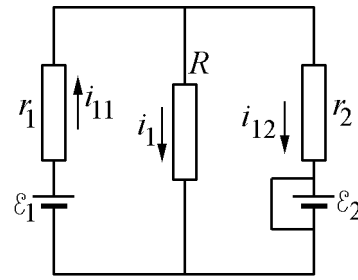


Рис. 3.4.

что уже можно применять «последовательно-параллельные» формулы. Сразу находим три тока, порождаемых первой батареей (о чем говорит индекс 1):

$$i_{11} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + Rr_2/(R + r_2)} = \frac{\mathcal{E}_1(R + r_2)}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)},$$

$$i_1 = \frac{i_{11}r_2}{R + r_2} = \frac{\mathcal{E}_1r_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}, \quad i_{12} = \frac{i_{11}R}{R + r_2} = \frac{\mathcal{E}_1R}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Теперь надо убрать закоротку \mathcal{E}_2 и закоротить \mathcal{E}_1 . Для токов i_{22} , i_2 , i_{21} , созданных второй батареей, получатся такие же формулы с очевидными заменами. И, наконец, надо сложить действие батареек. Например, ток в нагрузке

$$I = i_1 + i_2 = \frac{\mathcal{E}_1r_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)} + \frac{\mathcal{E}_2r_1}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Разумеется, это совпадает с током, полученным из обычных уравнений Кирхгофа.