

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Курс лекций для ФМШ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

А. П. Ершов

3 января 2011 г.

## Глава 4

# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

С древности известны постоянные магниты. Их особые свойства объясняются присутствием нового (для нас) – **магнитного** поля.

При изучении магнитного поля полезна аналогия с электрическим. Магнитное поле, разумеется, не точно подобно электрическому (тогда в нем не было бы надобности), а служит дополнением к  $\mathbf{E}$ , вызывая явления не в точности обратные, а как бы «перпендикулярные». Далее мы увидим, что магнитное и электрическое поля – это проявления (приблизительно – разные компоненты) единого **электромагнитного** поля.

### 4.1 Сила Лоренца. Движение заряда в однородном магнитном поле

Увидеть действие магнитного поля можно в опыте с осциллографом. Это прибор, в котором пучок электронов рисует графики на экране. Можно, в частности, добиться, чтобы на экране была видна яркая точка. Значит, все электроны летят с той стороны стекла и попадают в одно и то же место. Если рядом окажется источник электрического поля, например заряд, пятно будет отклоняться либо к нему, либо от него. Это понятно и не очень интересно. Но если поднести к экрану плоский магнит<sup>1</sup>, мы увидим неожиданную вещь. Пятно отклоняется вбок! Когда магнит лежит на ладони снизу экрана, пятно съезжает, например, влево. Чем ближе магнит, тем сильнее этот сдвиг.

Но может быть, вокруг того, что мы называем магнитом, есть электрическое поле, параллельное его плоскости, которое и толкает электроны вбок? Это можно проверить, вращая магнит вокруг вертикальной оси. Электрическое поле при этом тоже должно крутиться вместе с зарядами, но на сдвиг пятна повороты эти никак не влияют. Такой эксперимент ясно показывает, что данный предмет создает нечто, связанное с нормалью к своей плоскости, так как только эта ось при вращении неподвижна. Если магнит перевернуть, пятно отклонится в обратную сторону. При данной ориентации магнита

---

<sup>1</sup>Здесь слово «магнит» – только условное бытовое обозначение, раз мы пока толком не знаем, что оно значит. Можно было бы сказать «продолговатый тяжелый черный брусок, подвергнутый специальной обработке и полученный из Института ядерной физики», но это выйдет длинно.

не важно, подносить его сверху или снизу. Значит, речь идет о векторе, который подобно гвоздю торчит из плоскости бруска. Этот вектор действует на электрон, отклоняя его как бы дважды вбок, то есть перпендикулярно как своему собственному направлению, так и скорости электрона. Вот эта субстанция и называется магнитным полем.

Поле  $\mathbf{E}$  вводилось, как сила, действующая на единичный заряд. Так же можно ввести и силовую характеристику магнитного поля. Опыты, подобные описанному выше, показали, что на движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  заряд  $q$  действует так называемая **сила Лоренца**:

$$\mathbf{F} = q \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \text{ (СИ)}, \quad \mathbf{F} = \frac{q}{c} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \text{ (СГС)}. \quad (4.1)$$

(Вспомним, что квадратные скобки – знак векторного произведения; порядок сомножителей важен!). Здесь  $\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля, или короче **магнитная индукция**. В форме СГС буква  $c$  – **электродинамическая постоянная**, имеющая размерность скорости. Экспериментальная ее величина (на август 1973) была  $2,99792458(12) \cdot 10^{10}$  см/с. Пока мы не можем доказать (но не видно и смысла скрывать), что это – скорость света, а шире – скорость электромагнитных волн<sup>2</sup>. Поскольку размерности скоростей сокращаются, в СГС магнитная индукция  $\mathbf{B}$  имеет ту же размерность, что и электрическое поле. Величина же электродинамической постоянной обеспечивает равенство единиц измерения. Единица измерения магнитной индукции в СГС называется **гаусс** (гс); такая же точно единица для электрического поля осталась без названия. В системе СИ ни размерности, ни единицы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , разумеется, не совпадают. Единица СИ для магнитной индукции называется тесла (Тл). Сравнивая выражения в (4.1), нетрудно установить, что  $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ гаусс}$ . Если присутствует еще и электрическое поле, в правую часть (4.1) добавится уже знакомое слагаемое  $q\mathbf{E}$ .

Разнобой в терминологии (электрическое **поле**, но магнитная **индукция**) возник по историческим причинам. Позднее мы увидим, что есть и магнитная напряженность, которую ради краткости также называют магнитным полем.

В электрическом поле заряд двигался примерно как масса в поле тяжести (в однородном – по параболе, в центральном кулоновском – по кеплеровым орбитам. Только случай отталкивания зарядов одного знака будет чем-то новым, но тоже получается гипербола, только центр поля будет в другом фокусе). Чтобы освоиться с понятием магнитного поля, для начала выясним, как движется частица в однородном магнитном поле. Пусть вектор  $\mathbf{B}$  направлен по оси  $z$ . Сила Лоренца перпендикулярна и скорости, и магнитной индукции и всегда лежит в плоскости  $xy$ . Проще всего, если скорость  $\mathbf{v}$  лежит в этой же плоскости. Вспомним, что поперечная скорости сила величины  $v$  не изменяет, а только поворачивает вектор скорости. Получаем движение по кругу:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB, \text{ откуда ларморовский радиус } R = \frac{mv}{qB}.$$

Период обращения  $T = 2\pi R/v = 2\pi m/qB$  и частота  $\omega = qB/m$  не зависят от

<sup>2</sup>Напомним, что с 1983 г. по международному соглашению скорость света зафиксирована:  $c = 299792458$  м/с точно.

скорости. Это используется в циклотронах, где заряженные частицы летают по круговым орбитам в магнитном поле и дважды за период разгоняются переменным напряжением постоянной частоты.

Пусть теперь скорость имеет составляющую  $v_z$  вдоль оси  $z$ . Параллельная  $\mathbf{V}$  скорость не влияет на силу; результатом будет движение по винтовой линии радиуса  $mv_{\perp}/qB$  вокруг силовой линии магнитного поля.

Рассмотрение движений в более сложных полях требует ясного представления о том, какие же магнитные поля бывают в природе. Вернемся к этим задачам в конце главы (п. 4.7).

## 4.2 Закон Био–Савара

В старину, когда не было осциллографов, магнитное поле обнаруживалось по отклонению стрелки компаса. Долгое время «источниками магнетизма» считались исключительно постоянные магниты. Как мы увидим ниже, в п. 4.6, постоянные магниты, и тем более их взаимодействие – это довольно сложные вещи, почему долгое время и не удавалось построить теорию магнитных явлений. Однако в 1820 г. Эрстед обнаружил, что электрический ток, протекающий по проводам, также действует на магнитную стрелку. Подобно тому, как  $\mathbf{E}$  создается зарядами,  $\mathbf{B}$  определяется движением зарядов – **электрическими токами**<sup>3</sup>. Сразу после открытия Эрстеда произошел решающий сдвиг. Вместо магнитов стали изучать взаимодействие проводов с током, и в том же 1820 г. были сформулированы закон Био–Савара и закон Ампера.

Естественно воспользоваться примером электростатики. Но провод – объект по меньшей мере линейный, совсем непохожий на точечный заряд. Поэтому разумно разбить провод на малые отрезки – **элементы тока** и рассмотреть их по отдельности. Сейчас мы рассматриваем статическое (постоянное во времени) магнитное поле. Поэтому провода, а с ними и их элементы, предполагаются неподвижными, а токи – постоянными. Эти предположения не особенно ограничительны: многие выводы сохранятся и для бытового переменного тока.

Плотность тока  $\mathbf{j}$  в магнетизме аналогична плотности заряда  $\rho$  в электростатике. Если  $\mathbf{E}$  создается зарядами  $dq = \rho dV$ , то  $\mathbf{B}$  должно определяться величинами типа  $\mathbf{j}dV$ . Поскольку это векторы, а должен еще входить радиус–вектор  $\mathbf{R}$  из  $dV$  в точку наблюдения, естественно ожидать возникновения формулы с векторным произведением. Предположим, что искомое выражение для  $\mathbf{B}$  похоже, насколько это возможно, на известное нам кулоновское для поля  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \mathbf{R} dV}{R^3} \quad \left( = \int \frac{\rho \mathbf{R} dV}{R^3} \text{ в СГС} \right), \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{R}] dV}{R^3} \quad \left( = \int \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{R}] dV}{cR^3} \text{ в СГС} \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

<sup>3</sup>В п. 4.6 будет показано, что постоянный магнит – это очень своеобразный вариант постоянно циркулирующего тока, не требующего розеток и батареек (молекулярный ток).

Интегралы в (4.1) берутся по всему пространству, заполненному зарядами либо токами. В СИ-форме появилась новая **магнитная постоянная**  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м; вхождение ее в числитель (вместо знаменателя в  $(1/4\pi\epsilon_0)$ ) несколько неожиданно, но этим достигаются кое-какие удобства далее. В СГС-форме добавлена электродинамическая постоянная  $c$ , чтобы «исправить» размерность:  $\mathbf{j} = nev$ ;  $ne$  – это по размерности плотность заряда. Правило перевода формул для индукции СИ  $\leftrightarrow$  СГС:  $\mu_0/4\pi \leftrightarrow 1/c$ .

Важен случай, когда ток сосредоточен в проводах несущественной толщины. Тогда  $\mathbf{j} \parallel d\mathbf{L}$  – элементу длины провода,  $\mathbf{j}dV = jSd\mathbf{L} = Id\mathbf{L}$  и формула упрощается: поле провода с током  $I$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int \frac{[d\mathbf{L} \times \mathbf{R}]}{R^3} \quad \left( = \frac{I}{c} \cdot \int \frac{[d\mathbf{L} \times \mathbf{R}]}{R^3} \text{ в СГС} \right). \quad (4.2)$$

Обе формулы (4.1, 4.2), аналогичные суммированию кулоновских полей распределенных зарядов в электростатике, называются **законом Био–Савара** (иногда Био–Савара–Лапласа). Разумеется, никаким доказательством наши рассуждения по аналогии назвать нельзя. Но они иллюстрируют, как в физике возникают гипотезы. Далее их проверяют в эксперименте. Закон Био–Савара экспериментом подтверждается.

Казалось бы, есть более прямолинейный путь – начать со взаимодействия движущихся точечных зарядов. Против ожидания, оно оказывается заметно сложнее по следующим причинам:

1. Оно слишком близко к кулоновскому: основная сила для двух зарядов – электрическая, и на ее фоне трудно заметить вклад магнитного взаимодействия. Провод не заряжен (заряды обоих знаков компенсируют друг друга), поэтому электрическая сила отсутствует; но ток имеется, так как движутся заряды одного знака (обычно электроны).
2. Взаимодействие точечных зарядов в принципе нестационарно из-за их движения. Для постоянных токов эта нестационарность не важна: в каждой точке пространства ток не изменяется, хотя и создается движением все новых зарядов.

К тому же практически все токи в технике идут вдоль тонких проводов, реже – распределены по объему проводников (такой вариант обычно встречается в природе). Сосредоточить в пустоте движущиеся заряды, которые давали бы заметное магнитное поле – это задача совсем не простая (пример – пучки заряженных частиц в ускорителях).

По этим соображениям и лучше формулы (4.1, 4.2), которые вместо движущихся зарядов оперируют стационарными токами. Неприятности, встречающиеся на пути, начинающемся с точечных зарядов, иллюстрируются в Приложении 1.

#### Примеры.

1. Кольцо радиуса  $a$  с током  $I$ . В точке, находящейся на расстоянии  $z$  от центра кольца вдоль оси элемент индукции  $dB = (\mu_0/4\pi)IdL/(a^2 + z^2)$ ; надо суммировать компоненты вдоль оси  $\rightarrow B = (\mu_0/4\pi)I \cdot 2\pi a \cdot a/(a^2 + z^2)^{3/2} = (\mu_0/2)Ia^2/(a^2 + z^2)^{3/2}$ . В центре  $B$  максимальна (у заряженного кольца в центре  $E = 0$ ). Силовая линия, проходящая через центр – это попросту ось кольца (рис. 4.1). В СГС  $B = (2\pi/c)Ia^2/(a^2 + z^2)^{3/2}$ .

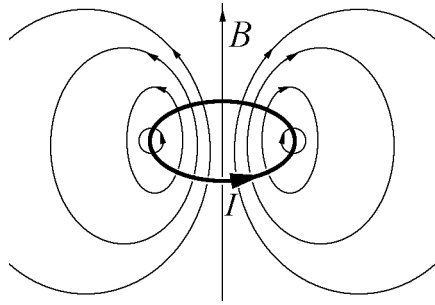


Рис. 4.1.

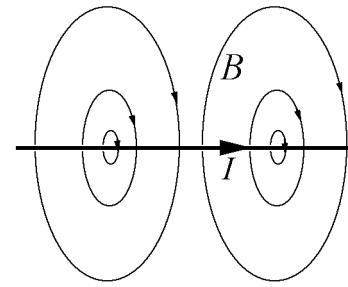


Рис. 4.2.

2. На расстоянии  $r$  от прямого провода с током:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I r \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r} \quad \left( \frac{2I}{cr} \text{ в СГС} \right).$$

Похоже на электрическое поле заряженной нити, но направлено не от провода, а перпендикулярно к расстоянию  $r$ . Силовые линии – круги, «надетые» на провод (рис. 4.2)<sup>4</sup>. Вернемся к кольцевому току. Вблизи провода его кривизна несущественна, и линии поля – также приблизительно круговые. Между крайними случаями прямой осевой линии и малых кругов вблизи провода располагаются линии «общего положения» (рис. 4.1).

3. Труба радиуса  $a$  с аксиальным погонным током  $i$  (т.е.  $i$  ампер на продольный метр). Режем на кольца с токами  $idz$  :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi idza^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi a^2 i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \mu_0 i = \mu_0 \frac{I}{L} \quad \left( \frac{4\pi I}{cL} \text{ в СГС} \right).$$

Пока можно только сказать, что такое поле на оси трубы, но далее обнаружится, что поле в трубе однородно. Для катушки длины  $L$  с током  $I$  можно считать  $i = NI/L$ , где  $N$  – число витков, и внутри катушки поле  $B = \mu_0 NI/L$ .

4. Плоская шина ширины  $L$  : на расстоянии  $h$  над ней

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h dx}{h^2 + x^2} = \mu_0 \frac{I}{2L} = \mu_0 \frac{i}{2} \quad \left( \frac{2\pi i}{c} \text{ в СГС} \right),$$

где  $i = I/L$  – погонный ток. Опять похоже на  $E$  плоскости, но не перпендикулярно ей, а вдоль поверхности: силовая линия обходит шину вокруг тока.

5. Две параллельных плоских шины с противоположно направленными токами (т.е. соединенные на одном из концов): поле  $B = \mu_0 I/L = \mu_0 i$  между шинами, в СГС  $B = 4\pi i/c$ . С точностью до краевых эффектов в остальном пространстве  $B = 0$ : линии  $B$  проходят по зазору между шинами, а снаружи расходятся по всему пространству и возвращаются снова в зазор. Результат напоминает электрическое поле плоского конденсатора.

<sup>4</sup>Желающие могут убедиться самостоятельно, что такой же результат получится при суммировании полей отдельных носителей тока по формуле для  $B_z$  на стр. 53 (Приложение 1).

Вместо плотности поверхностных зарядов  $\sigma$  входит  $i = I/L$  – погонный (на единицу ширины) ток, в СГС – разделенный на  $c$  для размерности.

Направление  $\mathbf{B}$  проще всего определять по правилу буравчика (правого винта): если вворачивать винт, штопор и т.п. вдоль тока, точки на головке винта либо ручке штопора вращаются вдоль вектора индукции. Правила левой и правой рук способны сильно запутать и не рекомендуются (руки, в отличие от винтов, обычно встречаются парами).

В рассмотренных простых случаях линии  $\mathbf{B}$  были замкнуты (если не уходили на бесконечность). Поля, в которых возможны замкнутые силовые линии (таково поле  $\mathbf{B}$ ), кратко называют **соленоидальными**<sup>5</sup>, в противоположность потенциальным полям, типа электростатического.

Однако не следует думать, что магнитные силовые линии всегда замкнуты. Это – распространенное заблуждение, проникшее даже в учебники. Замкнуты линии  $\mathbf{B}$ , например, у кольцевого витка с током  $I$  (рис. 4.3). Но если пропустить через виток провод с малым током  $i$ , добавится малая индукция  $\mathbf{b}$ , перпендикулярная начальной. Силовая линия суммарной индукции станет спиралью, бесконечно навивающейся на кольцо, и замкнуться может только случайно. При «общем» соотношении токов и при произвольной их геометрии практически все линии будут незамкнуты, причем вполне заметно. Если же специально добиваться замкнутости, это свойство легко разрушится даже малыми внешними полями. Следовательно, замкнутость – редкое исключение, примерно как рациональные числа в континууме.

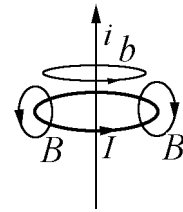


Рис. 4.3.

### 4.3 Формула Ампера

Найдем силу, действующую на ток в магнитном поле. При простейшей геометрии (провод длины  $L$  перпендикулярен вектору индукции) сила

$$F = evB \cdot (\text{число электронов}) = evB \cdot nSL = nevS \cdot LB = ILB \quad \left( \frac{ILB}{c} \text{ в СГС} \right).$$

На малый элемент тока  $I d\mathbf{L}$  в магнитном поле действует **сила Ампера**:

$$\mathbf{F} = I[d\mathbf{L} \times \mathbf{B}] \quad \left( \frac{I}{c}[d\mathbf{L} \times \mathbf{B}] \text{ в СГС} \right). \quad (4.3)$$

Два параллельных провода на расстоянии  $R$  будут взаимодействовать с силой

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} L \quad \left( 2 \frac{I_1 I_2}{c^2 R} L \text{ в СГС} \right); \quad (4.4)$$

провода притягиваются при параллельных токах и отталкиваются при антипараллельных. Величина силы для проводов длиной 1 м на расстоянии 1 см при токе 1 А будет  $2 \cdot 10^{-7}/10^{-2} = 2 \cdot 10^{-5}$  Н, или 2 дин. Столь слабое взаимодействие токов трудно увидеть (например, незаметно притяжение или отталкивание включенных компьютеров).

<sup>5</sup>Это, конечно, не определение соленоидальности. Определение дано ниже, в п. 4.4.

Но при токах 1 кА получится в миллион раз больше – 2 кГ. Благодаря ряду специальных мер именно на силе Ампера работают электромоторы. В них потребляемый ток не так велик, но взаимодействуют много проводов (витков); кроме того, индукция усиливается благодаря использованию магнитных материалов (железо, сталь). На электрических же силах техника работает плохо – эти силы ограничены пробоем. Впрочем, есть применения в струйных принтерах, ксероксах, где электрические поля управляют движением частиц красящего порошка, и т.п.

Индукция  $\mathbf{B}$  сама создается некоторыми токами. Если вспомнить закон Био–Савара, то кажется очевидным, что два элемента тока:  $I_1$  длины  $d\mathbf{L}_1$  и  $I_2$  длины  $d\mathbf{L}_2$  взаимодействуют с силой

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{R^3} \cdot [d\mathbf{L}_1 \times [d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{R}]] \left( \frac{I_1 I_2}{c^2 R^3} \cdot [d\mathbf{L}_1 \times [d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{R}]] \text{ в СГС} \right), \quad (4.5)$$

точнее, это сила действия 2 на 1;  $\mathbf{R}$  протянут от 2 к 1. Формула (4.5) – аналог закона Кулона.

Оба выражения (4.3, 4.4), а иногда и (4.5), для  $F$  называют **законом**, или **формулой, Ампера**. Исторически взаимодействие проводов с током обнаружено, разумеется, раньше силы Лоренца, для которой надо уже иметь понятие о поле  $\mathbf{H}$  и о носителях заряда в проводнике. Излагать же проще в принятом нами порядке, в чем можно убедиться хотя бы из последней формулы.

Элемент  $d\mathbf{L}_1$  тоже действует на  $d\mathbf{L}_2$  с силой

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{R^3} \cdot [d\mathbf{L}_2 \times [d\mathbf{L}_1 \times (-\mathbf{R})]] \left( \frac{I_1 I_2}{c^2 R^3} \cdot [d\mathbf{L}_2 \times [d\mathbf{L}_1 \times (-\mathbf{R})]] \text{ в СГС} \right).$$

Легко видеть, что возможно и даже обычно неравенство  $\mathbf{F}_{12} \neq -\mathbf{F}_{21}$ . Например, при совпадении направлений  $d\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{R}$  первый элемент не создает поля в месте дислокации второго и на него не действует, тогда как 2 действует на 1 (рис. 4.4). Третий закон Ньютона не выполняется. Другими словами, не сохраняется импульс. Пытались это исправить, заявляя, что взаимодействуют не элементы, а элемент с полем в этом месте. Поле же создает не один элемент тока, а весь провод – замкнутый контур. Силу, действующую на элемент 1, найдем, интегрируя (4.5) по  $d\mathbf{L}_2$ , и получим (4.3).

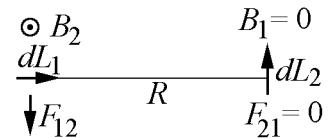


Рис. 4.4.

И эта сила не обладает свойством взаимности: убедитесь, что прямой провод  $I_2$  действует на элемент  $I_1 d\mathbf{L}_1$  вниз на рис. 4.5, а элемент дает нулевую силу на провод (хотя и ненулевой момент сил, крутящий по часовой стрелке).

Опять можно сказать, что действует на провод 2 не элемент 1, а магнитное поле всего контура, в который он входит. Два контура взаимодействуют с силой, проинтегрированной по  $d\mathbf{L}_1$  и по  $d\mathbf{L}_2$ ; такая сила уже подчиняется третьему закону Ньютона. На рис. 4.6 показаны два контура (один – все тот же прямой провод), для которых очевидно взаимное притяжение: вклад горизонтальных участков провода 1 компенсируется.



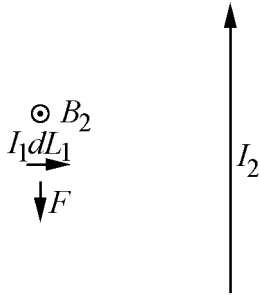


Рис. 4.5.

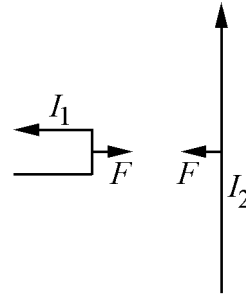


Рис. 4.6.

Для общего случая произвольных контуров разложим двойное векторное произведение:

$$[\mathbf{a}[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}) \quad (4.6)$$

(читается «бац минус цап»; эта формула выводится в Приложении 2). Из (4.5) выходит

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{c^2 R^3} \cdot [d\mathbf{L}_1 \times [d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{R}]] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{c^2} \left( d\mathbf{L}_2 \left( d\mathbf{L}_1 \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) - \frac{\mathbf{R}}{R^3} (d\mathbf{L}_1 d\mathbf{L}_2) \right).$$

Вся несимметрия «сидит» в первом слагаемом. Но при интегрировании по  $d\mathbf{L}_1$  оно дает нуль для замкнутого контура, так как интегрируется потенциальное кулоновское поле  $\mathbf{R}/R^3$ . Аналогично из  $\mathbf{F}_{21}$  после интегрирования выпадет слагаемое  $d\mathbf{L}_1(d\mathbf{L}_2\mathbf{R})/R^3$ .

С XIX века думали, что формула Ампера буквально неверна. Нет смысла рассуждать о силе между элементами тока, если они всегда складываются в замкнутые контуры. Поэтому (4.5) надо понимать не как реальную силу, а как материал для последующего интегрирования<sup>6</sup>. Настоящая же сила между элементами тока, если допустить, что есть такая вещь, может отличаться на слагаемое, которое обращается в нуль при интегрировании по замкнутому контуру. Что такие **ненулевые** векторные поля бывают, ясно хотя бы на примере электрического поля.

Сам Ампер как раз был сторонником такой позиции и нашел выражение, которое давало ту же силу для замкнутых контуров, но не нарушало третий закон Ньютона.

*Задача.* Попробуйте добавить к правой части (4.5) выражение  $I_1 I_2 d\mathbf{L}_1(d\mathbf{L}_2\mathbf{R})/(c^2 R^3)$ . Это даст нуль при интегрировании по  $d\mathbf{L}_2$ , так как  $\mathbf{R}/R^3$  – электрическое поле точечного заряда. Убедитесь, что получится сила, при перестановке индексов и замене направления  $\mathbf{R}$  меняющая знак. Ампер придумал более сложную силу, которая еще и была направлена вдоль  $\mathbf{R}$  (см.: И. Тамм. Основы теории электричества).

Но теперь мы знаем, что элементы тока именно бывают. Например, это могут быть два электрона, и их магнитное взаимодействие не взаимно. Вспомним, что в законе Кулона, на первый взгляд, не было никаких проблем со взаимностью сил.

Впрочем, и закон Кулона в динамике непригоден. Скажем, при перемещении одного из зарядов второй почувствует это не сразу, а через время, нужное для прохода электромагнитной волны (расстояние, поделенное на скорость света). Взаимность также нарушается. В быту мы наблюдаем такой эффект по запаздыванию сигнала при те-

<sup>6</sup>И до сих пор в некоторых учебниках можно встретить такие утверждения.

лефонных переговорах на больших расстояниях. Сигнал, то есть речь, «зашифрован» именно в движении зарядов в передающих антеннах.

Приходится признать, что третий закон Ньютона нарушается. Но закон сохранения импульса оказывается более живучим. Мы уже видели, что поле имеет энергию. Оказывается, оно может иметь и импульс. Сохраняется сумма импульсов частиц и поля.

## 4.4 Теорема Стокса

Продолжая аналогию с электростатикой, вспомним, что в симметричных случаях вместо принципа суперпозиции полезна была теорема Гаусса. И для магнитного поля можно написать аналогичное уравнение, с той только разницей, что магнитных зарядов нет:

$$\oint (\mathbf{B}d\mathbf{S}) = 0.$$

Теоретически допустимы «отдельные» полюса, так называемые монополи Дирака, но практически их никто не наблюдал. Поле, имеющее нулевой поток через любую замкнутую поверхность, называют соленоидальным. Линии такого поля не имеют начала и конца: они либо замкнуты, либо приходят с бесконечности и на бесконечность же уходят, либо заполняют в пространстве поверхность (типичный случай, см. п. 4.2.)

Мы видели (п. 1.3), что циркуляция электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю. Поскольку линии  $\mathbf{B}$  бывают замкнуты, для магнитной индукции возможна ненулевая циркуляция. Пусть контур – окружность вокруг прямого провода с током  $I$  (рис. 4.7). Поскольку контур совпадает с силовой линией,

$$\oint (\mathbf{B}d\mathbf{L}) = B \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} \cdot 2\pi R = \mu_0 I \quad \left( = \frac{4\pi I}{c} \text{ в СГС} \right).$$

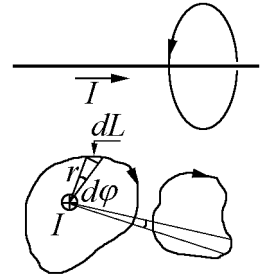


Рис. 4.7.

Результат не зависит от формы контура, лишь бы он охватывал провод. Действительно, для  $B = (\mu_0/4\pi) \cdot 2I/r$  и контура, лежащего в плоскости, перпендикулярной проводу,  $(\mathbf{B}d\mathbf{L}) = (\mu_0/4\pi) \cdot 2IdL_{\perp}/r = (\mu_0/4\pi) \cdot 2I d\varphi$ , где  $\varphi$  – плоский угол с вершиной на оси провода (рис. 4.7). Если контур охватывает провод,  $\oint d\varphi = 2\pi$ , если же провод «сбоку», то при обходе угол вернется к прежнему значению,  $\oint d\varphi = 0$ .

Контур не обязан быть плоским, так как все равно мы проектируем  $d\mathbf{L}$  на силовую линию, лежащую для прямого провода в плоскости. Через контур, рядом с ним и в отдалении может проходить любое число прямых проводов, тогда

$$\oint_L (\mathbf{B}d\mathbf{L}) = \mu_0 I_L \quad \left( = \frac{4\pi I_L}{c} \text{ в СГС} \right), \quad (4.7)$$

где  $I_L$  – это суммарный ток, протекающий через контур, с учетом знаков. Если рядом течет огромный ток, но не через контур  $L$ , то этот ток не входит в правую часть.

Вряд ли стоило тратить столько усилий, будь это соотношение верно только для прямых проводов. Однако можно показать, что то же выполняется и для «кривых»

токов (рис. 4.8), и для распределенных в пространстве. К сожалению, в рамках интегральной формы уравнений простого доказательства, видимо, не существует. Довольно длинный вывод приведен в Приложении 3 в конце главы.

Уравнение (4.7) можно назвать магнитной **теоремой Стокса**<sup>7</sup>. Если проводов несколько, то  $I_L$  – это суммарный ток с учетом знаков. Положительным направлением тока для контура считается то, которое образует с направлением обхода контура правовинтовую систему. На рис. 4.8 положителен ток  $I_1$ , а суммарный ток  $I_L = I_1 - I_2 + I_2 - I_2 = I_1 - I_2$ . Проследить за суммированием токов можно, отмечая пересечение ими незамкнутой поверхности, опирающейся на контур интегрирования. Поскольку токи в статике замкнуты, годится любая такая поверхность. Можно представить себе растяжимую пленку, «надетую» на контур; пленку эту можно как угодно деформировать, все равно токи будут ее «пронизывать».

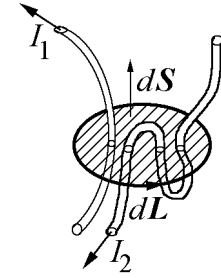


Рис. 4.8.

Обратите внимание, как **разумно** устроено основное уравнение магнитостатики – теорема Стокса.  $\mathbf{B}$  вызывается токами, которые можно «поймать» в контуры. Аналогично (насколько тут возможна аналогия)  $\mathbf{E}$  создается зарядами, которые ловятся в мешки – замкнутые поверхности.

*Примеры употребления:*

1. Катушка длины  $L$  из  $N$  витков, с током  $I$ . Берем контур, захватывающий весь ток – как бы нитку, продетую в катушку и завязанную снаружи. Внутри поле  $B$ ; снаружи те же силовые линии заполняют  $\infty$  площадь, т. е. снаружи  $B = 0$ . Получаем  $BL = \mu_0 NI$ ;  $B = \mu_0 NI/L$ ; в СГС  $B = 4\pi NI/cL$ . Для длинной катушки поле однородно: положение контура внутри не важно. При учете концевых эффектов появится поле снаружи (для длинной катушки – слабое) и неоднородность внутри вблизи концов. Катушка подобна конденсатору в электростатике: концентрирует в себе магнитное поле.
2. Шина с током:  $2BL = \mu_0 I$ ;  $B = \mu_0 I/2L = \mu_0 i/2$  ( в СГС  $B = 2\pi i/c$ ), как и получалось из закона Био – Савара.
3. Поле внутри провода с током:  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \cdot (r^2/R^2)$ : доля тока  $r^2/R^2$  идет через контур радиуса  $r$ . Получаем  $B = \mu_0 I r/2\pi R^2$ ; в СГС  $B = 2Ir/cR^2$  – похоже на  $E$  заряженного объемно цилиндра.

Мы имеем уже 4 уравнения Максвелла (в скобках – правые части в СГС):

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \frac{Q_S}{\varepsilon_0} \quad (= 4\pi Q_S), \quad \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0, \\ \oint_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}) = 0, \quad \oint_L (\mathbf{B} d\mathbf{L}) = \mu_0 I_L \quad \left( = \frac{4\pi I_L}{c} \right).$$

<sup>7</sup>Имеется большое разнообразие названий (4.7): теорема о циркуляции, или закон полного тока, или закон/формула/теорема Ампера, или называют уравнением Максвелла (одним из), или вообще избегают называть. Название «теорема Стокса» неофициальное, но вполне подходящее. Оно напоминает о родстве уравнения (4.7) с общей математической теоремой Стокса, симметричном родству электрической теоремы Гаусса и математической теоремы Гаусса – Остроградского (см. Приложение 3). Закон Ампера лучше отнести к взаимодействию проводников (4.3,4.4) во избежание путаницы.

Как уже говорилось, между электричеством и магнетизмом есть симметрия, но не совпадение. Пока что уравнения для них независимы. Позднее появятся слагаемые, которые из электрического поля будут делать магнитное и наоборот.

## 4.5 Магнитный момент в магнитном поле

Из первого примера п. 4.2 – поля кольца – видно быстрое спадание магнитной индукции с удалением от создающей его системы. При  $z \gg a$  имеем  $B = (\mu_0/4\pi)2\pi a^2 I/z^3$ . На оси электрического диполя:  $E = (1/4\pi\epsilon_0)2p/z^3$ . Учитывая, что коэффициенты в скобках аналогичны, вводим магнитный дипольный момент  $m = \pi a^2 I$  (короче – **магнитный момент**); тогда на больших расстояниях от кольца  $B = (\mu_0/4\pi)2m/z^3$ . В СГС  $m = \pi a^2 I/c$ ,  $B = 2m/z^3$ .

Поскольку нет магнитных зарядов, магнитный диполь дает наиболее медленно спадающее поле. (Правда, вблизи длинного провода  $B \propto 1/r$ , но на больших расстояниях, когда будет видна замкнутость тока, закон спада станет дипольным или еще быстрее). Поэтому магнитный диполь – даже более важный объект для магнетизма, чем электрический диполь в электростатике. Приблизительно (по важности) он соответствует электрическому заряду.

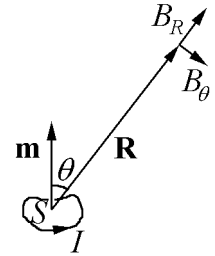


Рис. 4.9.

Можно показать из закона Био – Савара, что аналогия с электрическим диполем выполняется не только на оси. Оказывается, на большом расстоянии  $R$  от плоского контура с током  $I$  выполняются зависимости

$$B_R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{R^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{R^3}; \quad \text{в СГС: } B_R = \frac{2m \cos \theta}{R^3}, \quad B_\theta = \frac{m \sin \theta}{R^3},$$

точно подобные полученным для электрического диполя в п. 1.7. Магнитный момент в СИ  $m = IS$ , в СГС  $m = IS/c$ , где  $S$  – это площадь контура, обтекаемого током  $I$  (рис. 4.9). Доказательство можно провести сначала для малого квадратного контура, применяя формулу Био – Савара<sup>8</sup>. Произвольный (но малый по сравнению с  $R$ ) контур эквивалентен набору малых квадратных контуров, обтекаемых током в одном направлении. Везде внутри токи от соседних квадратиков будут взаимно уничтожаться, на границе же они дадут обтекание исходного контура. Поскольку элементарная индукция от квадратика пропорциональна его площади ( $dm = IdS/c$ ), при сложении получится магнитный момент, в который войдет суммарная площадь.

Магнитный момент (как и электрический дипольный момент) – вектор. Направлен он по движению штопора, ручку которого крутят по току. В векторном виде  $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ , а в СГС  $\mathbf{m} = I\mathbf{S}/c$  – вдоль вектора площади.

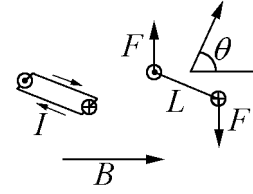
Если контур не плоский, момент записывается так:  $\mathbf{m} = (I/2) \cdot \oint [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}]$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор из начала координат в место расположения элемента длины контура  $d\mathbf{l}$ . Проверьте, что добавление к  $\mathbf{r}$  постоянного вектора не меняет результат (т.е.  $\mathbf{m}$  не зависит от положения начала координат), и что для плоских контуров обе формулы равносильны.

<sup>8</sup>В электростатике мы вычисляли таким способом потенциал; магнитное поле не имеет, вообще говоря, скалярного потенциала «из-за теоремы Стокса» и приходится честно считать индукцию.

Внесем магнитный момент в виде квадратного контура со стороной  $L$  в магнитное поле. На сторону, перпендикулярную полю, действует сила  $F = ILB$ . Получаем пару сил, разворачивающих  $\mathbf{m}$  вдоль  $\mathbf{B}$ . Силы на другие две стороны (ближнюю и дальнюю) только пытаются растянуть контур и компенсируют друг друга.

Момент сил (рис. 4.10):

$$\tau = 2F \cdot (L/2) \cdot \sin \theta = mB \sin \theta = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}]$$



в полном соответствии с электростатикой. Мы можем ввести и потенциальную энергию магнитного момента в поле:

$$U = -mB \cos \theta = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).$$

Рис. 4.10.

Как и электрическое, магнитное поле старается ориентировать моменты вдоль себя.

Существуют вещества (например, кислород), молекулы которых имеют собственные магнитные моменты; этим они похожи на электрические диполи типа молекул воды. В магнитном поле будет возникать упорядоченная ориентация совершенно так же, как и в электрическом случае, с заменой  $p \rightarrow m$ ,  $E \rightarrow B$ . Такие вещества с положительной магнитной поляризуемостью называются **парамагнетиками**.

Но большинство знакомых нам веществ получают в поле момент  $\mathbf{m}$ , обратный направлению  $\mathbf{B}$  (та же вода). Особенно удивляться этому не надо, потому что магнитное поле все же не электрическое: оно действует довольно сложным образом, изменяя орбиты электронов (а точнее, их состояния) в молекулах. Мы не будем пока вдаваться в детали взаимодействия. Вещества такого типа называют **диамагнетиками**.

Есть еще **ферромагнетики** (железо и ряд сплавов), аналогичные сегнетоэлектрикам; в ферромагнетиках соседние магнитные моменты заставляют друг друга ориентироваться в одном направлении. Поэтому материал имеет собственную намагниченность. Есть также **антиферромагнетики** (твердый кислород, магний, хром), у которых соседние моменты ориентируются навстречу и компенсируют друг друга. Нечто среднее между ферромагнетиками и антиферромагнетиками представляют **ферримагнетики** (многие ферриты – соединения типа  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). У них соседние моменты антипараллельны, но не равны по величине.

## 4.6 Магнитное поле в среде. Намагниченность. Вектор магнитной индукции

Оценим величину магнитного момента молекулы. Пусть электрон летает по кругу радиуса  $a$ ; ток  $I = e/T$ . В системе СИ  $m = I \cdot \pi a^2 = eav/2$ , где  $v = 2\pi a/T$  – скорость электрона.

Магнитная индукция, создаваемая этим моментом, порядка  $(\mu_0/4\pi) \cdot 2m/R^3$ , а сила, действующая на подобный же электрон в другой молекуле,  $F_m \simeq (\mu_0/4\pi) \cdot (2m/R^3) \cdot ev$ . Сравним ее с типичным действием диполя на тот же электрон:  $F_e \simeq (1/4\pi\epsilon_0) \cdot$

$(2p/R^3) \cdot e$ . Отношение  $F_m/F_e \approx \varepsilon_0 \mu_0 v^2$ . Поскольку это безразмерная величина, ее можно записать как  $v^2/c^2$ , где  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  – это константа размерности скорости. Учитывая, что  $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ ,  $\varepsilon_0 = 4\pi/(9 \cdot 10^9)$ , получим  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. В этой величине легко узнать скорость света.

Скорость внешних электронов примерно на два порядка меньше скорости света. Поэтому, как правило, магнитные эффекты малы по сравнению с электрическими. Поэтому мы и не видим заметного взаимодействия большинства веществ даже с сильным магнитным полем. Исключением являются ферромагнетики, в которых соседние атомы «помогают» друг другу.

В парамагнетике, состоящем из «готовых» магнитных моментов, внешнее магнитное поле создаст упорядоченную ориентацию вдоль поля. Молекулы диамагнетиков во внешнем поле приобретут индуцированные магнитные моменты. Как и в электростатике, можно ввести магнитную поляризуемость  $\alpha_m$ , так что средний магнитный момент  $\langle \mathbf{m} \rangle = \alpha_m \cdot \mathbf{B}$ . Возникнет **намагниченность** – магнитный момент единицы объема, также пропорциональный  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{M} = n \langle \mathbf{m} \rangle = n \alpha_m \cdot \mathbf{B}$ . В отличие от электростатики, у диамагнетиков поляризуемости отрицательны:  $\alpha_m < 0$ , т.е. намагниченность  $\mathbf{M}$  направлена против индукции  $\mathbf{B}$ .

Рассмотрим намагниченное вещество. Каждый магнитный момент – это замкнутый ток. Внутри вещества эти молекулярные токи компенсируются (как было и с зарядами электрических диполей). Но по поверхности образца компенсации нет, и сложение молекулярных токов эквивалентно некоторому току  $I$  (рис. 4.11), обтекающему образец так, чтобы усилить внешнее поле (для веществ с  $\alpha_m > 0$ ).

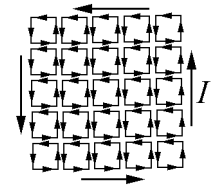


Рис. 4.11.

Суммарный магнитный момент образца площадью  $S$  и высотой  $L$ :  $\mathcal{M} = n \langle \mathbf{m} \rangle SL = \mathbf{M} \cdot SL$  равен, с другой стороны,  $IS$ , так что поверхностный ток  $I = ML$ . На единицу длины поверхности придется погонный ток  $i = M$  (в СГС  $i = cM$ ). Если вектор  $\mathbf{M}$  направлен под углом к поверхности, то надо брать его параллельную составляющую (тангенциальную). Зависимость между  $\mathbf{M}$  и  $i$  похожа на связь  $\mathbf{P}$  и  $\sigma$  в электростатике.

Пусть в однородное магнитное поле  $B_{out}$ , например, в катушку с током, внесено вещество, способное намагничиваться (рис. 4.12). Намагниченность, она же поверхностный ток, изменит индукцию внутри образца. Аксиальный ток  $i = M$  создает внутри добавочную индукцию  $\mu_0 i$ ; тогда внутри будет  $\langle B_{in} \rangle = B_{out} + \mu_0 M$ . В этой разнице легко убедиться и для любой формы образца из теоремы Стокса для «узкого» контура:

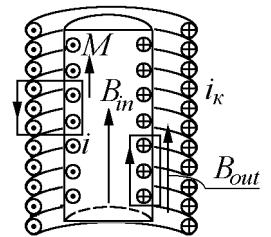


Рис. 4.12.

$$\langle B_{in} \rangle L - B_{out} L = \mu_0 i L = \mu_0 M L \quad \text{или} \quad \langle B_{in} \rangle - B_{out} = \mu_0 M.$$

Для определенности рассмотрим случай ( $\alpha_m > 0$ , парамагнетик), когда внутренняя индукция больше наружной. Конечно, имеется в виду усредненная индукция в веществе, что подчеркивают угловые скобки. Как видно из теоремы для «широкого» контура, она создается вместе током катушки и поверхностным током:  $\langle B_{in} \rangle = \mu_0 i_k + \mu_0 M$ .

Отметим здесь принципиальную разницу между токами проводимости (их можно контролировать и измерять амперметрами) и поверхностными молекулярными токами, которые проявляются только своим вкладом в магнитную индукцию. Аналогично в электростатике различаются свободные и поляризационные заряды.

Напрашивается идея рассмотреть разность  $\langle \mathbf{B}_{in} \rangle - \mu_0 \mathbf{M}$ , которая в теореме Стокса чувствовала бы только «настоящие» токи проводимости (в нашем случае – ток катушки). Принято пользоваться искусственным, но удобным вектором  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ . Величину  $\mathbf{H}$  называют напряженностью магнитного поля, или, короче, просто **магнитным полем**.

В новых обозначениях  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$ . Это похоже на  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . Формальное отличие (намагниченность умножается на  $\mu_0$ , тогда как вектор поляризации обходится без умножения на  $\varepsilon_0$ ) вытекает из реального отличия полей: в электричестве настоящее среднее поле  $\mathbf{E}$ , тогда как в магнетизме эту роль выполняет индукция  $\mathbf{B}$ . В новых обозначениях теорема Стокса, в том числе и в присутствии магнетиков, имеет вид

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = I_L \quad (I - \text{ток проводимости}).$$

Для простейшего случая образца в катушке  $\mathbf{H}$  попросту одинаково внутри и вне образца:

$$HL = NI; \quad H = NI/L.$$

Намагниченность  $\mathbf{M}$  поэтому принято выражать через  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{M} = \chi_H \mathbf{H},$$

то есть **магнитная восприимчивость**  $\chi_H$  определяется не через истинное среднее поле – магнитную индукцию  $\mathbf{B}$ , а через  $\mathbf{H}$ , которое проще задать (в простой геометрии зависит только от тока в катушке, а не от свойств и вообще присутствия магнетика). Обратим внимание, что в формуле нет постоянной  $\mu_0$  (в электростатике соответствующая постоянная входит:  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ ). Магнитная восприимчивость положительна для парамагнетиков, но для диамагнетиков  $\chi_m < 0$ . В СГС связь формально выглядит так же:  $\mathbf{M} = \chi_H \mathbf{H}$ , однако  $\chi_H$  в СГС меньше в  $4\pi$  раз, как и  $\chi$  в электростатике.

Тогда магнитная индукция  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 (1 + \chi_H) \cdot \mathbf{H}$ , что принято писать в виде

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} \quad (\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \text{ в СГС}). \quad (4.8)$$

Коэффициент  $\mu$  – свойство вещества – называется **магнитной проницаемостью**. Например, для парамагнетиков – воздуха при нормальных условиях  $\mu = 1 + 3,8 \cdot 10^{-7}$ , для жидкого кислорода  $\mu = 1 + 3,4 \cdot 10^{-3}$ ; для воды (диамагнетик)  $\mu = 1 - 9 \cdot 10^{-6}$ . Как уже говорилось, в большинстве случаев магнитная поляризация гораздо слабее электрической (сравните со значениями  $\varepsilon - 1$  для тех же веществ в п. 2.4). Однако для ферромагнетиков  $\mu$  может быть порядка тысяч.

В системе СГС  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} = (1 + 4\pi \chi_H) \mathbf{H}$ ,  $\mu = 1 + 4\pi \chi_H$ ; магнитная проницаемость  $\mu$  не зависит от системы единиц, как и  $\varepsilon$  в электростатике. В СИ иногда вводят

абсолютные проницаемости: магнитную  $\mu_a = \mu\mu_0$  и электрическую  $\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0$ , откуда видно происхождение старой терминологии, когда  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  называли электрической и магнитной проницаемостью вакуума.

Разумеется, теорема Гаусса в магнетизме должна записываться через среднее поле  $\mathbf{B}$ . Запишем уравнения магнитного поля в среде:

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = I_L \quad \text{по любому замкнутому контуру } L, \quad \left( \oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I_L}{c} \text{ в СГС} \right)$$

$$I_L - \text{ток проводимости;}$$

$$\oint_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}) = 0 \quad \text{по любой замкнутой поверхности } S, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} \text{ в СГС}).$$

Уравнения (4.9) дополняются граничными условиями на поверхностях разрыва, вытекающими из самих уравнений:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \quad (4.10)$$

а если имеется поверхностный свободный ток  $i$ , тангенциальные поля отличаются на величину  $i$ , или  $4\pi i/c$  в СГС.

Кроме того, должны быть заданы свойства вещества. При постоянной магнитной восприимчивости годится прямая пропорциональность  $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$  или  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  в СГС, в более общем нелинейном случае

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad (4.11)$$

но бывает и так, что однозначной зависимости индукции от поля не существует: индукция определяется не только полем в данный момент времени, но и всей историей намагничивания (значениями  $\mathbf{H}$  во все предшествующие моменты). Такая «память» называется **гистерезисом**.

В частности, гистерезис ярко проявляется в ферромагнетиках, из которых изготавливаются **постоянные магниты**: у них как раз внешний, или свободный, ток равен нулю и их поле создается только поверхностными молекулярными токами (рис. 4.11). Проследим, как получается, что эти токи, т.е. намагниченность, могут существовать без внешнего поля. Оказывается, поле все же нужно, но на сравнительно недолгое время. Затем внешнее поле можно выключить, но намагниченность не спадает до нуля<sup>9</sup>.

Как уже говорилось, в ферромагнетике соседние магнитные моменты ориентируются друг друга в одном направлении. Образец разбивается на кусочки – **домены**<sup>10</sup>. Размеры доменов зависят от образца и его истории, но обычно находятся в диапазоне  $10^{-4} \div 10^{-2}$  см. Внутри домена все магнитные моменты полностью ориентированы в

<sup>9</sup>Так студент может помнить часть изученного материала даже и после сдачи экзамена.

<sup>10</sup>От франц. domaine – владение. Карта владений феодалов в средневековье напоминала магнитную структуру.



одном направлении из-за сильного взаимодействия атомов. В макроскопически однородном (так называемом размагниченном) состоянии направления соседних доменов закономерным или случайным образом варьируются, так что суммарный магнитный момент образца невелик. Действительно, если весь кусок будет намагничен однородно, то и внутри него, и снаружи будет значительное магнитное поле, что энергетически невыгодно. А при разбиении внутри доменов поле, конечно, есть, но снаружи образца оно практически зануляется. Когда действует внешнее поле, то вначале домены, направленные более или менее вдоль поля, разрастаются за счет соседних «неправильных». По сравнению с обычными парамагнетиками эта коллективная реакция на поле очень сильна (начальная магнитная проницаемость  $\mu \gg 1$ ). Поэтому-то взаимодействие ферромагнетиков с полем (стальных гвоздей и т.п.) такое заметное. При больших внешних полях начинает поворачиваться уже ориентация внутри доменов, приближаясь к параллельной полю. Когда все моменты практически полностью выстроены, наступит **насыщение**: намагниченность при росте поля перестает расти, а индукция растет только за счет роста поля, то есть гораздо медленнее (напомним, что  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$ ).

Из-за такого сложного механизма при уменьшении внешнего поля размагничивание идет по другому пути. После выключения поля домены вполне могут разориентироваться не полностью; получается остаточная  $M \neq 0$  при  $H = 0$ . Естественно, степень необратимости зависит от материала.

Оценим индукцию внутри атома по формуле для витка с током: получим  $B \simeq (\mu_0/4\pi)2\pi I/a = (\mu_0/4\pi) \cdot (ev/a^2)$ . При скорости электрона порядка процента от световой  $v \simeq 5$  Тл. Если все атомы «выстроены» в одном направлении, примерно такой будет средняя индукция насыщения в любой точке плотного вещества. Действительно, сильные магниты создают индукции порядка 1 Тл, или  $10^4$  гаусс.

Интересно, что в плоском магните, намагниченном в перпендикулярном направлении,  $\mathbf{H}$  внутри направлено против  $\mathbf{M}$ : снаружи  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  (в СГС  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ ) и поле имеет дипольный вид; но без свободных токов  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{L} = 0$ . Поэтому, двигаясь вдоль силовой линии, мы непременно должны иметь участок, на котором  $\mathbf{H}$  направлено против  $d\mathbf{L}$ , что может быть только внутри материала (рис. 4.13). Магнитная же индукция в материале направлена вдоль  $\mathbf{M}$  и, значит, против  $\mathbf{H}$  внутри, поскольку ее нормальная компонента не меняется при переходе из магнетика в воздух.

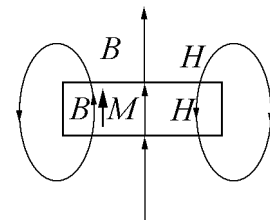


Рис. 4.13.

Существенная разница между постоянными магнитами и сегнетоэлектриками в том, что электрическое поле наэлектризованного сегнетоэлектрика вызывает движение зарядов. Идеальных изоляторов нет, и слабые токи в диэлектрике либо воздухе принесут на поверхность свободные заряды, которые скомпенсируют поле поляризации. Поэтому поляризованность может проявиться только после некоторых усилий, например, деформации образца, меняющей поляризацию. Постоянные же магниты, если их не греть и не ударять, сохраняют свое действие неопределенно долго (компасы и т.п.). В частности, по намагничиванию горных пород судят о направлении магнитного поля Земли, каким

оно было сотни миллионов лет назад. Это еще раз доказывает практическое отсутствие магнитных зарядов.

Гвозди, ключи и т.п., попадая в поле, приобретают свой момент (намагничиваются) и втягиваются в область сильного поля так же, как диэлектрики втягиваются в электрическое поле. Но диамагнетики, напротив, выталкиваются из магнитного поля (например, вода). В них направление поверхностных токов противоположное, и  $\mathbf{B}$  уменьшается. Идеальные диамагнетики – это сверхпроводники: в них вообще нет поля (точнее, индукции), оно полностью экранировано поверхностными токами. Для сверхпроводников  $\mathbf{B} = 0$ , эффективное  $\mu = 0$ . Ток в обычном проводнике идет по сечению, а в сверхпроводнике – по поверхности. Переход в сверхпроводящее состояние при замораживании как раз наблюдают по эффекту Мейснера – выталкиванию сверхпроводника из поля.

**Вопрос.** Поле диполя одинаково в электричестве и магнетизме. Поведение диполя в поле тоже одинаково – ориентируется. Почему же в электростатике диэлектрик обычно уменьшает поле, а среднее поле  $B$  в парамагнетике возрастает?

В СГС все поля ( $E, D, P, B, H, M$ ) имеют одинаковую размерность и одинаковую единицу измерения  $\text{г}^{1/2}/(\text{см}^{1/2} \cdot \text{сек})$ . Напомним, что единица магнитной индукции называется гаусс; однако применительно к полю в СГС ту же самую единицу называют эрстед. Как уже упоминалось в п. 4.1, единица электрического поля в СГС осталась без своего имени; то же относится к единицам  $D, P, M$ . В вакууме  $E = D$ ,  $B = H$ . Поэтому при изложении магнетизма в СГС обычно вводят сначала не индукцию, а магнитное поле, в частности, в силе Лоренца:  $F = qVH/c$ . Этим снимается терминологическое недоумение, отмеченное на стр. 34, относительно электрического поля/магнитной индукции. В веществе, конечно, и в СГС траекторию заряда искривляет индукция  $B$ , но об этом можно задуматься и позднее, к тому же в СГС отличие  $B$  от  $H$  существенно только в ферромагнетиках.

В СИ  $E$  измеряется в В/м, а  $B$  – в Тл, размерности их отличаются на размерность скорости. Различие в размерностях  $E$  и  $D$ ,  $B$  и  $H$  еще добавляет разнообразия (в вакууме в системе СИ  $D = \varepsilon_0 E$ ,  $B = \mu_0 H$ ). Совпадают только размерности пар ( $D, P$ ) и ( $H, M$ ). Измерение родственных по сути величин в разных единицах хотя и допустимо, но при каждом обращении к принципиальным вопросам порождает серьезные неудобства. Подробнее этот вопрос обсуждается в п. 5.5.

Поэтому мы и воспроизводим основные формулы в системе СГС, где они гораздо логичнее и осмысленнее. Если расчеты делать в СГС, в СИ при необходимости останется переводить результат. Это можно сделать, помня основные формулы в обеих системах и зная хотя бы один переводной коэффициент. Например, сила Лоренца в СИ  $F = qVB$ , зная кулон, ньютон и метр, а также вид формулы в СГС, получим  $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ гаусс}$ . Легче всего запомнить связь  $1 \text{ СГС}(\varphi) = 300 \text{ В}$ ; из нее по цепочке легко получить все остальные единицы.

## 4.7 Движение в неоднородном поле

Представим себе порядки величины. Если электрон со скоростью порядка  $0,1 \cdot c$  вращается в земном поле  $B \sim 1 \text{ гс}$ , или  $10^{-4} \text{ Тл}$ , то радиус орбиты  $R = mv/eB \sim 2 \text{ м}$ . Для

протона той же скорости будет около 4 км – мало по сравнению с размерами Земли. Поэтому захваченные Землей космические частицы, имеющие обычно скорость и вдоль поля, практически движутся вдоль силовой линии, «наматываясь» на нее. Удар в атмосферу вблизи мест сгущения силовых линий – полюсов вызывает полярные сияния.

Можно сказать, что поле Земли велико (сильно закручивает частицы). Поэтому от большей части космических лучей Земля нас экранирует. Поток заряженных частиц от Солнца тормозится на расстоянии порядка 10 радиусов Земли, где возникает ударная волна в этом **солнечном ветре**. Галактические магнитные поля полностью искажают направления космических лучей (кроме незаряженных  $\gamma$ ).

Рассмотрим модель неоднородного в направлении  $x$  поля  $B_z$  – со скачком  $\Delta B$  при  $x = 0$  (рис. 4.14). Слева радиус вращения (частицы, пущенной горизонтально) будет  $R = mv/eB$ , а справа

$$R + \Delta R = mv/e(B - \Delta B) \approx (mv/eB) \cdot (1 + \Delta B/B) .$$

За оборот, время которого  $T = 2\pi m/eB$ , смещение частицы вдоль оси  $y$  равно  $2\Delta R = 2(mv/eB^2) \cdot \Delta B$ . Средняя скорость смещения, или **дрейфа**, в направлении  $y$ :  $V_y = v\Delta B/\pi B$ . При плавном изменении индукции надо задать градиент  $dB/dx$  и положить  $\Delta B \sim R \cdot dB/dx$ . Скорость дрейфа будет  $V_y \sim (mv^2/eB^2) \cdot dB/dx$ . Как всегда, движется поперек (куда не ждешь). Поэтому, кроме основного наматывания на силовую линию, всегда есть поперечный дрейф из-за неоднородности. В

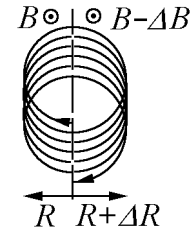


Рис. 4.14.

тороидальных устройствах по крайней мере одна из неприятностей – этот самый дрейф.

Оценим характерные параметры термоядерных устройств. Для термоядерной реакции нужна минимальная температура 10 кэВ или  $10^8$  К. Скорость ядра дейтерия будет  $v = \sqrt{3kT/m} \sim 10^6$  м/с. Радиус вращения  $R = mv_{\perp}/eB \sim 1$  см при  $B = 1$  Тл. Меньшее поле невыгодно, так как должно быть  $R \ll$  размера установки; большее трудно получить в большом объеме. Плотность энергии  $B^2/2\mu_0 \sim 0,5$  Дж/см<sup>3</sup>, магнитное давление около 5 атм<sup>11</sup>. В **токамаке** – термоядерном реакторе в виде бублика с сечением камеры  $2 \cdot 3$  м<sup>2</sup> и радиусом плазмы 5 м запасено 90 МДж, как в  $\sim 20$  кг взрывчатого вещества. Основное (тороидальное) поле создается катушками, намотанными на бублик снаружи.

Давление плазмы  $nkT$  должно быть заметно меньше магнитного, откуда  $n \sim 5 \cdot 10^6 / (10^8 \cdot 1,4 \cdot 10^{-16}) / 10 \sim 3 \cdot 10^{13}$  1/см<sup>3</sup>. Еще необходимо выполнение **критерия Лоусона**:  $n\tau > 10^{14}$ , то есть время удержания  $\tau$  должно быть порядка 3 с.

Скорость дрейфа в тороидальной ловушке

$$V_{dr} \sim (mv^2/eB^2) \cdot dB/dx \sim v \cdot (R/B) \cdot dB/dx .$$

Для простого тора поле обязательно неоднородно; силовые линии разной длины надеты

<sup>11</sup>Формулы для магнитной энергии и давления будут получены в следующей главе; пока достаточно указать, что они формально похожи на «электрические».

на один ток,  $dB/dx \sim B/x$ . Тогда  $V_{dr} \sim vR/x \sim v \cdot 0,01/5 \sim 2 \cdot 10^3$  м/с. Через  $10^{-3}$  с частицы выскочат на стенки камеры.

Здесь и помогает способность магнитного поля иметь незамкнутые силовые линии (п. 4.2). В частности, в токамаке возбуждают ток вдоль плазменного шнура, располагающегося по оси тора. Возникает еще полоидальное поле вокруг этого тока, и в результате силовая линия завивается в спираль. На магнитных поверхностях, тоже в виде бубликов, длины этих линий (точнее, пути вдоль них, если линия незамкнута) одинаковы, поле более однородно и орбиты частиц устойчивы. Заодно ток греет плазму.

Но как пустить ток по круговому плазменному кольцу, не прикасаясь к нему? По оси бублика проходит магнитопровод трансформатора. Через первичную обмотку – ряд катушек – пропускают ток, создавая изменяющийся магнитный поток через сечение кольца и, следовательно, ток во вторичной обмотке – плазменном шнуре.

Возможна неоднородность поля вдоль самого себя:  $dH_x/dx$ . Силовые линии при этом сгущаются в виде такой магнитной бутылки (рис. 4.15). Это сгущение считаем малым, так что основное движение – опять вокруг силовой линии.

Из-за малого наклона  $\theta$  силовой линии на частицу действует сила  $F_x = -eV_{\perp}B \sin \theta$ , тормозящая ее движение в область сильного поля. Если угол  $\theta$  соответствует радиусу  $R$ , то при смещении на  $dx$  те же силовые линии займут круг радиуса  $R - dx \cdot \sin \theta$ . Потoki магнитного поля через любое сечение такой магнитной трубки, или магнитной поверхности, одинаковы:

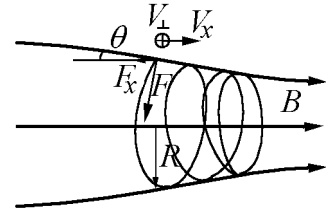


Рис. 4.15.

$$R^2 H = (R - dx \cdot \sin \theta)^2 (B + dB),$$

откуда  $\sin \theta = (R/2B) \cdot dB/dx$ . Работа  $F_x \cdot dx = -(eV_{\perp}R/2) \cdot dB$  равна изменению поступательной части кинетической энергии  $d(mV_x^2/2)$ . Скорость вдоль поля уменьшается.

С другой стороны, суммарно магнитное поле не производит работы, и «поперечная» энергия должна так же возрастать:

$$d \left( \frac{mV_{\perp}^2}{2} \right) = \frac{eV_{\perp}R}{2} \cdot dB$$

Подставляем значение  $R$  – радиуса орбиты  $mV_{\perp}/eB$  и получаем

$$\frac{dV_{\perp}^2}{V_{\perp}^2} = \frac{dB}{B},$$

откуда  $V_{\perp}^2 \sim B$  или  $V_{\perp}^2/B = \text{const}$ . Постоянно и произведение  $R^2 B$ , т.е. магнитный поток через орбиту частицы: она всегда движется по одной магнитной поверхности.

Пусть в области слабого поля  $V_{\perp} = V_0 \sin \varphi$ ,  $B = B_0$ . Тогда частица способна добраться до такого места, где  $V_0^2 \sin^2 \varphi / B_0 = V_0^2 / B$ . Определяется конус угла потерь:  $\sin^2 \varphi = B_0 / B_{max}$ . Частицы, попавшие в этот конус, то есть в слабое поле имевшие наклон скорости к силовой линии меньше  $\varphi$ , пролезут через магнитную пробку, а остальные отразятся и двинутся по спирали назад. Если с другой стороны тоже

есть пробка, получится **открытая ловушка**. Из-за столкновений частицы постоянно попадают в конус потерь и уходят из ловушки, а то бы давно работали термоядерные реакторы. Кстати, сгущение линий земного поля у полюсов тоже создает магнитную ловушку (радиационные пояса ван-Аллена). Из-за этих поясов пилотируемые полеты приходится проводить на небольшой высоте, где остатки воздуха не позволяют частицам концентрироваться. Зато трение о воздух сокращает жизнь космических станций.

Недостаток открытых ловушек – разные поля. Увеличивать поле трудно, и приходится большую часть объема заполнять малым полем. Соответственно растут размеры. Зато открытая ловушка не боится дрейфа. В ИЯФ СО АН СССР (ныне СО РАН) предложены многопробочные ловушки, в которых уход частиц имеет тип диффузии, а также амбиполярные, где потери тормозятся электрическим полем при разных температурах ядер и электронов.

Сейчас ясна принципиальная возможность осуществления управляемой термоядерной реакции. В начале XXI века в нескольких лабораториях получен положительный выход энергии в магнитных реакторах; есть хорошо проработанные проекты мирного производства энергии в сравнительно слабых термоядерных взрывах. В 2007 г. начато строительство международного опытного токамака ITER, который будет уже способен производить электроэнергию. Не ясно, однако, успеет ли развиваться коммерческая термоядерная энергетика (вопрос времени, оставшегося из-за экологических, демографических и социальных проблем).

### Приложение 1. Обсуждение магнитного взаимодействия точечных зарядов<sup>12</sup>.

Можно было бы предположить, что магнитное поле движущегося заряда, по аналогии с законом Кулона,

$$\mathbf{H} \stackrel{?}{=} \frac{q}{c} \cdot \frac{[\mathbf{v}\mathbf{R}]}{R^3}.$$

Имея много движущихся зарядов, будем складывать поля от них по принципу суперпозиции. Этому есть лишь одно мелкое препятствие: формула в таком виде неверна (потому и поставлен над равенством вопросительный знак). Нетрудно понять, чем она хуже кулоновского электрического поля в электростатике. Например, можно спросить: а какое расстояние  $R$  надо брать и какую скорость? Раз заряд движется, расстояние постоянно меняется, если движется с ускорением, то меняется и скорость. Если брать то, что имеется в данный момент, то это несколько выпадает из парадигмы поля и отдает дальнодействием. Допустим, до заряда световой год, и кто-то вдруг изменил его движение, неужели здесь мы это мгновенно почувствуем? Ведь в магнитной формуле уже явно присутствует хоть и большая, но конечная скорость  $c$ .

Если же учитывать запаздывание (что будет правильнее), то могут играть роль положение и скорость заряда в более раннее время, а именно такие, которые видны нам в данный момент. Эти сведения доносятся к нам светом.

Даже при постоянной скорости заряда не так просто отслеживать его положение в прошлый момент времени. Например, пусть заряд движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ :  $x = Vt$ . Мы наблюдаем его из неподвижной точки  $(X, Y)$  (рис. 4.16). «Настоящее» расстояние до заряда будет  $R = \sqrt{(X - Vt)^2 + Y^2}$ . А какое расстояние  $R'$  видно нам в данный момент (оно-то более существенно)?  $R'$  соответствует положению заряда в более ранний момент  $t'$ , причем  $t - t' = R'/c$ , или

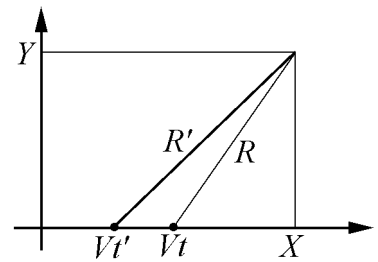


Рис. 4.16.

$$c^2(t - t')^2 = (X - Vt')^2 + Y^2.$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$t' = \frac{t - XV/c^2 - \sqrt{(X - Vt)^2 + Y^2(1 - V^2/c^2)}/c}{1 - V^2/c^2},$$

$$R' = c(t - t') = \frac{(V/c)(X - Vt) + \sqrt{(X - Vt)^2 + Y^2(1 - V^2/c^2)}}{1 - V^2/c^2}.$$

Формула получилась внушительная. Вдобавок не надо думать, что теперь остается только подставить  $R'$  в предположенное выше выражение для магнитного поля, и выйдет правильный ответ. Еще следует кое-что подправить. Если все сделать аккуратно (см., например, Фейнмановские лекции, вып. 6), то для **постоянной** скорости заряда получится

$$H_z = \frac{qVY(1 - V^2/c^2)}{c((X - Vt)^2 + Y^2(1 - V^2/c^2))^{3/2}}.$$

Запоминать это необязательно, но полезно убедиться, что входит не  $R'$ , а некоторая его часть. Одновременно замечаем, что формула (?) отличается отсутствием множителя  $(1 - V^2/c^2)$ . Стало быть, она годится только при малых скоростях, когда можно пренебречь  $V^2/c^2$ . Если же  $V$  меняется со временем, все выйдет еще запутаннее.

<sup>12</sup>В приложениях 1 и 3, поскольку они содержат дополнительный материал, будем пользоваться системой СГС, не делая различия между  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ .

В электростатике такой проблемы мы не заметили, так как заряды, в основном, не двигались. Но, конечно, в «электро-механических» задачах типа столкновения протонов или электронов, и вообще когда движутся источники электрического поля, возникают те же вопросы.

Например, электрическое поле равномерно движущегося заряда оказывается таким:

$$E_y = \frac{qY(1 - V^2/c^2)}{((X - Vt)^2 + Y^2(1 - V^2/c^2))^{3/2}} \cdot$$

$$E_x = \frac{q(x - Vt)(1 - V^2/c^2)}{((X - Vt)^2 + Y^2(1 - V^2/c^2))^{3/2}} \cdot$$

Это тоже необязательно запоминать. Однако для общего развития можно усмотреть, что поле  $\mathbf{E}$  направлено вдоль текущего (а не запаздывающего или какого-то еще) радиус-вектора  $\mathbf{R}$ : силовые линии смотрят во все стороны из точки, где находится заряд в данный момент (а не из той, где его видит наблюдатель, смотрящий из  $X, Y$ ), но величина поля зависит от направления: впереди и позади поле ослаблено в  $(1 - V^2/c^2)$  раз, а сверху и снизу усилено в  $1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$  раз. Мы это пока игнорировали, на том основании, что скорость света велика, то есть предполагали, что запаздывание несущественно.

Да и влияние запаздывания на электрическое поле сравнительно слабо. Электрическое поле определяется зарядом и расстоянием. Расстояние не может меняться скачком. Заряд не может мгновенно исчезнуть в достаточно крупной области, этому помешает закон сохранения заряда. А вот скорость можно изменить очень быстро. Поэтому для магнитного поля положение в этом смысле хуже, хотя по виду формул до этого не догадаешься.

Яркий пример – столкновение двух небольших противоположно заряженных тел, двигающихся с противоположными скоростями, с нейтрализацией зарядов при контакте. После столкновения, раз зарядов нет, ни электрического, ни магнитного поля вроде не должно быть вообще. Что касается электрического поля, то незадолго до столкновения элементарные поля приблизительно компенсировались, так как заряды противоположны; оставалось только дипольное, постепенно уменьшающееся до нуля поле. В момент столкновения (рис. 4.17) везде получаем точно  $E = 0$ . Никаких резких изменений у электрического поля нет. Но магнитные поля перед столкновением не вычитались, а складывались: и заряды, и скорости противоположны, действует же их произведение. И вот после аннигиляции это магнитное поле исчезает. Но не везде и не сразу. Как мы видим свет умерших звезд, так будем видеть и действие давно уже несуществующего заряда, пока не увидим его гибель. Из написанной на предыдущей странице формулы для  $H_z$  все это никак не следует; надо еще добавить условия применимости. Ненулевое поле будет во всех таких местах и в такие моменты, откуда и пока мы еще видим два движущихся заряда. А как только мы увидим столкновение, сразу пропадет и поле  $H$ . Из точки столкновения (например, начала координат) распространяется во все стороны со скоростью света сферическая область, внутри которой поля нет. (Кстати, вне этой области есть и электрическое поле, раз мы еще видим сближающиеся заряды. «На взгляд» столкновения еще не произошло; поэтому еще некоторое время  $(R/c)$  имеются электрические поля, но как бы созданные зарядами, пролетевшими друг сквозь друга. Напомним,

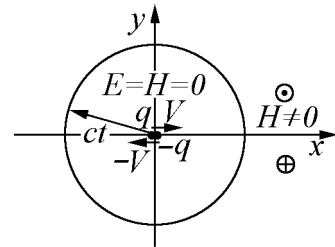


Рис. 4.17.

что силовые линии  $\mathbf{E}$  выходят не из видимого  $x = \pm Vt'$ , а из «истинного»  $x = \pm Vt$  положения

заряда. Хотя при  $t > 0$  это истинное положение не имеет смысла, спроектированное действие продолжается).

Может быть, не каждого убедят эти рассуждения во всех буквальных подробностях, тем более что многое сообщается без вывода, но нам пока достаточно уяснить, что базироваться на магнитных полях элементарных зарядов по меньшей мере преждевременно. Даже в магнитостатике магнитное поле движущегося заряда не имеет такого фундаментального значения, как кулоновское поле в электростатике.

### Приложение 2. Вывод формулы двойного векторного произведения.

Требуется доказать равенство

$$[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Два вектора  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  случайно могут быть параллельны. При этом  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = 0$ , но легко убедиться, что тогда и правая часть будет равна нулю: угол между  $(\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C})$  и между  $(\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B})$  один и тот же.

Переходим к более общей ситуации, когда  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  определяют некоторую плоскость. Векторное их произведение перпендикулярно этой плоскости. Вектор  $\mathbf{A}$  в принципе может иметь компоненту, выходящую из плоскости, но она не дает вклада в результат, так как параллельна  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$ . Влияет только лежащая в плоскости компонента  $\mathbf{A}$ , которую мы назовем  $\mathbf{A}_{\parallel}$ , и в той же плоскости будет лежать результат ее умножения на  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$ . Поэтому нам достаточно плоского чертежа (рис. 4.18).

Изобразим векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , а также  $\mathbf{A}_{\parallel}$ . Проведем пунктиром вспомогательные оси, перпендикулярные  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  соответственно, и разложим вектор  $\mathbf{A}_{\parallel}$  (для краткости обозначим его длину просто  $A$ ) по этим осям. Сначала полезно проецировать на  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , получится  $A \cos \beta$  и  $A \cos \alpha$ , а потом уже на перпендикулярные оси, учитывая, что отмеченные в точках пересечения углы равны  $\alpha + \beta$ .

Теперь можно записать векторное произведение в виде

$$[\mathbf{A}_{\parallel} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = [\mathbf{A}_{\perp B} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] + [\mathbf{A}_{\perp C} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]].$$

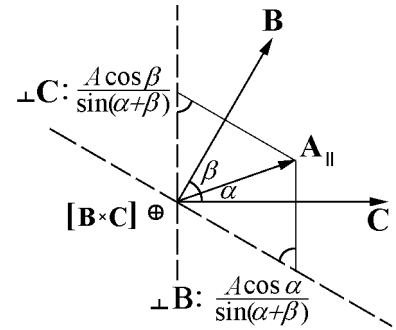


Рис. 4.18.

Перемножая  $\mathbf{A}_{\perp B}$  на  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$ , мы получим вектор, направленный вдоль  $\mathbf{B}$ , а произведение  $\mathbf{A}_{\perp C}$  на  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$  направлено против  $\mathbf{C}$ , что видно из рисунка. Учитывая еще, что модуль  $[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$  равен  $BC \sin(\alpha + \beta)$ , можем переписать последнее равенство:

$$[\mathbf{A}_{\parallel} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \frac{A \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot BC \sin(\alpha + \beta) - \frac{\mathbf{C}}{C} \cdot \frac{A \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot BC \sin(\alpha + \beta).$$

Сокращая лишнее и учитывая, что косинусы – это атрибуты скалярного произведения, наконец получаем

$$[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$



### Приложение 3. Связь закона Био – Савара и теоремы Стокса.

Получить из закона Био – Савара уравнение для циркуляции магнитного поля вряд ли можно, не переходя от интегральной формы уравнений к локальной дифференциальной.

Применим теорему Стокса к малому прямоугольному контуру площади  $dxdy$ , центр которого находится в точке  $x, y$ :

$$\oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = H_x(y - dy/2)dx + H_y(x + dx/2)dy - H_x(y + dy/2)dx - H_y(x - dx/2)dy.$$

Правую часть, группируя отдельно четные и нечетные слагаемые, можно с тем же успехом записать в виде

$$\left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dxdy.$$

Получилось преобразование интеграла по контуру в интеграл по площади. В более общем виде

$$\oint_L (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = \int_S (\text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}), \quad (4.12)$$

где контур  $L$  ограничивает поверхность  $S$ . Вектор ротора  $\text{rot} \mathbf{H}$  векторного же поля  $\mathbf{H}$  определяется следующим образом:

$$(\text{rot} \mathbf{H})_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad (\text{rot} \mathbf{H})_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (\text{rot} \mathbf{H})_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}.$$

Перевод (4.12) контурного интеграла (циркуляции вектора) в интеграл по площади от ротора этого же вектора составляет содержание общей **математической** теоремы Стокса.

Для физической ситуации, когда  $\mathbf{H}$  означает конкретно магнитное поле, получаем

$$\int_S (\text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{4\pi I}{c} = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}).$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любой поверхности  $S$ , должны совпадать подынтегральные выражения:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}.$$

Это – дифференциальная форма **физической** теоремы Стокса, или соответствующего уравнения Максвелла. Связать ее с законом Био–Савара будет легче, так как это уравнение **локальное**, связывающее величины в точке.

Попробуем подставить поле, определенное законом Био – Савара

$$\mathbf{H} = \int \frac{[\mathbf{j} \mathbf{R}]}{cR^3} dV$$

в полученное уравнение. Предварительно следует проделать еще кое-какую работу. Сначала заметим, что операцию «ротор вектора» можно записать в виде векторного произведения:

$$\text{rot} \mathbf{H} \equiv [\nabla \times \mathbf{H}],$$

используя формальный вектор градиента

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Теперь надо учесть, что в правой части закона Био–Савара – в объемном интеграле – следует различать координаты точки наблюдения  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  и координаты токов  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ , пробегающие весь объем, занятый этими токами. Более аккуратно следует написать

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dV'}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Оператор  $\nabla$  действует именно на координаты  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Внесем его под знак интеграла:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \left[ \nabla \times \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \right] dV'.$$

Двойное векторное произведение раскрываем по формуле «бац минус цап», но только надо учитывать, что на  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  оператор  $\nabla$  не действует, а производные ставить впереди функции, так что выйдет скорее «бац минус ащц»:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV' - \frac{1}{c} \int \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (4.13)$$

Скалярное произведение  $\nabla$  на вектор называют еще **дивергенцией** этого вектора:

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Рассматривая поток вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность малого параллелепипеда, и действуя как при выводе (4.12), можно прийти к дифференциальной форме теоремы Гаусса – физическому дифференциальному уравнению Максвелла:

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

и к общей **математической** теореме Гаусса:

$$\oint_S (\mathbf{A} d\mathbf{S}) = \int_V \text{div} \mathbf{A} dV, \quad (4.14)$$

причем объем  $V$  ограничен замкнутой поверхностью  $S$ .

Заметим, что

$$\text{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\text{div}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \text{div}' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

где  $\text{div}'$  означает, что производные берутся теперь по координатам  $\mathbf{r}'$ . Это верно и для любой функции разности радиусов.

Вернемся к выражению (4.13), и начнем с первого интеграла, заменив в нем  $\text{div}$  на  $\text{div}'$ , как показано выше:

$$\frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \text{div}' \left( \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV'.$$

Объем интегрирования  $V'$  разобьем на две части. Первая  $V'_1$  окружает точку  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  и будет очень маленькая, так что в ее пределах плотность тока постоянна:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Вторая  $V'_2$  – это весь остальной объем токов, возможно даже бесконечный:

$$\frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \int_{V'_1} \text{div}' \left( \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV' + \frac{1}{c} \int_{V'_2} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \text{div}' \left( \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV'.$$

Прямым вычислением легко показать, что

$$\operatorname{div}' \left( \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{y' - y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{z' - z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0.$$

Следовательно, интеграл по удаленной части объема  $V_2'$  обращается в нуль. Казалось бы, это значит, что и интеграл по  $V_1'$  равен нулю. Но вычислять производные, как сделано выше, можно только если  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  не совпадают, потому что при совпадении вектор  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$  обращается в бесконечность. Поэтому с объемом  $V_1'$ , содержащим точку  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , надо разобраться отдельно.

Заметим, что вектор  $(\mathbf{r}' - \mathbf{r})/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$  можно рассматривать как электрическое поле единичного заряда, расположенного в точке  $\mathbf{r}$ . Интеграл от дивергенции этого поля по малому объему  $V_1'$ , включающему точку  $\mathbf{r}$ , заменяем на интеграл по поверхности, т.е. поток поля единичного заряда, равный из теоремы Гаусса  $4\pi$ . Получаем, что первый интеграл в (4.13) равен  $4\pi\mathbf{j}(\mathbf{r})/c$ . Осталось доказать, что второй обращается в нуль.

Не будем расписывать этого с той же подробностью. Сменим аргумент дифференцирования в этом втором интеграле:

$$\frac{1}{c} \int \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{1}{c} \int \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \right) \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

Теперь снова воспользуемся электростатической аналогией. Выражение под интегралом – это производная электрического поля единичного заряда по направлению вектора  $\mathbf{j}$ . Производная – это приблизительно разность, или же сумма полей зарядов (+1) и (-1), сдвинутых на малое расстояние. После некоторого умственного усилия можно понять, что под интегралом стоит поле диполя, причем дипольный момент численно равен  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'$ .

В электростатике сумма ряда дипольных полей, конечно, не обязательно нулевая. Но вспомним, что здесь у нас не просто диполи, а их «токовые» аналоги. Типичный случай – замкнутый контур тока. В электростатике надо представить себе тонкое кольцо, поляризованное вдоль образующей. Это можно понимать как ряд из диполей, выстроенных в затылок. Тогда минус переднего диполя гасится плюсом заднего. Везде будет полная компенсация заряда, и суммарное поле занулится. В магнитостатике все токи можно представить как совокупность таких замкнутых колец. Отсюда и следует, что

$$\frac{1}{c} \int \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = 0,$$

и, значит,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Применяя математическую теорему Стокса (4.12), имеем

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi}{c} I_L.$$

Напомним, в этой формуле  $\mathbf{H}$  понимается как полученное из закона Био – Савара. Таким образом, из закона Био – Савара получена магнитная теорема Стокса.