

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Курс лекций для ФМШ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

А. П. Ершов

5 января 2011 г.

Глава 5

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

5.1 Закон Фарадея

В уравнениях, которые мы рассматривали до сих пор, электрическое и магнитное поля были независимы (не считая того, что E поддерживало источники магнитного поля – токи). Но существует и непосредственная связь между полями.

Пусть имеется два «рельса» – проводника, по которым скользит со скоростью u проводящая же перекладина. Магнитная индукция B , перпендикулярная плоскости рисунка, существует слева от пунктирной линии (например, это внутренность катушки). Все это имеет место в системе отсчета, которую мы назовем исходной, а обозначим K .

На заряд e внутри движущегося проводника действует сила Лоренца $F_L = euB$, направленная вверх (чтобы не запутаться, берем положительный носитель заряда). Пусть проводник начал двигаться только что. Заряды в нем начнут перемещаться вверх. Постепенно верхний рельс и верхняя обкладка конденсатора C зарядятся положительно, а нижние рельс и обкладка – отрицательно. Возникнет электрическое поле E , направленное вниз и противодействующее силе Лоренца (рис. 5.1).

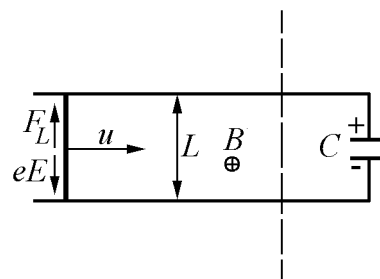


Рис. 5.1.

Равновесие между электрической и магнитной силой возникнет при условии $euB + eE = 0$, то есть достигнется поле $E = uB$ (по величине), напряжение на конденсаторе $V = uBL$, где L – длина движущегося проводника. Заметим, что внутри проводника есть электрическое поле, к чему мы не привыкли: законом на самом деле преследуется не поле E в проводнике, а существование полной силы, действующей на подвижный заряд. Между крыльями самолета, летящего в земном магнитном поле $B \sim 10^{-4}$ Тл, возникнет напряжение $2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 30 = 0,6$ В. Внутри самолета использовать это напряжение нельзя, так как провода тоже движутся.

Перейдем теперь в систему отсчета K' , сопровождающую перекладину. Теперь она стоит на месте, а граница магнитного поля едет со скоростью $-u$ налево (вместе с магнитом или катушкой, создающими поле). Двигутся также рельсы и конденсатор.

Разумеется, заряды на обкладках конденсатора от перехода в другую систему не исчезнут, и на конденсаторе будет то же самое напряжение V (рис. 5.2).

Что же будет внутри перемычки? Силы Лоренца в системе отсчета K' нет как таковой (теперь в материале $u = 0$). Если при этом в проводнике будет электрическое поле, заряды в нем начнут ускоряться, чего быть не может: в цепи все давно установилось и от смены системы отсчета ток не пойдет. Приходится признать, что в проводнике поля нет.

Куда исчезло электрическое поле? Ведь на рельсах сидят те же самые заряды, создававшие $E = uB$ вниз. Снаружи магнитного поля они действуют по-прежнему. Следовательно, поле E не просто «выключено», а чем-то компенсировано. Например, можно предположить, что движение источников поля H (катушек либо магнитов) создает поле ΔE , направленное в нашем случае вверх, а по величине тоже равное uB ; в результате сложения обоих электрических полей получается нуль и заряды в проводнике будут неподвижны, чего мы и добиваемся. Это дополнительное поле заменяет исчезнувшую силу Лоренца. Поскольку же нужна сила, действующая на покоящиеся заряды, это будет именно электрическое поле.

Но откуда это ΔE возьмется? Мы привыкли, что электрическое поле создается зарядами. Где заряды – источники компенсирующего поля ΔE ? Оказывается, такие заряды есть и сидят они там же, где токи, создающие магнитное поле. В движущемся магните компенсация зарядов нарушается, и он становится электрически поляризованным. Это релятивистский (связанный с теорией относительности) эффект. Мы доберемся до него в конце курса, а пока примем на веру¹. Можно было бы предположить влияние других полей, но это противоречит опыту. Например, поле тяжести тут никак не меняется. Придумывать же специальное поле с теми же свойствами, как у электрического – это пустое занятие.

Получается интересная ситуация. Вольтметр, находящийся вне магнитного поля, покажет напряжение между рельсами V , а такой же вольтметр внутри магнитного поля покажет нуль, если он неподвижен в системе отсчета, сопровождающей перемычку. До сих пор электрическое поле у нас было потенциальным: $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L})$ был равен нулю. Теперь в системе K' это нарушается. Возьмем контур, проходящий через перемычку, рельсы и замыкающийся вне поля B (хотя бы через конденсатор или где-то рядом). При проходе по часовой стрелке $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = V = uBL$, так как электрическое поле есть только справа.

Мы почти уже получили замену одного из уравнений Максвелла – бывшего условия потенциальности электрического поля, причем E связалось с B . Осталось выразить правую часть через более подходящие величины. Заметим, что $uL = -dS/dt$, где S –

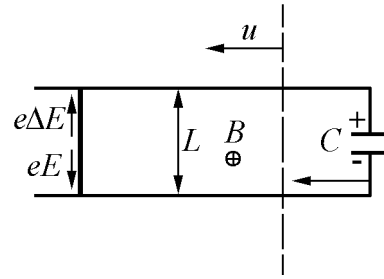


Рис. 5.2.

¹Косвенный признак, за которым проглядывается теория относительности – присутствие в СГС-формулах магнетизма электродинамической постоянной c (в СИ – пары $\epsilon_0 \mu_0$, из которых также составляется c).

площадь внутри контура, пронизанная магнитным полем. Тогда в правой части можно написать $-B \cdot dS/dt$ или $-d(BS)/dt$, так как у нас величина B от времени не зависит. Величина $\Phi = BS$ или в более общем виде $\Phi = \int(\mathbf{B} d\mathbf{S})$ по **незамкнутой** поверхности S , натянутой на некоторый контур, называется **магнитным потоком** через поверхность S . Окончательно имеем **закон Фарадея**:

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \left(= -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \text{ в СГС} \right), \quad \text{где } \Phi = \int_{S_L} (\mathbf{B} d\mathbf{S}). \quad (5.1)$$

Здесь L – произвольный контур, S_L – опирающаяся на него поверхность, а направление вектора $d\mathbf{S}$ выбирается в сторону, куда двинется буравчик (правый винт), вращаемый по направлению обхода контура L . Поверхность S , имеющая границей контур L , в остальном произвольна. Поток от деформации S не зависит в силу теоремы Гаусса (все силовые линии все равно пройдут насквозь).

Закон (5.1) выполняется также, когда меняется не S , а магнитное поле. В эксперименте 29 августа 1831 г. Фарадей именно открыл этот закон, включая и выключая поле в катушке. Контуром, через который менялся магнитный поток, была такая же катушка, намотанная поверх (но изолированная от первой) и замкнутая на гальванометр. И нам можно было считать L и S_L фиксированными, а индукцию – переменной (уменьшающейся до нуля в узкой переходной зоне, которая перемещается со скоростью $-u$).

В нашем примере при обходе по часовой стрелке $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) > 0$, так как справа поле \mathbf{E} направлено вниз, а слева $E = 0$. Буравчик, вращаемый по выбранному пути, двинется «в лист», то есть направления \mathbf{B} и $d\mathbf{S}$ совпадают. Сам $\int(\mathbf{B} d\mathbf{S}) > 0$, но он уменьшается: $d\Phi/dt < 0$. Минус в правой части исправляет равенство. По-другому можно определить направление \mathbf{E} из **правила Ленца**: токи, вызываемые электрическим полем в контуре, стремятся компенсировать изменение магнитного потока. Если конденсатор заменить сопротивлением, ток пойдет по часовой стрелке и создаст дополнительную поле \mathbf{B}' того же направления, что исходное \mathbf{B} . Это поле компенсирует (вообще говоря, частично) уменьшение основного магнитного потока. Именно из-за правила Ленца в диамагнетиках индуцируются магнитные моменты, противоположные внешнему полю.

В исходной системе К поле E потенциально, $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$. Уравнение (5.1) также выполняется, если мы рассматриваем неподвижный в системе К контур, поскольку через него магнитный поток не меняется: правая часть (5.1) равна нулю. Но через **подвижный контур**, одна из сторон которого движется вместе с проводником, магнитный поток будет уменьшаться. Принята и другая форма записи закона Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \left(= -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \text{ в СГС} \right),$$

где \mathcal{E} – это **электродвижущая сила**, возникающая в меняющемся контуре (в данном случае – из-за силы Лоренца, $\mathcal{E} = \oint(\mathbf{F}_L/e) d\mathbf{L}$ по контуру). Эта сторонняя, т. е. неэлек-

трическая, э.д.с. \mathcal{E} вызывает токи в цепи совершенно так же, как любой источник тока. Например, если сопротивление замкнутого контура R , пойдет ток \mathcal{E}/R .

Величины \mathcal{E} и $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L})$, хотя численно и равные, существуют в разных системах отсчета. В то же время они не совсем чужие, так как поля \mathbf{B} и \mathbf{E} родственны. Мы видим, что при переходе в другую систему из магнитного поля делается электрическое.

Изменяя магнитный поток через контур (двигая проводники или меняя поля от других контуров), можно вызвать в контуре токи. На этом основана современная электротехника, если не считать приборов типа карманного фонаря, где сторонние силы – химического происхождения. Генераторы, грубо говоря, – это рамки, вращаемые внешними силами в магнитном поле.

Рассмотрим катушку, через которую пропускается возрастающий ток (разрез показан на рис. 5.3). Внутри катушки будет возрастать магнитное поле. Если взять контур в виде соосного круга, то через него будет возрастать магнитный поток, $d\Phi/dt > 0$. Тогда по закону Фарадея появится ненулевая циркуляция \mathbf{E} по контуру: $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) < 0$, если двигаться по часовой стрелке. Из симметрии надо считать \mathbf{E} направленным вдоль окружности и на ней постоянным по величине. Получаем **электрическое** поле вполне соленоидального характера с **замкнутыми** силовыми линиями. Случай, когда круг имеет больший радиус, чем катушка (показанный на рис. 5.3) интересен тем, что в близкой окрестности электрической силовой линии магнитного поля нет, что не мешает возникновению электрического поля.

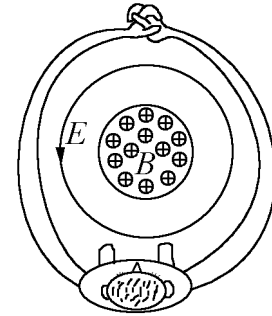


Рис. 5.3.

Такое поле нельзя сделать **никаким** распределением зарядов, так как от каждого заряда поле будет потенциально. Поэтому рассуждения о поляризации проводов и магнитов в начале параграфа, собственно, не так важны. Вывод: изменяющееся магнитное поле способно порождать электрическое. Опять видим, что основные объекты – это поля.

Эффекты непотенциальности поля \mathbf{E} вокруг катушки с изменяющимся током вполне заметны. Вольтметр с замкнутыми проводами, охватывающими катушку, покажет $\mathcal{E} = d\Phi/dt$, а если провода «с одной стороны» катушки, показания прибора будут совершенно другие (в идеале нуль). Эти индуктивные наводки сильно затрудняют измерения в цепях с быстропеременными токами. Пусть у нас есть катушка с сечением 100 см^2 , а индукция нарастает со скоростью $3 \cdot 10^4 \text{ Тл/с}$ (300 гаусс за микросекунду). Тогда циркуляция по наружному контуру равна $10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^4 = 300 \text{ В}$. Если человек (не прикасаясь к катушке!) сделает руками вокруг нее кольцо, по нему пойдет ток, в точности как если взяться за провода с таким напряжением; этот ток смертельный, да еще с некоторым запасом. Правда, долго поддерживать такой рост поля трудно: уже через 3 миллисекунды получился бы мегагаусс; но можно создавать в катушке индукцию амплитудой $3 \cdot 10^{-2} \text{ Тл} = 300 \text{ гаусс}$ переменным током с частотой $\omega = 1 \text{ МГц}$ неопределенно долгое время, что столь же опасно для человека снаружи.

В заключение – соображения эстетического (для кого-то – формального) характера.

В электростатике интеграл по замкнутому контуру $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$, но важное значение имеет напряжение $V = \int(\mathbf{E} d\mathbf{L})$ по незамкнутому контуру (например, оно вызывает поражения током). Поскольку нет магнитных зарядов, $\oint(\mathbf{B} d\mathbf{S}) = 0$ для любой замкнутой поверхности. А поток через незамкнутую поверхность $\Phi = \int(\mathbf{B} d\mathbf{S})$ тоже очень важен. Напротив, «замкнутые» интегралы $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{S})$ и $\oint(\mathbf{B} d\mathbf{L})$ не равны нулю и важны сами по себе, тогда как подобные интегралы по незамкнутым множествам ничего существенного не выражают.

Уравнение (5.1) справедливо и в присутствии диэлектриков и магнетиков: в левой части следует писать по-прежнему истинное среднее электрическое поле в веществе, а в правой – истинное среднее магнитное поле, т.е. вектор магнитной индукции. В п. 5.3 будет получено уточненное уравнение Максвелла, обобщающее магнитную теорему Стокса.

5.2 Энергия магнитного поля. Индуктивность

Магнитное поле, как и электрическое, тоже имеет энергию. Рассмотрим две шины длины L , ширины b , по которым течет ток I (рис. 5.4). Индукция между шинами $B = \mu_0 I/b$ – это сумма двух индукций от шин $B_{1,2}$, каждая из которых равна $\mu_0 I/2b$. Сила, действующая на одну из шин, по закону Ампера $F = IB_i L = \mu_0 I^2 L/2b = (B^2/2\mu_0) \cdot Lb$. Видим, что индукция \mathbf{B} оказывает магнитное давление $p = B^2/2\mu_0 \equiv \mu_0 H^2/2$, чем напоминает электрическое поле. B в данном случае давит наружу: шины, между которыми заключено магнитное поле, отталкиваются (пластины же заряженного конденсатора притягиваются). В СГС $p = B^2/8\pi = H^2/8\pi$.

Перейдем к вычислению энергии. Пусть расстояние между шинами увеличивается от нулевого до величины x , при постоянной величине тока и магнитного поля. Для поддержания тока нужен внешний источник. Э.д.с., или напряжение, возникающее при растяжении контура,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot \frac{dS}{dt} = -BL \cdot \frac{dx}{dt}.$$

(Направление обхода выбрано по току). Будь контур просто замкнут, ток под действием этой эдс стал бы уменьшаться; для поддержания тока нужна противоположная эдс источника $\mathcal{E} = +BL \cdot dx/dt$. Такое напряжение и надо приложить к контуру. За время dt работа источника $dA = \mathcal{E}dq = BL \cdot (dx/dt) \cdot Idt = BLI \cdot dx$. Перемещение на расстояние x требует работы $A = BLIx$.

Поскольку шины отталкиваются, они сами совершают работу $A = Fx = (B/2)LIx$, вдвое меньшую по величине. Ее надо вычесть из работы источника, чтобы найти изменение энергии системы токов:

$$\Delta W = \frac{BLIx}{2} = \frac{BH}{2} Lbx.$$

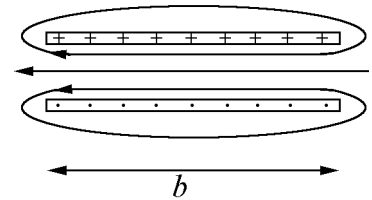


Рис. 5.4.

На единицу объема поля приходится энергия

$$w = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \mu_0 \frac{H^2}{2} \quad \left(= \frac{BH}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{H^2}{8\pi} \text{ в СГС} \right) \quad (5.2)$$

совершенно аналогично электрическому случаю (1.12). В присутствии магнетика выражения также похожи на электрические, см. (5.3).

Выразим теперь энергию (уже всего объема) через ток:

$$W = \frac{\mu_0 LxI^2}{2b} = \frac{\mathcal{L}I^2}{2} \quad \left(= \frac{2\pi LxI^2}{c^2 b} = \frac{\mathcal{L}I^2}{2c^2} \text{ в СГС} \right).$$

Коэффициент $\mathcal{L} = \mu_0 Lx/b$ (в СГС $\mathcal{L} = 4\pi Lx/b$) называется **индуктивностью**. Это – аналог емкости. И в общем случае энергия пропорциональна квадрату тока (в электростатике аналог: $q^2/2C$). Разумеется, индуктивность зависит от формы проводников. У проводника простой формы индуктивность в СГС порядка длины. Единица индуктивности в СИ – генри; из формулы $W = \mathcal{L}I^2/2$ получаем $1 \text{ Гн} = \text{Дж}/\text{А}^2 = c^2 \cdot 10^7 / (3 \cdot 10^9)^2 = 10^9 \text{ см}$.

Другой способ определения индуктивности – через магнитный поток. Изменение энергии катушки

$$dW = \mathcal{L}IdI = \mathcal{E}Idt = \frac{d\Phi}{dt}Idt = Id\Phi \quad \text{или} \quad d\Phi = \mathcal{L}dI \Rightarrow \Phi = \mathcal{L}I \quad \left(\Phi = \frac{\mathcal{L}I}{c} \text{ в СГС} \right).$$

Эта формула аналогична электрической $q = CV$. Для катушки из N витков, площади S и высоты h один виток дает $\Phi_1 = \mu_0 NIS/h$. Силовые линии проходят сквозь все витки, и суммарный поток через катушку $N\Phi_1 = \mu_0 N^2 IS/h$. Получаем индуктивность $\mathcal{L} = \mu_0 N^2 S/h$. Контур надо брать замкнутый; в этом примере предполагалось, что вклад замыкающих проводов по сравнению с самой катушкой мал.

Если в одном контуре идет ток, создается магнитное поле, и его силовые линии могут пронизывать другой контур. Поток через контур 2 от контура 1 $\Phi_{12} = \mathcal{L}_{12} \cdot I_1$, где \mathcal{L}_{12} – **коэффициент взаимоиנדукции** двух контуров. Например, на рис. 5.5 один контур – катушка из N_1 витков, площади S_1 и высоты h_1 , а на нее надета катушка N_2 , $S_2 > S_1$, $h_2 < h_1$ (постановка опыта Фарадея). Индукция $B_1 = \mu_0 N_1 I_1 / h_1$, поток $\Phi_{12} = B_1 N_2 S_1 = \mu_0 N_1 N_2 I_1 S_1 / h_1 = \mathcal{L}_{12} \cdot I_1$. Взаимоиндукция $\mathcal{L}_{12} = \mu_0 N_1 N_2 S_1 / h_1$. Можно показать, что всегда $\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21}$ (покажите для этого примера).

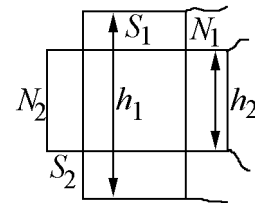


Рис. 5.5.

Пусть имеются две катушки, причем линии индукции поля, созданного первой, целиком проходят через вторую (как на рис. 5.5), и через контур 1 пропускают переменный ток $I_1(t)$. В нем возникает э.д.с. $-d\Phi/dt = -\mathcal{L}_1 \cdot dI_1/dt$. Для поддержания тока следует прикладывать к индуктивности противоположное напряжение $V_1 = +\mathcal{L}_1 \cdot dI_1/dt$. Напряжение на выходе катушки 2

$$V_2 = V_1 \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1} = V_1 \frac{N_2}{N_1}.$$

Такие **трансформаторы** позволяют получать из высокого напряжения низкое и наоборот. В бытовых приборах, кроме того, они отвязывают схему от сети. Ферромагнитные сердечники ($\mu \gg 1$) позволяют мотать катушки необязательно одну поверх другой, так как почти все силовые линии \mathbf{B} заключены в магнитопроводе. Так как магнитный поток определяется \mathbf{B} , индуктивность катушки с сердечником возрастет в μ раз; энергия поля в линейном магнетике (с постоянной магнитной проницаемостью μ)

$$w = \frac{(\mathbf{BH})}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \quad \left(= \frac{(\mathbf{BH})}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \mu \frac{H^2}{8\pi} \text{ в СГС} \right), \quad (5.3)$$

что аналогично электростатическим соотношениям.

Но имеется и практическое различие: значительная намагниченность (\mathbf{B} резко не равно $\mu_0 \mathbf{H}$, μ заметно отличается от 1) почти всегда означает нелинейность, когда μ непостоянна, или же вообще не имеет смысла как характеристика вещества (гистерезис, обсуждавшийся в п. 4.6). Тогда следует писать

$$w = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{H} d\mathbf{B}),$$

где интеграл берется от состояния, в котором $B = H = 0$, до конечного, причем вдоль реальной кривой $B(H)$, по которой менялось состояние магнетика.

На рис. 5.6 показана так называемая петля гистерезиса, по которой путешествует состояние материала при периодических изменениях $H(t)$. Существенно, что «магнитная» энергия есть не только энергия магнитного поля, а включает и отклик вещества: это вся энергия, потраченная источником на создание данного магнитного состояния. За цикл будет израсходована энергия, равная площади цикла, деленной на 2 (или на 8π в СГС). Но раз магнитное состояние воспроизвелось то же, что было в начале, то и энергия, за-

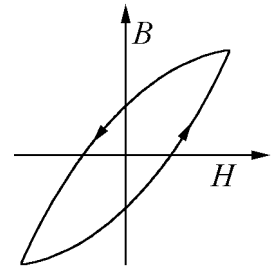


Рис. 5.6.

ключенная «чисто» в магнитном поле, не изменилась. Поэтому постоянно добавляемая энергия идет в тепло. Если петля широкая (площадь ее велика), то магнетик будет сильно нагреваться. Для трансформаторов, в которых магнитное поле меняется именно циклически, подбирают материалы с узкой петлей гистерезиса (и по возможности не заходят в режим насыщения). Заметим, что подобные вещи происходят и в некоторых диэлектриках (сегнетоэлектрики), но при этом существуют широкие классы линейных диэлектриков с заметной диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon - 1 \gtrsim 1$).

В 1912 г. открыто явление **сверхпроводимости**. При низких температурах (обычно несколько градусов Кельвина) удельное сопротивление некоторых металлов обращается в нуль (не просто мало, а буквально нулевое). Соответственно электропроводность становится бесконечной. Поэтому внутри сверхпроводника в принципе не может быть электрического поля. Из закона Фарадея следует, что там равна нулю и магнитная индукция. Если по сверхпроводящему проводу пустить ток, поле \mathbf{B} возникнет только снаружи провода, а внутри останется $\mathbf{B} = 0$. Следовательно, в толще проводника рав-

на нулю плотность тока. Поэтому весь ток сосредоточен в тонком поверхностном слое². Важное свойство сверхпроводящего контура – через него магнитный поток всегда сохраняется. Действительно, если контур L проходит целиком внутри сверхпроводника, $\oint_L(\mathbf{E}d\mathbf{L}) = 0$, но этот интеграл пропорционален $d\Phi/dt$.

Если в сверхпроводник магнитное поле не проникает вообще, то в хороший «обычный» проводник поля и токи просачиваются постепенно, за небольшое время – на малую толщину так называемого **скин-слоя** (skin – кожа).

Разберем качественно скин-эффект. На рис. 5.7 ток и поля проникают сверху вниз. Из теоремы Стокса в скин-слое

$HL - (H + dH)L = jLdx$, или $dH/dx = -j = -\sigma E$. Из закона Фарадея в другой проекции $EL - (E + dE)L = Ldx \cdot \mu_0 dH/dt$ (знак – пропал из-за направления H : против правила обхода контура), откуда $dE/dx = -\mu_0 dH/dt$. Вместо того, чтобы решать эту систему уравнений (строго говоря, в частных производных), ограничимся оценками: $dH/dx \sim H/\delta$, $dH/dt \sim H/t$ и т.п. (δ – характерная толщина скин-слоя). Получаем

$$\delta \sim \sqrt{\frac{t}{\mu_0 \sigma}} \quad \left(= \sqrt{\frac{c^2 t}{4\pi \sigma}} \text{ в СГС} \right).$$

Видим, что δ растет со временем как \sqrt{t} , подобно задачам диффузии и теплопроводности. Для меди $\delta \sim 14 \cdot \sqrt{t}$ в СГС; при $t = 1$ мкс $\delta \sim 0,14$ мм. Для переменного тока вместо t подойдет $1/\omega$ и при промышленной частоте скин-слой около 1 см. У не очень толстых проводов работает все сечение.

Энергия магнитного поля может быть гораздо больше, чем электрического. E ограничено пробоем (\sim сотен кВ/см или 10^3 СГС). Магнитного пробоя не бывает, так как нет магнитных зарядов. Постоянные магниты дают $\sim 10^4$ гаусс (то есть единиц СГС), электромагниты $\sim 10^5$, в одноразовых разрушаемых импульсных катушках (обычно одновитковых) достигается $\sim 10^6$. Большие поля получают при магнитной кумуляции. Если хорошо проводящий цилиндр с продольным магнитным полем внутри быстро сжать (взрывом), то изменения поля не проникают в толщу металла; там B и $E = 0$. Поэтому сохраняется магнитный поток через цилиндр (так как $\oint(\mathbf{E}d\mathbf{L}) = 0$). Если радиус уменьшить в 10 раз, поле должно возрасти в 100 раз. Рекорд А.Д. Сахарова, А.И. Павловского, В.К. Чернышева и др. (25 Мгс, 1965) побит только в последние годы.

Кроме кожи, магнитная кумуляция ограничена неустойчивостью сжимающей магнитное поле поверхности. При 10^6 гаусс магнитное давление $B^2/8\pi \sim 4 \cdot 10^{10} = 40000$ атм, а при 10^7 гс – $4 \cdot 10^6$ атм. В этом интервале металлы текут. Поскольку магнитное поле сопротивляется сжатию, возникает неустойчивость типа Релея-Тейлора. Струи металла проваливаются вперед, портят симметрию и уничтожают датчики до достижения максимального сжатия. Этому же способствует нагрев поверхности током.

²Более того, если при комнатной температуре ток шел по толще провода, при охлаждении до температуры сверхпроводящего перехода он вытесняется на поверхность (эффект Мейснера), вытесняется наружу и магнитное поле.

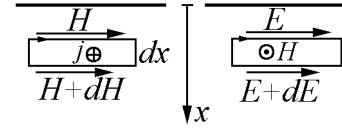


Рис. 5.7.

Мы видели, что отталкивание пластин с противоположными токами можно представить как результат «поперечного» магнитного давления. Возьмем замкнутую катушку, для которой сохраняется магнитный поток Φ (тогда не нужен источник). Энергия $\mathcal{L}I^2/2 = \Phi^2/2\mathcal{L}$. Увеличим длину катушки на dh ; индуктивность $\mathcal{L} = \mu_0 N^2 S/h$ уменьшится, а энергия возрастет. Значит, сама катушка стремится укорачиваться, уменьшая энергию; сила $F = dU/dh = (\Phi^2/2) \cdot (dh/dh)/(\mu_0 N^2 S)$. Подставляя $\Phi = NBS$, получим $F = (B^2/2\mu_0) \cdot S$, то есть магнитное натяжение (отрицательное давление) $B^2/2\mu_0$ вдоль силовых линий, в точности как для электрического поля. Правда, естественная магнитная постановка о давлении поперек силовых линий для E буквально не проходит, так как скачок параллельной составляющей E в электростатике невозможен. Но когда металлическая пластина втягивается в конденсатор, вполне можно найти силу через разность положительных электрических давлений поперек силовых линий (см. пример в п. 1.8). В среде при непрерывном E_{\parallel} возможен скачок D_{\parallel} . Например, под действием разности электрических давлений диэлектрик втягивается в конденсатор. В общем, электрическое и магнитное поля подобны резинкам, натянутым с силой ($HB/2$ или $ED/2$) на единицу площади и отталкивающимися друг от друга с таким же давлением³.

Обсудим, откуда берется магнитное поле Земли. Когда-то думали, что внутри Земли имеется большой постоянный магнит. По современным представлениям, Земля имеет железное ядро, внешний радиус которого около половины земного радиуса (соответственно объем ядра около 1/8 объема Земли). Но в ядре слишком высоки температуры (3000 – 4000 К), чтобы оно находилось в ферромагнитном состоянии и могла существовать постоянная намагниченность.

Ядро, кроме самой внутренней его части радиусом около 1200 км, жидкое. В жидком железе из-за внутреннего нагрева радиоактивным распадом (в основном таких примесей, как уран, торий и калий-40) происходит конвекция. При появлении случайного затравочного магнитного поля в проводящем движущемся веществе возникает эдс индукции. Возникают токи, сами создающие магнитное поле. Если течение имеет подходящую конфигурацию, это добавочное поле складывается с начальным. Далее усиливается суммарное поле, и т.д. Подобный процесс самовозбуждения происходит в промышленных генераторах электрического тока – динамомашин, почему возникновение поля за счет кинетической энергии потоков жидкости и называют эффектом **гидромагнитного динамо**. Он возможен при высокой электропроводности среды, больших размерах, достаточной скорости течений и подходящей структуре потоков. На конвекцию существенно влияет вращение Земли, которое в конце концов определяет преимущественное направление оси магнитного диполя, близкое к оси вращения. Это значит, что средний ток в ядре кольцевой, направленный более или менее вдоль экватора. Но поскольку поле – продукт неустойчивости, иногда происходит «переполусовка», в последнее время – несколько раз за миллион лет. В периоды смены знака величина поля заметно меньше, а «временные» полюса гуляют по всей поверхности Земли.

Сейчас южный магнитный полюс находится в северном полушарии (там вектор поля направлен вниз). Это значит, что ток в ядре течет приблизительно с востока на запад, в направлении вращения Земли. Ось диполя наклонена на $11,5^\circ$ и прецессирует на запад со скоростью $\sim 0,2^\circ$ в год. Точки пересечения оси магнитного диполя с земной поверхностью называют

³В СГС $HB/8\pi$ или $ED/8\pi$.

геомагнитными полюсами. От них следует отличать **магнитные полюсы Земли**, определяемые как точки, где магнитная стрелка направляется по вертикали, и ориентировка по магнитному компасу невозможна. Южный магнитный полюс (на географических картах называемый северным) находится на территории Канады (о. Батерст в архипелаге Парри, около 100° западной долготы, 76° северной широты), а северный магнитный полюс (на картах южный) – при 140° восточной долготы, 66° северной широты. Получается, что полюса на картах заметно перекошены, даже относительно наклонной оси диполя: по дуге большого круга их разделяет 159° (или можно сказать, что 201°). Это частично связано с местными аномалиями, а частично – с некоторым произволом фиксирования магнитных полюсов Земли на глобусе: компас бесполезен не в двух точках, а скорее в довольно обширных местностях. Интересно, что указанные точки находятся вне главных географических объектов, пронизываемых земной осью вращения – открытого Северного Ледовитого океана и материка Антарктиды.

5.3 Ток смещения

Уравнение для циркуляции магнитного поля (магнитная теорема Стокса), которым мы пользовались в статике, не совсем подходит в динамике. Пусть ток I идет через конденсатор. Возьмем контур L_1 , окружающий провод (рис. 5.8). По теореме Стокса

$$\oint (\mathbf{H}d\mathbf{L}) = I.$$

Подразумевается, что ток I пересекает плоскую поверхность, вроде мыльной пленки, натянутой на контур. Вокруг провода будет поле $H = I/2\pi r$. Это нам уже известно. Теперь берем контур L_2 , у которого натянутая поверхность попадает внутрь конденсатора. Через эту поверхность не проходит провод и не идет ток. Может быть, на «проекции» внутренности конденсатора не будет магнитного поля?

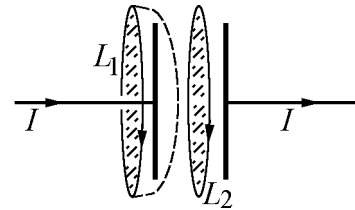


Рис. 5.8.

Вряд ли H будет скачком изменяться при переходе какой-то воображаемой границы в пространстве. Для скачка H должен по этой границе протекать ток. К тому же и для контура L_1 можно завести поверхность S внутрь конденсатора (показано пунктиром). Сомнительно, что поле от этого пропадет. Равным образом можно продеформировать поверхность, опирающуюся на L_2 , так что через нее появится ток. Видно, что с уравнением циркуляции не все в порядке.

Чем можно заменить ток I внутри конденсатора? $I = dq/dt$, а $q = DS$. Записав теорему Стокса в виде

$$\oint_L (\mathbf{H}d\mathbf{L}) = \frac{d(DS)}{dt},$$

мы получим то же значение H для поверхности S , через которую не идет ток. Разумно предположить, что уравнение для произвольной поверхности S – проходит через нее

ток или нет – имеет вид

$$\oint_L (\mathbf{H}d\mathbf{L}) = I + \frac{d}{dt} \int_{S_L} (\mathbf{D}d\mathbf{S}) \quad \left(= \frac{4\pi I}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int_{S_L} (\mathbf{D}d\mathbf{S}) \text{ в СГС} \right), \quad I = \int_{S_L} (\mathbf{j}d\mathbf{S}). \quad (5.4)$$

Это уже – окончательная форма последнего уравнения Максвелла. Именно последнее слагаемое добавил Максвелл в теорему Стокса. В этом виде уравнение похоже на закон Фарадея. Разница – в знаке перед слагаемым с производной электрического потока и в отсутствии «магнитных токов».

Величину $(d/dt) \int_{S_L} (\mathbf{D}d\mathbf{S})$ называют **током смещения** через S_L . Этимология: D – электрическая индукция называется еще электрическим смещением (D от слова displacement; потому, видимо, что в диэлектрике смещаются заряды). Можно ввести плотность тока смещения $\mathbf{j}_d = d\mathbf{D}/dt$. Магнитное поле создается совместно обычными токами проводимости \mathbf{j} и токами смещения \mathbf{j}_d (т.е. изменяющимся электрическим полем).

5.4 Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны

Выпишем все четыре уравнения для полей:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} &= Q_S, & \oint_S \mathbf{B}d\mathbf{S} &= 0, \\ \oint_L (\mathbf{E}d\mathbf{L}) &= -\frac{d}{dt} \left(\int_{S_L} (\mathbf{B}d\mathbf{S}) \right), & \oint_L (\mathbf{H}d\mathbf{L}) &= I_L + \frac{d}{dt} \left(\int_{S_L} (\mathbf{D}d\mathbf{S}) \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Эта система и называется уравнениями Максвелла. Ее симметрия нарушается только отсутствием магнитных зарядов. В системе СГС

$$\begin{aligned} \oint_S (\mathbf{D}d\mathbf{S}) &= 4\pi Q_S, & \oint_S (\mathbf{B}d\mathbf{S}) &= 0, \\ \oint_L (\mathbf{E}d\mathbf{L}) &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_{S_L} (\mathbf{B}d\mathbf{S}) \right), & \oint_L (\mathbf{H}d\mathbf{L}) &= \frac{4\pi I_L}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_{S_L} (\mathbf{D}d\mathbf{S}) \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

причем в (5.5,5.6) токи и заряды – свободные, и уравнения поля дополняются материальными связями между \mathbf{D} и \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} . Полезно запомнить, что во всех потоках через поверхности участвуют индукции \mathbf{D} и \mathbf{B} , а в контурных интегралах – поля \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Поскольку поля порождают друг друга, не исключено существование электромагнитного поля **без токов и зарядов**. Например, в вакууме $Q = I = 0$. Попробуем решить уравнения для этого случая. Пусть плоскость yz – большая проводящая пластина. Пусть по ней ток i на единицу длины оси z в направлении оси y (вверх, рис. 5.9). Вблизи плоскости должно появиться поле $H = i/2$, направленное против оси

z . Но поле не может возникнуть мгновенно везде. Для этого понадобится бесконечная энергия. Ищем решение в виде волны, распространяющейся вдоль оси x с некоторой скоростью V . Ситуация похожа на задачу об остановке течения жидкости в трубе – от заслонки идет волна сжатия со скоростью звука.

Впереди волны поля E и H нулевые. Применяем закон Фарадея к контуру, частично высунутому вперед волны:

$$-EL = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 HVL \quad \left(= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{HVL}{c} \text{ в СГС} \right),$$

если E в волне направлено против оси y (тогда оно получится положительным).

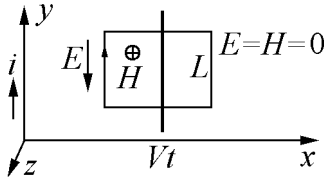


Рис. 5.9.

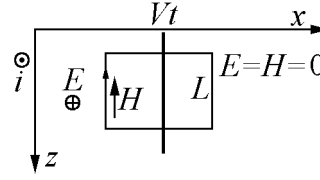


Рис. 5.10.

Применим теорему Стокса с током смещения к контуру в плоскости xz (рис. 5.10):

$$HL = \varepsilon_0 EVL \quad \left(= \frac{EVL}{c} \text{ в СГС} \right).$$

Получаем два уравнения:

$$E = \mu_0 HV, \quad H = \varepsilon_0 EV \quad (E = HV/c, \quad H = EV/c \text{ в СГС}).$$

Перемножив их, легко убедиться, что

$$V^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (V^2 = c^2 \text{ в СГС}).$$

В СГС сразу получаем $V = \pm c$, а в СИ получается то же самое, но гораздо менее вразумительно: надо еще убедиться, что $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ (мы это уже проверяли в п. 4.6). Знак $+$ соответствует волне, бегущей вправо. Для нее $\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$, а в СГС поля равны: $E = H$; в обеих системах равны энергии полей. Сами поля не находятся из таких уравнений, поскольку источник их – ток i – не задет контурами. Если же его зацепить, получим, что между током i и фронтом волны $H = i/2$, в СГС $H = 2\pi i/c$, оба поля положительны (значит, мы удачно выбрали направления). Для «левой» волны изменится знак H .

Прервем ток i , что эквивалентно пусканию обратного тока. Этот обратный ток породит волну с обратными направлениями полей, которая, складываясь с первой волной, начнет гасить поля вблизи плоскости yz . Обе волны имеют скорость c , так что мы получим прямоугольный импульс, в котором поля ненулевые, распространяющийся в пространстве без искажений. Теперь уже нигде нет токов и зарядов, но поля имеются: они создают друг друга. Это и есть электромагнитная волна. Она теперь будет лететь

в пространстве сколько угодно, если не застрянет в непрозрачной среде. Уже около 15 миллиардов лет живет реликтовое излучение.

Экспериментально электромагнитные волны обнаружил Герц в 1886 г., чем подтвердил теорию Максвелла. Теперь их существование доказывается при каждом употреблении радиоприемников, телевизоров и мобильных телефонов. Позднее выяснилось, что свет – это тоже электромагнитные волны с длиной $(3,8 \div 7,6) \cdot 10^{-5}$ см.

Наконец мы добрались до смысла электродинамической постоянной c : это скорость электромагнитных волн. Заметим, что по смыслу вывода скорость волны ни от чего не зависит и, в частности, не зависит от системы отсчета.

Разберем энергетику волны. За время t заполняется полями объем $2abct$, по обе стороны площадки ab на плоскости yz . Энергия поля $(\mu_0 H^2 + \varepsilon_0 E^2)/2 \equiv \sqrt{\varepsilon_0} E \sqrt{\mu_0} H$ на единицу объема, а всего

$$\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E H \cdot 2abct = E H \cdot 2abt.$$

Она берется из работы источника тока: ток $i \cdot a$ идет против напряжения $b \cdot E$. Работа источника $iabEt = 2H \cdot ab \cdot Et$ – то же значение. В волне энергия $(\mu_0 H^2 + \varepsilon_0 E^2)/2 = \sqrt{\varepsilon_0} E \cdot \sqrt{\mu_0} H$ переносится со скоростью $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$; возникает поток энергии (размерность Дж/(м²·с) или эрг/(см²·с)):

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad \left(= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \text{ в СГС} \right).$$

Вектор \mathbf{S} называется вектором Пойнтинга (иногда Умова – Пойнтинга). Убедитесь, что $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ как раз показывает направление распространения волны. Полезно заметить, что электромагнитная волна поперечная.

Плоские волны – вещь довольно редкая. Чаще излучается сферическая волна источником малых размеров, например, движущимся зарядом. Если источник излучал время τ , то вдали от него через время $t \gg \tau$ получим сферический слой объема $4\pi R^2 \cdot c\tau$, где $R = ct$ – расстояние наблюдения. Энергия в этом слое постоянна, так что E и $H \sim 1/R$ – очень медленное спадание. Из-за этого и возможна радиосвязь, а из других галактик мы ловим только излучение. Кулоновские и дипольные поля с таких расстояний «не доходят».

5.5 Преобразования полей. Движение в скрещенных полях

При выводе закона Фарадея в п. 5.1 мы убедились, что если в лабораторной системе отсчета K имеется магнитное поле с индукцией \mathbf{B} , то в системе K' , движущейся со скоростью \mathbf{V} , возникает дополнительное электрическое поле $\Delta\mathbf{E}$. Если векторы индукции и скорости перпендикулярны, эта поправка по величине равна $V\mathbf{B}$ и перпендикулярна обоим векторам. Легко понять, что в общем случае поправка выражается векторным

произведением. Если в системе K электрическое поле \mathbf{E} , то в K'

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{V}\mathbf{B}]. \quad (5.7)$$

Движение в магнитном поле меняет электрическое поле.

Само собой, что и при движении в электрическом поле меняется магнитное. Поехав мимо конденсатора с полем E , замечаем, что его обкладки стали переносить токи $i = \pm\sigma V = \pm V\varepsilon_0 E$ на единицу длины. Эти токи создадут магнитное поле $\Delta B = \mu_0 i = \mu_0 \varepsilon_0 V E$. В векторном виде $\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 [\mathbf{V}\mathbf{E}] \equiv -[\mathbf{V}\mathbf{E}]/c^2$. Если в лабораторной системе имелось поле \mathbf{B} , то в системе, движущейся со скоростью \mathbf{V} ,

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{[\mathbf{V}\mathbf{E}]}{c^2}. \quad (5.8)$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля – величины относительные, меняющиеся при переходе в другую систему отсчета. При этом поправки к значениям полей \mathbf{E} и $[\mathbf{B}]$ зависят от старых полей \mathbf{B} и \mathbf{E} : поля преобразуются друг через друга. Поэтому следует говорить о едином электромагнитном поле, разделение которого на два вектора \mathbf{E} и $[\mathbf{B}]$ зависит от системы отсчета. Несмотря на видимую разницу, поля преобразуются друг через друга примерно как координаты при повороте осей.

Формулы (5.7, 5.8) выполняются при скоростях, малых по сравнению со скоростью света. При релятивистских скоростях формулы преобразования полей надо будет исправить, но сам факт относительности полей останется.

Гораздо более симметрично преобразования полей выглядят в системе СГС. Повторяя те же рассуждения, легко получить

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{[\mathbf{V}\mathbf{H}]}{c}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \frac{[\mathbf{V}\mathbf{E}]}{c}.$$

В духе системы СГС, здесь вместо индукции \mathbf{B} используется равносильная (в пустоте) величина – поле \mathbf{H} . Оказывается, поля \mathbf{E} и \mathbf{H} – это компоненты так называемого тензора электромагнитного поля, а переход в другую систему отсчета можно истолковать как вращение в четырехмерном пространстве.

В системе СИ это единство полей замаскировано тем, что даже размерности их разные (см. п. 4.6). Вообще-то измерять примерно одно и то же в разных единицах иногда приходится. Например, в самолете приборы показывают высоту в метрах (у англичан даже в футах), расстояния же по горизонтали измеряются в километрах (соответственно в милях). Как физические величины, расстояния по горизонтали и вертикали не отличаются. На практике же между ними разница есть: подняться на километр вверх гораздо труднее, чем пройти километр по горизонтали. Выделенность вертикали вызвана влиянием силы тяжести. Примерно такой же характер имеет различие единиц для полей в системе СИ.

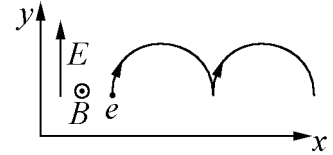
Проиллюстрируем относительность полей на задаче о движении в скрещенных полях. Пусть в поле $\mathbf{E} = E_y$, $\mathbf{B} = B_z$ помещен положительный заряд e . Он начнет разгоняться вверх в поле \mathbf{E} и отклоняться вправо полем \mathbf{B} (рис. 5.11). Какое получится движение? Запишем уравнения движения в проекциях на оси:

$$m\dot{v}_x = ev_y B, \quad m\dot{v}_y = eE - ev_x B.$$

Для v_y получаем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = - \left(\frac{eB}{m} \right)^2 \cdot v_y = -\Omega^2 \cdot v_y.$$

Его решение: $v_y = A \sin(\Omega t)$, поскольку в начальный момент заряд покоился. Заметим, что частота колебаний Ω – такая же, как частота вращения в чисто магнитном поле (см. п. 4.1).



Скорость v_x легко получается из второго уравнения:

Рис. 5.11.

$$v_x = \frac{eE - m\dot{v}_y}{eB} = \frac{E}{B} - \frac{m}{eB} \frac{AeB}{m} \cos(\Omega t) = \frac{E}{B} \cdot (1 - \cos(\Omega t)).$$

Амплитуда $A = E/B$ выбрана так, чтобы $v_x(0)$ также равнялась нулю. По оси x получилось наложение колебания, сдвинутого относительно y на $\pi/2$, и движения с постоянной скоростью. С некоторым усилием вспоминаем, что именно так движется точка на ободу колеса, катящегося со скоростью $V = E/B$. Начальное положение точки – внизу. Следовательно, заряд будет двигаться по циклоиде. Неожиданно направление его среднего смещения, или дрейфа: ось x – перпендикулярно обоим полям.

Сопровождая колесо (перейдя в систему отсчета, имеющую скорость V вдоль оси x)⁴, мы получим просто круговое вращение с частотой Ω . Но такое движение бывает в магнитном поле B без всяких примесей.

Можно было, пользуясь формулой преобразования (5.7), найти скорость системы отсчета, в которой поле чисто магнитное (электрическое поле занулится). Такая цель достигнется, когда $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{V}\mathbf{B}] = 0$. Легко видеть, что для случая, показанного на рис. 5.11, потребуется скорость $V = E/B$, направленная вправо. В такой системе отсчета заряд движется по кругу. Движение в исходной системе легко получить из кинематических формул. Таким образом, преобразования полей позволяют найти движение без решения уравнений.

⁴Поскольку мы пока не умеем обращаться со скоростями порядка световой, следует предполагать, что $V \ll c$ и $E \ll cB$.