

# ВОЛНОВАЯ ФИЗИКА

Курс лекций для ФМШ

Часть 1. ОПТИКА И ВОЛНЫ

1. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

А. П. Ершов

11 апреля 2011 г.

В последнем семестре нам осталось понять, как устроены окружающие нас предметы. Мы уже знаем, что все сделано из атомов, кроме света, сделанного из фотонов. Но что такое атомы, пока не ясно.

Когда-то существование атомов нужно было доказывать. Сейчас каждый слышит про атомы почти с рождения. Это словно бы и неплохо, но все имеет свои теневые стороны. Привыкнув к идее атома, труднее сформулировать для себя вопрос: почему атомы именно такие? В начале прошлого семестра мы уже отмечали загадку атомного масштаба  $1 \text{ \AA}$ , или  $10^{-8}$  см. Чем определяется этот размер? Почему бы, например, электрону не летать раз в сто ближе к ядру (или вообще во сколько угодно раз ближе)?

В англоязычных странах популярен отрывок из «Рапсодии» Дж. Свифта:

So, naturalists observe, a flea  
Has smaller fleas that on him prey;  
And these have smaller still to bite 'em;  
And so proceed *ad infinitum*.

т.е. на блохах живут более мелкие блошки, на тех свои паразиты, еще меньше, и так далее до бесконечности. Цитируют эти стихи обыкновенно в глубокомысленном тоне и без комментариев, как бы подразумевая, что умному достаточно. Должно быть, тут отражено восхищение сложностью и неисчерпаемостью мироздания. Эта-то идея бесконечного ряда матрешек и оказалась неверна<sup>1</sup>. Действительно, блохи страдают от паразитов: клещей, червей, бактерий. Современный микроскоп показывает душераздирающие картины, например, кишечник блохи, паразитирующей на грызунах, полностью забитый палочками чумы<sup>2</sup>. «Червь, терзающий блоху, сам может быть поражен клещом, в свою очередь зараженным жгутиковыми, в клетках которых живет болезнетворный вирус». Но это и все: никакой организм не может быть меньше, скажем, ста атомных размеров. Прогрессия масштабов быстро доходит до предела, раз всякий паразит значительно меньше хозяина. Всего есть шесть уровней, считая человека, а вовсе не бесконечность<sup>3</sup>.

Если подумать, то это выходит гораздо интереснее, чем примитивная («дурная») бесконечная иерархия уровней. Мы увидим, что с уменьшением масштаба возникает совершенно новая физика, которую мудрецы прошлого и вообразить не могли.

Это – волновая физика, которой мы и займемся. Атомы такие, как они есть, потому, что они построены из определенных типов волн и сами тоже являются волнами. По сравнению со всем, что у нас было раньше, это – страна чудес. Но начнем, как всегда, с самых простых вещей.

---

<sup>1</sup>На русском языке близким эквивалентом культурной ситуации является стихотворение Пушкина «Движенья нет, сказал мудрец брадатый...».

<sup>2</sup>Rotshild M., Shlein Y., Ito S. A colour atlas of insect tissues via the flea. Science Book, N.Y., 1986. См. резюме: В мире науки (Scientific American), 1987, №1.

<sup>3</sup>Свифт вообще живо интересовался масштабным фактором, вспомним его лилипутов и великанов. Ряд интересных подробностей см. в: Н. Винер. Я – математик. РХД, Москва – Ижевск, 2001, стр. 84.

# Глава 1

## ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Применение электричества начиналось с постоянного тока. Однако основа нынешней электротехники – переменный ток. Особенно важен случай периодического синусоидального тока (на котором работают бытовые приборы и электрические машины в промышленности<sup>1</sup>). Генераторы переменного тока проще и удобнее: по существу, это вращающиеся в магнитном поле контуры, или рамки. От генераторов через систему передающих устройств электричество доставляется потребителям в виде синусоидального напряжения в бытовой розетке:  $U = U_0 \cos(\omega t)$ . В России частота  $\omega = 2\pi \cdot 50 \cong 314$  Гц.

Переменный ток, в особенности синусоидальный, очень подходит для начала знакомства с волновой физикой. В то же время эта тема еще электродинамическая, благодаря чему переход будет плавным.

### 1.1 Цепи переменного тока. Импеданс

Кроме резисторов (сопротивлений), в цепях переменного тока используются конденсаторы и индуктивности. Конденсатор на первый взгляд – это просто разрыв цепи; однако переменный ток он пропускает, в виде тока смещения. Разберем на примере, как это получается.

Возьмем  $RC$ -цепь, на которую подается переменное напряжение  $U(t)$  (рис. 1.1). Какой пойдет ток? Сумма напряжений  $RI + q/C = U$  или

$$RI + \frac{1}{C} \int I dt = U .$$

Дифференцируем и получаем уравнение

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt} .$$

Для общей зависимости  $U(t)$  решение сложное и маловразумительное. Рассмотрим частный случай, чтобы понять суть. Пусть  $U(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $U(t) = U_0$  при  $t > 0$  (скачок напряжения). Тогда при  $t > 0$  правая часть  $dU/dt = 0$ . Решаем:  $dI/I = -dt/RC$ ,  $I = I_0 \cdot \exp(-t/RC)$ . Определяем  $I_0$ : в начальный момент  $C$  еще не

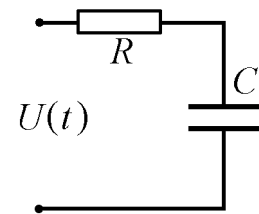


Рис. 1.1.

<sup>1</sup>Чаще под переменным током и понимается не любой непостоянный, а именно синусоидальный.

успел зарядиться; тогда на нем нет напряжения и  $I_0 = U_0/R$ . Окончательно получаем ток и напряжение на конденсаторе:

$$I = (U_0/R) \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad U_C = U_0 - RI = U_0 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right).$$

Характерное время спада тока (или заряда конденсатора)  $\tau = RC$ . Если входное напряжение  $U(t)$  меняется за более длительное время, то можно считать, что  $C$  успевает заряжаться и на нем будет практически  $U(t)$ . Конденсатор тогда приблизительно соответствует разрыву в цепи. Если же  $U$  меняется быстро в масштабе  $RC$ , то напряжение на емкости малó по сравнению с  $U$  (почти все падает на сопротивлении; конденсатор работает как «закоротка»).

Перейдем к наиболее важному случаю синусоидального напряжения:  $U = U_0 \cos(\omega t)$ . Тогда

$$R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -U_0 \omega \cdot \sin(\omega t).$$

После подключения этой цепи к сети (например, в момент  $t = 0$ ) в течение короткого времени  $t < 1/\omega$  решение будет сходно со случаем постоянного напряжения на входе. Конденсатор будет постепенно заряжаться, а начальный ток – спадать. Затем начнет сказываться переменность входного напряжения (т.е. правая часть уравнения), которая вызовет в цепи колебания. Ясно, что в полном виде такое уравнение решить сложнее.

Однако полного решения нам и не потребуется. Через несколько характерных времен  $RC$  влияние момента подключения «забудется» и останется только колебательный процесс. В технике преимущественно важны **установившиеся** токи, порождаемые периодическими воздействиями на схему и существующие в течение неопределенного времени. Кратковременные же импульсы, возникающие при включении из-за несогласованности установившегося решения с начальными условиями, называются **переходными процессами** и представляют сравнительно частный интерес. В этом разделе мы ограничимся установившимися решениями, для отыскания которых существуют гораздо более производительные методы, чем лобовое решение дифференциальных уравнений.

Следует ожидать, что установившийся ток будет колебаться с частотой напряжения сети. Но простейшие колебательные решения  $\sin(\omega t)$  и  $\cos(\omega t)$ , очевидно, не подходят. Пробуем  $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , где  $\varphi$  – пока неизвестная постоянная величина, называемая **сдвигом фазы**. Подставляем:

$$\begin{aligned} -RI_0\omega \sin(\omega t + \varphi) + (I_0/C) \cos(\omega t + \varphi) &= -U_0\omega \sin((\omega t + \varphi) - \varphi) = \\ -U_0\omega \cos \varphi \sin(\omega t + \varphi) + U_0\omega \sin \varphi \cos(\omega t + \varphi) &. \end{aligned}$$

Переменные  $\sin(\omega t + \varphi)$  и  $\cos(\omega t + \varphi)$  должны уравниваться по отдельности. Отсюда

$$RI_0 = U_0 \cos \varphi, \quad I_0/\omega C = U_0 \sin \varphi.$$

Получаем  $\operatorname{tg} \varphi = 1/\omega RC$ ,  $I_0 = U_0/\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$ . Решение:

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC}.$$

Для наглядности полезны **векторные диаграммы**. Изобразим ток  $I_0$  горизонтальным вектором. Переменный ток  $I_0 \cos(\omega t)$  получим, закрутив исходный вектор против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ : горизонтальная проекция вектора именно и даст нужную величину. Напряжение на сопротивлении  $RI$  изобразится вектором, параллельным току. Этот вектор вращается точно так же, отбрасывая на горизонтальную ось проекцию – настоящее напряжение.

При токе  $I = I_0 \cos(\omega t)$  напряжение на конденсаторе (пропорциональное заряду, т.е. интегралу от тока) будет  $(I_0/\omega C) \sin(\omega t)$ . Его изображаем вектором длины  $I_0/\omega C$ , направленным под прямым углом к току вниз на рисунке 1.2. Как раз при повороте на угол  $\omega t$  его горизонтальная проекция будет  $(I_0/\omega C) \sin(\omega t)$ .

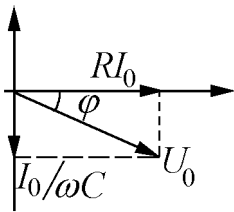


Рис. 1.2.

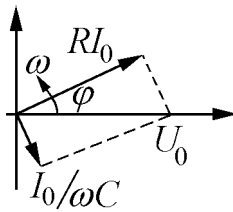


Рис. 1.3.

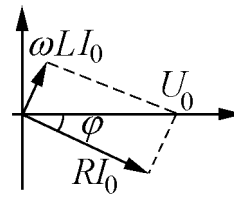


Рис. 1.4.

Сумма реальных напряжений – это сумма проекций на горизонтальную ось, равная проекции суммы векторов. Поэтому можно нарисовать вектор суммарного напряжения длиной  $U_0 = I_0 \cdot \sqrt{(1/\omega C)^2 + R^2}$ . Это и будет амплитуда входного напряжения. Напряжение отстает по фазе от тока на угол  $\varphi$ , причем  $\operatorname{tg} \varphi = 1/\omega RC$ .

Для полного соответствия с предыдущим решением можно повернуть картинку в исходном положении на угол  $\varphi$ , тогда горизонтальным вектором изобразится напряжение, а ток будет вектором длины  $U_0/\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$ , имеющим начальный наклон  $\varphi$ . Далее вся диаграмма крутится со скоростью  $\omega$  против часовой стрелки (рис. 1.3).

Попробуем метод векторных диаграмм на  $LR$  – цепи. Закон Фарадея применительно к контуру с индуктивностью запишем в виде

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{СИ}), \quad \mathcal{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} \quad (\text{СГС}).$$

Как видно, здесь оказывается удобнее система СИ<sup>2</sup>. В электротехнике допустимо пренебрегать замыкающими проводами и относить эдс индукции  $\mathcal{E}$  исключительно к индуктивности.

Чтобы скомпенсировать эту эдс и прогонять ток через индуктивность (представляющую собой, попросту, кривой провод), нужно приложить напряжение обратного знака:  $U_L = +L \cdot dI/dt$ . При токе  $I_0 \cos(\omega t)$  напряжение на индуктивности  $U_L = -\omega LI_0 \sin(\omega t)$ . Это – проекция вектора длины  $\omega LI_0$ , опережающего ток на угол  $\pi/2$ . Сумма векторов напряжений будет  $I_0 \cdot \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}$  и направлена под углом  $\varphi$  к току, тоже с опережением;  $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/R$ . Если задать напряжение горизонтальным,

<sup>2</sup>Для емкостей и сопротивлений вид формул в СИ и СГС не отличается; напомним, что в СИ ток измеряется в амперах, напряжение – в вольтах, емкость в фарадах, а сопротивление в омах.

$U = U_0 \cos(\omega t)$ , придаем картинке начальный поворот на угол  $\varphi$  назад (рис. 1.4). Имеем  $I = (U_0/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}) \cos(\omega t - \varphi)$ . Результат получается быстрее и нагляднее, чем при прямом решении дифференциального уравнения.

Существует специальный математический аппарат, позволяющий еще ускорить решение таких задач – представление величин в комплексном виде<sup>3</sup>. По формуле Эйлера  $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ . Запишем входное напряжение в виде  $U_0 \exp(i\omega t)$ , то есть прибавим к настоящему  $U$  мнимую часть. Разумеется, она вызовет добавочный мнимый ток. Суммарный ток тоже ищем в виде  $I = I_0 \exp(i\omega t)$ . Мнимые части мы отбросим в конце расчета.

Напряжение на индуктивности  $U_L = +L \cdot dI/dt$ . При токе  $I = I_0 \exp(i\omega t)$  напряжение  $U_L = i\omega L I_0 \exp(i\omega t) = i\omega L \cdot I$ . Решаем:

$$RI + i\omega LI = U; \quad I = \frac{U}{R + i\omega L},$$

так как во всех слагаемых одинаковая зависимость от времени:  $\exp(i\omega t)$ . Вопрос, как это понимать. Вспомним, что надо взять действительную часть тока. Представим знаменатель в экспоненциальной, или показательной, форме:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \exp(i\varphi), \quad \text{где } \operatorname{tg}\varphi = y/x.$$

Знаменатель  $R + i\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \exp(i\varphi)$ , где  $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R$ . Тогда

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \exp(i(\omega t - \varphi)) \Rightarrow \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Получен тот же результат, что при векторном способе, но заметно быстрее, даже при первой пробе. Аналогично для конденсатора току  $I = I_0 \exp(i\omega t)$  соответствует напряжение  $U_C = I_0 \exp(i\omega t)/(i\omega C) = I/(i\omega C)$ .

Итак, для каждого элемента при токе в виде мнимой экспоненты комплексное напряжение пропорционально току, т.е. существует аналог сопротивления:

$$U = ZI; \quad Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_L = i\omega L.$$

Эти комплексные «сопротивления» называются **импедансами**. Для них выполняются те же правила соединения и законы Кирхгофа, как для обычных сопротивлений, и задачи решаются так же, как в цепях постоянного тока. Только в конце надо выделить действительную часть.

Для резонансного  $RLC$ -контура (рис. 1.5)  $RI + (1/i\omega C)I + i\omega LI = U$ ;

$$I = \frac{U}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} \Rightarrow \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $\operatorname{tg}\varphi = (\omega L - 1/\omega C)/R$ . Зависимость амплитуды тока от частоты – резонансная кривая – похожа на «механическую» (на рис. 1.6 показаны три кривые, у которых

<sup>3</sup>Необходимые формулы комплексной алгебры и их обоснования разбираются в приложении.

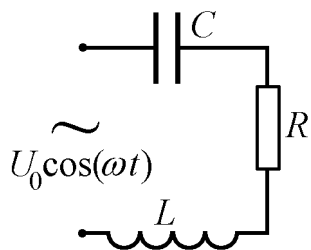


Рис. 1.5.

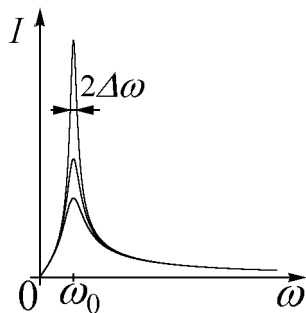


Рис. 1.6.

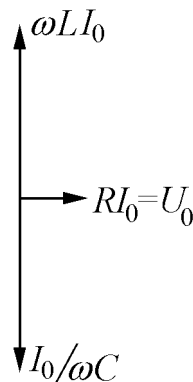


Рис. 1.7.

отличаются сопротивления). Здесь тоже внешняя сила вызывает колебания, причем аналог массы –  $L$ , трения –  $R$ , а упругости –  $1/C$ . Максимум тока достигается, когда  $\omega L = 1/\omega C$ ;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (собственная частота контура). При характерных величинах  $L = 10$  мкГ,  $C = 1$  нФ,  $R = 0,1$  Ом  $\omega_0 = 10^7$  Гц, что соответствует длине волны  $2\pi c/\omega_0 = 200$  м. **Волновое сопротивление**  $\sqrt{L/C} = 100$  Ом. Вблизи  $\omega_0$  выражение  $(\omega L - 1/\omega C) = (\omega_0 + \Delta\omega)L - 1/(\omega_0 + \Delta\omega)C \cong 2 \cdot \sqrt{L/C} \cdot \Delta\omega/\omega_0$ . Ширина резонансной кривой  $2\Delta\omega$  определяется по падению амплитуды тока в  $\sqrt{2}$  раз:  $2 \cdot \sqrt{L/C} \cdot \Delta\omega/\omega_0 = R$ ,  $2\Delta\omega/\omega_0 = R\sqrt{C/L}$ . Для выбранных параметров получаем  $2\Delta\omega/\omega_0 \approx 10^{-3}$ . Такое резкое падение амплитуды с удалением от резонанса типично в радиотехнике и позволяет настроиться на нужную станцию (частоту), не слыша других.

Если пользоваться импедансами, то задачи о цепях переменного тока до определенного этапа формально решаются так же, как это делается при постоянном токе. Однако при переходе к реальным значениям появляются существенные отличия. Например, в резонансе напряжение на сопротивлении  $RI$  равно входному  $U$ ; можно было бы подумать, что на  $L$  и  $C$  совсем не будет напряжения. Это не так:  $U_L = i\omega LI$ , амплитуда напряжения на индуктивности  $\omega_0 LI = \sqrt{L/C} \cdot I$ , что для «хорошего» контура гораздо больше, чем входное напряжение  $U = RI$  (в описанном выше примере  $\sim 1000 \cdot U$ ). Столько же в резонансе будет на емкости, но в сумме  $U_L + U_C = 0$ , так как эти напряжения точно в противофазе. Векторная диаграмма показана на рисунке 1.7. Видно, что резонансная цепь может существенно усиливать входной сигнал; острота резонанса достигается именно за счет этого усиления. Показания вольтметров, подключенных ко всем элементам цепи и ко входу, могут сильно удивить неподготовленного наблюдателя. На постоянном токе таких интересных эффектов не бывает: на любом элементе последовательной цепи напряжение меньше входного. Отметим, что на индуктивности напряжение опережает ток по фазе на  $\pi/2$ , а на емкости отстает: действительно, для  $L$  сначала прикладывают напряжение, а затем возникнет ток; для  $C$  вначале нужно пустить ток и после зарядки появится напряжение.

Есть особенности и у мощности в цепях переменного тока. На сопротивлении  $N = RI_0^2 \cos^2(\omega t)$ . Эта величина меняется 100 раз в секунду (для промышленной частоты 50 Гц) и нас, как правило, интересуют не ее колебания, а среднее значение за достаточно

большой промежуток времени:  $\langle N \rangle = RI_0^2/2$ . Приборы показывают **эффективное** значение тока, равное постоянному току, который нагревает сопротивление с той же эффективностью, то есть  $I_{eff} = I_0/\sqrt{2}$  для синусоидального тока. Аналогично  $U_{eff} = U_0/\sqrt{2}$ . В розетке  $U_{eff} = 220$  В, а  $U_0 \cong 311$  В.

Для цепи со сдвигом фаз  $U = U_0 \cos(\omega t)$ ,  $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ . Средняя мощность  $N = U_0 I_0 \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \rangle = (1/2) \cdot U_0 I_0 \cos \varphi = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$ . Например, на индуктивности и емкости средняя мощность нулевая (нечему нагреваться). Для мощных потребителей  $N$  и  $U_{eff}$  заданы. Поэтому малый  $\cos \varphi$  приводит к потреблению большого тока, что нежелательно (растут потери). Стараются приблизить  $\cos \varphi$  к 1.

Заметим, что при расчете мощности комплексные функции неудобны. Действительная часть произведения  $IU$  не равна произведению действительных частей (физических величин). Мнимая часть легко отделяется только при линейных операциях.

Из курса анализа известно, что любая периодическая функция раскладывается в **ряд Фурье** – набор простых синусоидальных **гармоник**. Например, последовательность прямоугольных импульсов амплитуды  $\pm 1$  («испорченный косинус»)

$$\text{sign}(\cos(x)) = (4/\pi) \cdot (\cos(x) - \cos(3x)/3 + \cos(5x)/5 - \dots) ,$$

что легко проверяется на компьютере. Когда такое напряжение подано на вход цепи, находят по отдельности токи, вызываемые каждой гармоникой (пользуясь изложенными выше способами), а потом суммируют все токи. Применение тригонометрических функций – **преобразование Фурье** – позволяет дифференциальные уравнения превратить в алгебраические.

## 1.2 Простейшие импульсные цепи

Возьмем  $RC$  – цепь с разрядом конденсатора. Уравнение:

$$R \cdot dI/dt + I/C = 0 ,$$

решение:  $I = (U_0/R) \cdot \exp(-t/RC)$ . Характерное время разряда  $\tau = RC$ . Например, при  $C = 10^{-2}$  Ф,  $R = 0,01$  Ом,  $U = 10$  кВ (довольно большая батарея) время разряда 100 мкс, начальная мощность  $10^{10}$  Вт = 10 ГВт – как у крупной электростанции. Полезно заметить, что тепло на сопротивлении  $Q = \int RI^2 dt = CU_0^2/2$  при любом  $R$ : если уменьшать сопротивление, растет ток и уменьшается время разряда, причем так, что вся энергия конденсатора выделяется на сопротивлении.

$LC$  – цепь: уравнение  $Ld^2I/dt^2 + I/C = 0$ ; решение:  $I = I_0 \sin(\omega t)$ , где  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Амплитуда  $I_0$  определяется из начального условия: при  $t = 0$   $LdI/dt = \omega LI_0 = U_0$ . Окончательно

$$I = (U_0/\omega L) \sin(\omega t) .$$

Отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока  $\omega L = \sqrt{L/C}$  – уже знакомое волновое сопротивление.



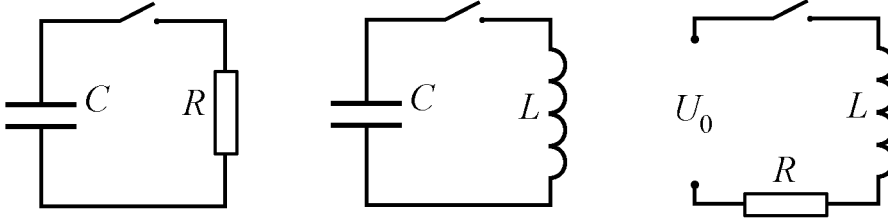


Рис. 1.8.

Наконец,  $RL$  – цепь, на которую подано постоянное напряжение  $U_0$ :  $LdI/dt + RI = 0$ ;  $I = (U_0/R) \cdot (1 - \exp(-Rt/L))$ . Время нарастания тока  $\tau = L/R$ .

Сложнее случай полной  $RLC$ –цепи. Качественно при малом сопротивлении естественно ожидать колебаний, как в  $LC$ , но медленно затухающих. При большом же сопротивлении должно быть похоже на  $RC$ –цепь, а индуктивность должна давать завал начального фронта импульса тока на малое время  $L/R$ . Но эти варианты поведения совсем не похожи. Попробуем разобраться. Уравнение цепи:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0.$$

Попробуем снова подставить  $I = I_0 \exp(i\omega t)$ . Получается уравнение

$$-\omega^2 + i\omega R/L + 1/LC = 0,$$

которое удовлетворяется, если  $\omega_{1,2} = iR/2L \pm \Omega$ , где  $\Omega = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$ .

Что означает комплексная частота? При  $R = 0$  мнимая часть отсутствует,  $\omega = \Omega = \sqrt{1/LC}$ : имеем собственную частоту  $LC$  – контура. При  $R > 0$ , подставив  $\omega$  в экспоненту  $\exp(i\omega t)$ , получим колебательный множитель  $\exp(i\Omega t)$ , умноженный на  $\exp(-(R/2L)t)$ . Получается, что мнимая часть частоты означает затухание.

Заметим, что если две функции – решения уравнения, то их сумма – тоже решение (линейность). Попробуем записать решение в виде:

$$A \cdot \exp(i\omega_1 t) + B \cdot \exp(i\omega_2 t) = \exp(-Rt/2L) \cdot (A \exp(i\Omega t) + B \exp(-i\Omega t)).$$

Из формулы Эйлера  $(\exp(ix) - \exp(-ix))/2i = \sin(x)$ . Следует выбрать амплитуды  $A$  и  $B$  так, чтобы получился именно синус (косинус означал бы скачок тока). Тогда  $I = I_0 \sin(\Omega t) \cdot \exp(-Rt/2L)$ . Определяем  $I_0$  из начального условия  $U(0) = L\dot{I}(0)$ :

$$I = \frac{U_0}{\Omega L} \sin(\Omega t) \cdot \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right), \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Это и есть ожидаемые затухающие колебания с частотой, близкой к  $1/\sqrt{LC}$  (на самом деле меньшей). При малом  $R$  затухание медленное – за время  $\sim L/R$  (рис. 1.9, где пунктиром показана ограничивающая экспонента  $\pm \exp(-Rt/2L)$ ).

Что будет при  $R > 2\sqrt{L/C}$ ? Корень  $\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$  тоже получается мнимый – оба решения затухающие. Решение можно записать в виде :

$$I = \frac{U_0}{\Omega L} \left( \frac{\exp(\Omega t) - \exp(-\Omega t)}{2} \right) \cdot \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right), \quad \Omega = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

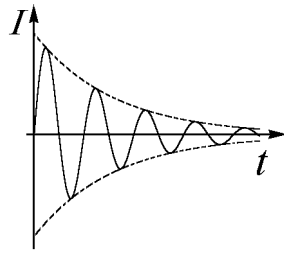


Рис. 1.9.

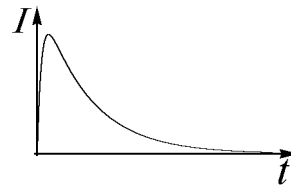


Рис. 1.10.

Нарастание до максимума занимает примерно время  $L/R$ , после чего будет спад за время  $RC$  (рис. 1.10). Это станет ясно, если воспользоваться биномом Ньютона и упростить  $\Omega$ . Выражение можно сократить, используя гиперболический синус:  $\text{sh}(x) = (\exp(x) - \exp(-x))/2$ , который формально получается как синус мнимого аргумента.

Конденсаторная батарея, упомянутая выше, может иметь индуктивность  $10 \text{ см} = 10^{-8} \text{ Гн}$ . Время нарастания тока при сопротивлении  $0,01 \text{ Ом}$  будет  $1 \text{ мкс}$ . Волновое сопротивление  $10^{-3} \text{ Ом}$ , так что разряд неперiodический.

Зная поведение некоторой цепи, можно разобраться, что будет при **внезапном** подключении ее к источнику синусоидального напряжения. Например, подключаем  $LRC$  – контур. Полученное в п. 1.1 решение, с импедансами и фазовым сдвигом, как правило, не удовлетворяет начальным условиям (ток не нулевой в начальный момент). На самом деле это – установившийся ток. Вначале же к нему добавляются собственные колебания, вызванные подключением – токи, которые могут циркулировать в **замкнутой** цепи, т.е. не создающие напряжения на входе. Их и следует подобрать так, чтобы решение подходило под начальные условия. Со временем свободные колебания затухают, и остается только стационарная составляющая. Аналогичные переходные процессы известны и в механических системах.

Покажем, что импульсные цепи могут выполнять вычисления. Возьмем  $RC$  – цепь с большим  $R$ , так что почти все входное напряжение падает на сопротивлении. Тогда  $I = U/R$ , а напряжение на конденсаторе  $U_C = (1/C) \int I dt = (1/RC) \int U dt$ . На конденсаторе сигнал пропорционален интегралу входного напряжения (интегрирующая цепь). Это будет при  $RC \gg \tau$  – времени изменения сигнала.

Если в той же цепи мала емкость, так что весь входной сигнал «падает» на  $C$ , то  $U = U_C = (1/C) \int I dt$ , ток  $I = C \cdot dU/dt$ . На сопротивлении будет маленький сигнал  $U_R = RC \cdot dU/dt$  – дифференцирующая цепь при  $RC \ll \tau$ .

В обоих случаях, чем точнее цепь выполняет математическую операцию, тем меньше выходной сигнал. В этом можно усмотреть некоторый закон сохранения неприятностей. До появления цифровых компьютеров из таких (или  $RL$  –) цепей строились аналоговые ЭВМ, или интеграторы, иногда довольно сложные. Например,  $LRC$  – цепь «решает» дифференциальное уравнение колебаний и может моделировать, скажем, пролет моста при грамотном выборе номиналов. Если взять связанные цепи, можно получить модель моста.

## Приложение: комплексные числа

Обсудим важнейшие характеристики, свойства и способы представления комплексных чисел, стараясь избегать формальных выводов.

### 1. Алгебраическое представление.

Это самая примитивная форма записи комплексного числа (и не самая полезная):

$$z = x + i \cdot y.$$

Здесь  $x$  – действительная, или реальная часть (обозначается также  $\operatorname{Re}(z)$ ),  $y$  – мнимая часть (обозначается также  $\operatorname{Im}(z)$ ),  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица. Алгебраическое представление удобно, если мы хотим найти сумму и разность комплексных чисел – надо по отдельности складывать действительные и мнимые части:

$$(5 + 3 \cdot i) + (4 + 2 \cdot i) = 9 + 5 \cdot i.$$

Умножение комплексных чисел производится путем раскрытия скобок, с учетом того, что квадрат  $i$  равен  $-1$ . Получается довольно невразумительно:

$$(5 + 3 \cdot i) \cdot (4 + 2 \cdot i) = 20 + 12 \cdot i + 10 \cdot i + 6 \cdot i^2 = 14 + 22 \cdot i.$$

Еще неудобнее будет выглядеть правило деления.

**Сопряженным** числу  $z = x + i \cdot y$  называют  $\bar{z} = x - i \cdot y$ . Произведение любого числа на сопряженное всегда действительно (и даже положительно):

$$(5 + 3 \cdot i) \cdot (5 - 3 \cdot i) = 25 + 15 \cdot i - 15 \cdot i - 9 \cdot i^2 = 34; \quad (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

### 2. Геометрическое представление.

Комплексное число можно изобразить и как точку на плоскости с координатами  $x$  и  $y$ . А точка на плоскости – это все равно что вектор с такими проекциями (рис. 1.11):

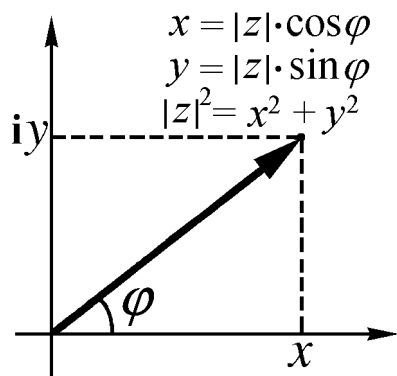


Рис. 1.11.

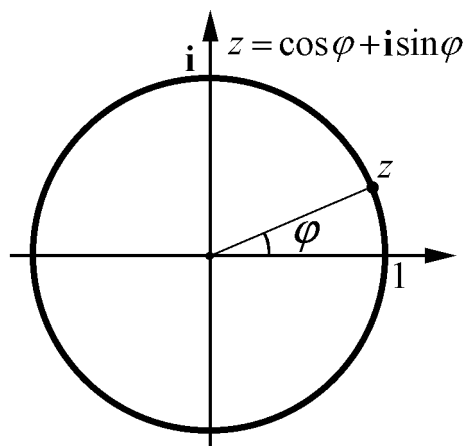


Рис. 1.12.

В алгебраической записи  $i$  можно понимать как единичный вектор по оси  $y$ . Единичный вектор по оси  $x$  – это просто действительная единица и специально не выделяется.

Такая плоскость называется **комплексной плоскостью**. Геометрическое, или векторное, представление придает простой смысл операциям сложения и вычитания: проекция суммы равна сумме проекций, и выполняются обычные правила соединения стрелок.

Геометрическое представление естественно приводит к новому способу задания чисел. **Модулем** комплексного числа  $|z|$  называется длина вектора, а **аргументом**  $\arg z$  – угол между вектором и осью  $x$ :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \arctg(y/x) = \arccos(x/|z|) = \arcsin(y/|z|).$$

Квадрат модуля равен произведению комплексного числа на сопряженное:  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ .

3. Тригонометрическое представление.

Из предыдущего ясно, что комплексное число можно записать и так:

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

если  $\varphi$  – это аргумент  $z$ . Здесь вся «комплексность» сидит в скобке. Все числа вида  $(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  имеют единичный модуль и, значит, в комплексной плоскости лежат на единичной окружности (рис. 1.12).

Тригонометрическая форма позволяет наглядно понять смысл произведения двух комплексных чисел. Перемножим два числа с единичным модулем:

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2).$$

Но это попросту  $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ . Получается, что при перемножении двух комплексных чисел их аргументы складываются. (Если есть еще модули, они просто перемножаются, как действительные числа, каковыми и являются). Соответственно при делении модули делятся, а аргументы вычитаются.

4. Экспоненциальное представление.

Про действительные числа мы знаем, что при перемножении складываются логарифмы:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Это приводит к догадке, что аргумент комплексного числа – это нечто близко связанное с его логарифмом. И действительно,

$$\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Эта неожиданная связь называется **формулой Эйлера**. Попробуем в ней убедиться.

Снова рассмотрим «чистые аргументы» – числа с единичным модулем. Хотя мы еще слабо представляем себе, что могут означать экспоненты с мнимым показателем, но если в них хоть какой-то смысл есть, то они тоже лежат на единичной окружности. Действительно, квадрат модуля равен произведению числа на сопряженное,  $e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi}$ , что при любом разумном понимании обращается в 1. Первая проверка пройдена.

Перемножить два числа с единичным модулем – все равно, что сложить аргументы. Такое же свойство будет иметь и произведение  $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}$ . Это, конечно, еще ничего не

доказывает: например, для записи  $e^{7i\varphi}$  тоже аргументы суммировались бы. Но для  $e^{i\sqrt{\varphi}}$  суммирования не получится (как и для любой функции угла в показателе экспоненты, кроме прямой пропорциональности).

Рассмотрим случай **малого** угла  $\varphi$ . Тогда экспоненту можно записать в виде

$$e^{i\varphi} \approx 1 + i\varphi.$$

Это число, аргумент которого – малый угол, тангенс которого есть  $\varphi$ . Тангенс малого угла равен углу. Поэтому аргумент числа  $e^{i\varphi}$  стремится к  $\varphi$  для малых углов. Модуль, как уже установлено, равен  $1^4$ . Значит, для малых углов формула Эйлера верна.

Произвольный угол, например 49 градусов, можно представить как сумму малых, для которых формула выполняется. Перемножая экспоненты с мнимым показателем, мы складываем углы. Выходит, что формула Эйлера правильна для любых углов<sup>5</sup>.

В экспоненциальной форме умножение и деление комплексных чисел выполняются наиболее наглядно:

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}, \quad z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Логарифм произвольного комплексного числа  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$  можно записать в виде

$$\ln z = \ln |z| + i \cdot \varphi.$$

---

<sup>4</sup>На первый взгляд, модуль больше 1, так как уже действительная часть равна 1. Но это вышло из-за пренебрежения следующими порядками. Например, при учете второго порядка получится  $1 - \varphi^2/2 + i\varphi$ . Можно усмотреть в действительной части разложение косинуса. Этот уточненный модуль равен 1 с точностью до четвертого порядка. Выше мы установили, что  $|e^{i\varphi}| = 1$  точно, и сейчас достаточно разобраться с аргументом этого числа.

<sup>5</sup>Это следует и из указанной выше линейной связи показателя экспоненты с аргументом.