

ВОЛНОВАЯ ФИЗИКА

Курс лекций для ФМШ

Часть 1. ОПТИКА И ВОЛНЫ

2. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

А. П. Ершов

11 апреля 2011 г.

Глава 2

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

2.1 Волны. Волновой вектор, частота, длина и скорость волны

Плоская волна задается выражением $f(x - ct)$. Функция f – **амплитуда**¹ волны – почти произвольная (на практике есть ограничения), и может быть давлением (звук), высотой поверхности (морские волны), электрическим или магнитным полем (свет). При $x = ct + \text{const}$ величина f постоянна: это состояние переносится со скоростью волны c вправо. Волна, двигающаяся влево, описывается зависимостью $f(x + ct)$.

Важен случай синусоидальных, или **монохроматических** волн, например:

$$f = A \cdot \cos(k(x - ct) - \varphi).$$

Здесь A – **амплитуда**² волны. Аргумент косинуса называется **фазой** волны, а постоянная φ – начальной фазой. Подбирая φ , можно получить чистый косинус или чистый синус более простого аргумента $k(x - ct)$, а в общем случае выходит их смесь:

$$f = A \cdot (\cos(k(x - ct)) \cos \varphi + \sin(k(x - ct)) \sin \varphi) = B_1 \cdot \cos(k(x - ct)) + B_2 \cdot \sin(k(x - ct)).$$

Волновое число k имеет размерность $1/\text{м}$. В пространстве вводят волновой вектор \mathbf{k} вдоль направления распространения волны и пишут $(\mathbf{k}\mathbf{r})$ вместо kx . Часто волновым вектором называют модуль $k = |\mathbf{k}|$. В одном измерении k – это единственная x – компонента вектора. **Длина волны** λ есть интервал, на котором значение функции повторяется: $k\lambda = 2\pi$; $k = 2\pi/\lambda$. Волна заметно меняется на размере $1/k = \lambda/2\pi$. Сама длина волны обычно слишком велика, чтобы служить характерным масштабом: на ней существенное изменение функции происходит не менее 4 раз (а точнее, λ отличается от $1/k$ коэффициентом $2\pi = 6,28\dots$).

¹В более узком смысле, обычно применяемом к периодической и особенно синусоидальной функции, амплитудой называют максимальное значение функции, как мы это делали в предыдущей главе и как будет в следующем абзаце.

²В узком смысле максимального значения.

Другая запись: $f = A \cdot \cos(kx - \omega t)$, где $\omega = ck$. Величина ω называется **частотой** волны. Если период волны T , то $\omega T = 2\pi$; $\omega = 2\pi/T$. За время $1/\omega = T/6,28$ с волной в данной точке пространства будут происходить заметные изменения. В XIX веке пользовались частотой $\nu = \omega/2\pi = 1/T$ (число колебаний в секунду), а ω , под именем круговой частоты, встречалась реже. Теперь больше употребляется ω , как более удобная и лучше определяющая временные характеристики. Для сравнения можно сказать, что k – это как бы пространственная частота, а λ – пространственный период. Частота волны (или соответствующая длина волны) определяет цвет, почему волну с определенной частотой и называют монохроматической (греч.: одноцветной).

Скорость $c = \omega/k$ называется **фазовой**. С этой скоростью передвигаются гребни и нули синусоиды, то есть точки, в которых фаза волны постоянна.

Сложением двух встречных волн получаем **стоячую** волну:

$$A \cdot \cos(kx - \omega t) + A \cdot \cos(kx + \omega t) = 2A \cdot \cos(kx) \cdot \cos(\omega t) .$$

Она никуда не распространяется, хотя в каждой точке происходят колебания. Нули (узлы) и максимумы (пучности) не передвигаются, а стоят на месте. Обычно вторую волну получают отражением. Хорошие стоячие двумерные волны можно наблюдать в прямоугольном баке с водой, если его потрясти³.

Для отдельной монохроматической волны нельзя указать ее определенного положения: она присутствует во всем пространстве. Теперь сложим две близкие волны, у которых есть малые отличия волновых векторов ($2\delta k$) и частот ($2\delta\omega$):

$$\begin{aligned} A \cdot \cos((k - \delta k)x - (\omega - \delta\omega)t) + A \cdot \cos((k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t) = \\ = 2A \cdot \cos(\delta k \cdot x - \delta\omega \cdot t) \cdot \cos(kx - \omega t) . \end{aligned}$$

Получаем (рис. 2.1) «основную» волну (второй \cos) с медленно меняющейся (на размере $\sim 1/\delta k$) амплитудой (первый \cos). На расстоянии $\pi/(2\delta k)$ от максимума накапливается разность фаз двух исходных волн, равная π , и составляющие гасят друг друга. На еще больших расстояниях фазовый сдвиг приближается к 2π и амплитуда опять вырастает, и т.д. Получается множество областей, в которых волны складываются, разделенных участками «нулей», где происходит взаимное гашение. Заметим, что области большой амплитуды перемещаются со скоростью $\delta\omega/\delta k$. Такая волна локализована в пространстве уже несколько лучше монохроматической. Это достигнуто ценой небольшого нарушения монохроматичности: исходная пара волн имела слегка различные частоты.

Добавив еще пару волн с частотами $\omega_0 \pm \delta\omega/2$, можно подавить максимумы на расстоянии $\pi/\delta k$. Продолжая этот прием, из большого количества почти одинаковых волн, у которых ω и k немного (в пределах $\delta\omega$ и δk) отличаются, можно собрать **волновой пакет**, или **цуг волн** (рис. 2.2), у которого амплитуда огибающей практически нулевая (точнее, быстро убывает) вне области размера $\sim 1/\delta k$. При малом δk в таком

³Раньше такой бак, с готовым механизмом для тряски, имели некоторые типы стиральных машин. Сейчас можно воспользоваться емкостью для овощей из холодильника.

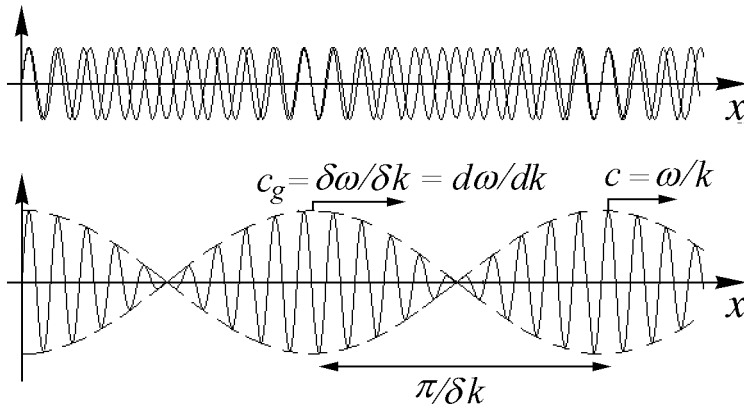


Рис. 2.1.

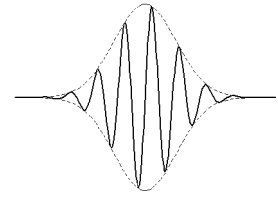


Рис. 2.2.

пакете много ($\sim k/\delta k$) гребней, и он распространяется подобно частице. Можно с точностью до размера $1/\delta k$ говорить о его положении в пространстве. Скорость перемещения пакета c_g – это скорость его огибающей. Как и при сложении пары волн, $c_g = \delta\omega/\delta k = d\omega/dk$.

Эта **групповая** скорость может отличаться от фазовой. Например, для волн на глубокой воде $\omega \cong \sqrt{gk}$; $c = \sqrt{g/k}$, а $c_g = d\omega/dk = (1/2) \cdot \sqrt{g/k}$. Мы будем видеть эту группу (то есть ее медленную огибающую) распространяющейся со скоростью c_g . Отдельные же гребни будут «вылезать» из хвоста пакета, достигая максимума в его середине, а затем уменьшаться и пропадать в передней части, двигаясь со скоростью c , вдвое большей. Бывает, что $c_g > c$, и даже они могут быть разных знаков.

Смысл различия в том, что волне нельзя приписать единственной «правильной» скорости, как какой-нибудь материальной точке. Известна аналогия с облаком (Л.И. Мандельштам): капли воды обычно падают вниз, но граница облака может перемещаться и вверх при испарении этих капель. Тоже нельзя однозначно определить, что такое скорость облака. Сидя в лодке, раскачиваемой набегающими волнами, мы интересуемся фазовой скоростью, а ожидая прихода на берег волн от катера, надо прикинуть групповую скорость. С групповой скоростью переносится информация и энергия (кроме патологических случаев).

К счастью, в акустике и оптике обычно выполняется линейный закон дисперсии: $\omega = ck$, $c = \text{const}$. Тогда $c_g = c$: групповая и фазовая скорости совпадают. Отклонения возможны, когда частота ω близка к частотам внутренних процессов в среде.

Задача. Сложить **бесконечное** число волн одинаковой амплитуды. Полезно применить комплексное представление:

$$\sum \exp(i(kx - \omega t)) \implies \int_{k_0 - \delta k}^{k_0 + \delta k} \exp(i(kx - \omega t)) dk .$$

Показать, что при линейном разложении $\omega(k)$ вблизи k_0 результат пропорционален

$$\exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) \cdot \frac{\sin(\delta k(x - (d\omega/dk)t))}{\delta k(x - (d\omega/dk)t)} .$$

Первый множитель – это основная волна, а второй – ее амплитуда, или огибающая. Нарисовать, как эта огибающая выглядит. С какой скоростью распространяется волна?

2.2 Интерференция волн. Интенсивность. Принцип Гюйгенса

Сложим две волны, фазы которых отличаются на константу φ (как говорят, сдвинутые по фазе):

$$A \cdot \cos(kx - \omega t) + A \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi) = 2A \cos(\varphi/2) \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi/2).$$

Выходит волна, амплитуда которой в зависимости от φ может быть от 0 до $2A$.

Мы не воспринимаем отдельные световые колебания. Свет имеет длину волны $\lambda \simeq (3 \div 7) \cdot 10^{-5}$ см. Частота $\omega = 2\pi c/\lambda \approx 4 \cdot 10^{15}$ 1/с и характерное время $1/\omega \approx 3 \cdot 10^{-15}$ с. Раз это время так малó, должна восприниматься какая-то усредненная характеристика. Среднее электрическое поле равно нулю. Разумно назвать **интенсивностью** волны средний квадрат поля: $I = A^2 \cdot \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = A^2/2$ для монохроматической волны. Подразумевается усреднение по времени в каждой точке пространства. Интенсивность суммы двух сдвинутых по фазе на φ волн будет

$$I = 4A^2 \cdot \langle \cos^2(kx - \omega t + \varphi/2) \rangle \cdot \cos^2(\varphi/2) = 4 \cos^2(\varphi/2) \cdot \frac{A^2}{2}.$$

Она может меняться от нуля до учетверенной интенсивности одной волны.

Интенсивность – это энергетическая характеристика (вспомним, что для электромагнитных волн – света – энергия как раз $\varepsilon_0 E^2$). Явление взаимного гашения или, наоборот, непропорционального – более чем двукратного – увеличения интенсивности при сложении волн называется **интерференцией**. Интерференцию двух бытовых источников получить не просто. Допустим, что фазовый сдвиг φ сам изменяется, скажем, с частотой 10^2 Гц. Именно с такой частотой «мигает» лампа накаливания, что нам незаметно. Тогда надо усреднить суммарную интенсивность еще и по φ ; $\langle \cos^2(\varphi/2) \rangle$ тоже даст множитель $1/2$, и суммарная интенсивность будет равна сумме интенсивностей отдельных волн $2(A^2/2)$. Заметим, что в этом примере стабильность φ сравнительно с основной частотой огромная: порядка 10^{13} .

Чтобы получить интерференцию, надо очень жестко зафиксировать фазовый сдвиг. Поэтому, включив две лампы, мы всегда получаем удвоенную освещенность, а не учетверенную либо нулевую в разных местах: фазы волн от ламп случайны и быстро колеблются. Говорят, что для интерференции волны должны быть **когерентны**, то есть их фазы увязаны между собой. Например, вторая (сдвинутая) волна может получаться разделением пучка одного источника зеркалами и т.п. В акустике нет такого запаса порядков величины, и нетрудно заметить интерференцию от разных струн расстроенного рояля («плавание» звука). Потому-то волновая природа звука очевидна давно, а до света дело дошло только в начале XIX века.

Но часто люди наблюдают интерференцию без всяких приспособлений, не осознавая этого. Например, мыльные пузыри или масляные пятна на воде переливаются разными цветами. Это не потому, что они так раскрашены: при смещении глаза перемещаются и цветные полосы, это самая настоящая интерференция. Если где-то глаз видит красное пятно, значит из этого места идут интерферирующие с усилением красные лучи. Более того, всякий объектив, в том числе хрусталик глаза, есть прибор, сводящий расходящийся из точки пучок лучей в другую точку, что и означает интерференцию. Видеть предметы – это значит регистрировать интерференцию исходящих от них лучей (подробнее мы рассмотрим это в следующей главе, п. 3.5).

Принцип Гюйгенса в простейшей форме гласит, что каждая точка фронта волны является источником сферических расходящихся волн. Огибающая этих волн через малое время даст новое положение фронта, и т.д. Например, волна на воде – это поднятие уровня. Ясно, что возвышение подействует на соседнюю воду и приведет ее в движение. В акустике изменившееся давление толкнет соседний газ – и для оптики – электрическое и магнитное **поля** на фронте создают такие же поля впереди, а вовсе не **фонарь**, зажженный где-то ранее. Вообще волновые процессы явно предполагают близкодействие.

В более детальной форме принцип Гюйгенса – это приближение, которое применяется в задачах дифракции. Рассмотрим плоскую волну, падающую на непрозрачный экран с отверстием. Отверстие можно рассматривать как источник, от которого через малое время в центральной части волна продвинется, оставаясь плоской, но загнетса по краям. По мере продвижения огибающих вдали от отверстия получим волну с почти сферическим фронтом. Это не значит, что отверстие эквивалентно точечному источнику: амплитуда волны на фронте, как мы увидим, отнюдь не одинаковая. Память об исходном параллельном пучке сохраняется, но часть световой энергии расходится в стороны. Эту способность волн загибаться за края препятствий и называют **дифракцией**.

Строго говоря, надо решать уравнения Максвелла с граничными условиями на экране и других границах (например, слева от экрана источник, а справа другой экран, на котором наблюдается результат прохождения света). При этом надо знать свойства материала обоих экранов и источника. В частности, правый экран отражает свет налево, этот свет проходит в отверстие и влияет на источник, и пр. Все это сложно.

Но в случае, когда размеры отверстия гораздо больше длины световой волны, волновые свойства света проявляются слабо, и достаточно учесть их в первом приближении. Именно, считается, что поле в отверстии такое, как создавал бы источник в отсутствие экранов, а на остальной поверхности непрозрачного экрана поле точно нулевое. Каждый элемент dS площади отверстия есть источник проходящей волны, амплитуда которой пропорциональна произведению dS на амплитуду падающей волны и спадает обратно пропорционально расстоянию, как и положено в сферической волне. Это позволяет вычислить распределения интенсивности в прошедшей волне.

2.3 Дифракция от двух щелей. Дифракционная решетка

Пусть плоская волна, то есть параллельный пучок света, падает на непрозрачный экран, имеющий две щели. Расстояние между щелями d , ширина щелей гораздо меньше. По принципу Гюйгенса, эти щели – два источника, излучающие когерентно, точно в фазе. Что будет видно на втором, удаленном на большое расстояние L , экране?

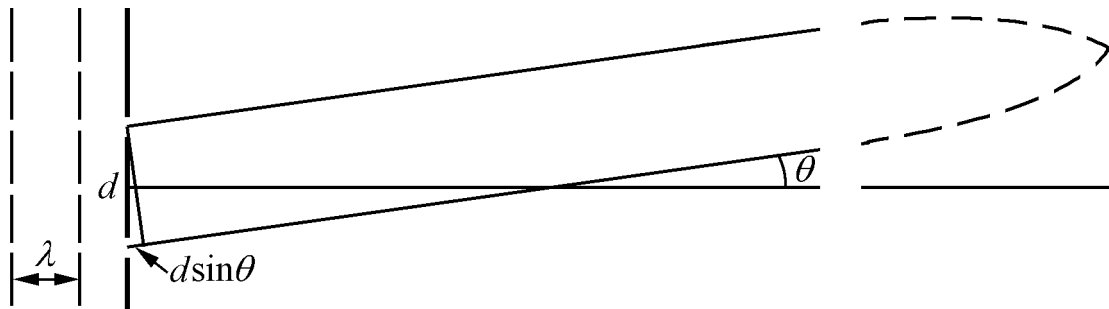


Рис. 2.3.

Выберем угол θ отклонения лучей. При удаленном экране ($L \gg d$) лучи, сходящиеся на экране, практически параллельны и имеют **разность хода** $\Delta = d \cdot \sin \theta$. (На рис. 2.3 экран не удалось достаточно отодвинуть, и пришлось после разрыва картин-ки изобразить лучи искривленными, чтобы свести их в одну точку; на самом деле они прямые). Поскольку расстояние L велико, на ослабление волн от обеих щелей малая разница Δ не влияет, т.е. на экране складываются волны одинаковой амплитуды. Однако различие **фаз** этих волн $k\Delta = 2\pi\Delta/\lambda$ учитывать нужно (так как длина волны λ мала). Если разность хода равна целому числу n длин волн или нулю, то волны от двух источников имеют разность фаз, кратную 2π , и будут складываться. Наоборот, когда разность хода равна $\lambda/2 + n\lambda$, волны будут друг друга гасить. Поэтому на удаленном экране будет не две светлых полосы на расстоянии d друг от друга, как, скажем, от двух окон, а чередование большого числа светлых и темных полос. Угол θ для первой темной полосы: $\sin \theta = \theta = \lambda/2d$, положение ее на экране $y = L\theta = L\lambda/2d$. При $y = L\lambda/d$ будет светлая полоса, дальше опять темная, и т.д.

Найдем распределение интенсивности. Вместо тригонометрической удобнее комплексная запись волны. Пусть волна $A \cdot \exp(i(kx - \omega t))$ приходила бы по направлению θ на экран из источника, находящегося точно между щелями. Тогда от верхней щели придет сигнал $A \cdot \exp(i(kx - kd \sin \theta/2 - \omega t))$ с более ранней фазой, а от нижней придет $A \cdot \exp(i(kx + kd \sin \theta/2 - \omega t))$ с запаздыванием по фазе. Складываем:

$$A \cdot \exp(i(kx - \omega t)) \cdot (\exp(ikd \sin \theta/2) + \exp(-ikd \sin \theta/2)) = \\ 2A \cdot \exp(i(kx - \omega t)) \cdot \cos(kd \sin \theta/2) .$$

Возвращаемся к действительной записи: $2A \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \cos(kd \sin \theta/2)$. (Это, скажем, электрическое поле в точке экрана, определенной углом θ). Чтобы найти интенсивность,

возводим в квадрат и усредняем по времени:

$$I = 2A^2 \cdot \cos^2(kd \sin \theta/2) .$$

Заметим, что при $\theta = 0$ наблюдается центральный максимум, как раз где должна быть геометрическая тень. Первый нуль будет при $kd \sin \theta/2 = \pi/2$ или $\sin \theta = \lambda/2d$, смысл чего разъяснен выше.

Как и в задачах переменного тока, удобно сложение волн изображать графически. Волну от одной щели в точке наблюдения рисуем в виде горизонтального единичного вектора, а от второй – вектора такой же длины, повернутого на угол, соответствующий сдвигу фаз (рис. 2.4). При разности хода $\lambda/4$ сдвиг равен $\pi/2$, при $\lambda/2$ уже будет π , и т.д. Далее вся конструкция вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Амплитуда в точке наблюдения будет суммой векторов. Видно, что она может меняться от 0 до 2, а интенсивность – от 0 до 4.

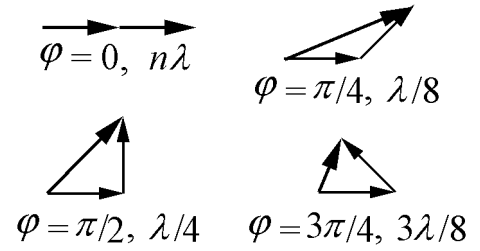


Рис. 2.4.

Сколько же будет полос от двух щелей? Одна щель тоже дает дифракцию. Пусть ширина щели a , представляем ее как набор линейных источников, дающих в точке наблюдения амплитуду, пропорциональную их ширине dz . Суммируем сигналы:

$$\exp(i(kx - \omega t)) \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \exp(ikz \cdot \sin \theta) dz =$$

$$\frac{e^{i(kx - \omega t)}}{ik \sin \theta} \cdot \left[\exp\left(\frac{ika \sin \theta}{2}\right) - \exp\left(-\frac{ika \sin \theta}{2}\right) \right] = e^{i(kx - \omega t)} \cdot a \cdot \frac{\sin(ka \sin \theta/2)}{ka \sin \theta/2} .$$

Интенсивность получим, усреднив квадрат амплитуды:

$$I \sim \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin^2(ka \sin \theta/2)}{(ka \sin \theta/2)^2} .$$

При $\theta = 0$ – главный максимум, при $0,5 \cdot ka \sin \theta = n\pi$ – нули. При этом разность хода от верхнего и нижнего краев щели $a \sin \theta = n\lambda$: края должны интерферировать в фазе. Зато верхний край уничтожается с серединой, и т.п. Главный максимум вдвое шире боковых (например, между π и 2π). Величина первого бокового максимума около 5% от главного, остальные еще меньше (рис. 2.5).

В геометрическом представлении (рис. 2.6) амплитуда в направлении точно вперед – это сумма многих малых амплитуд, вытянутых в линию. Считаем, что длина этой линии 1. Под углом θ максимальная разность хода $a \sin \theta$, фазовый сдвиг $\varphi = 2\pi a \sin \theta/\lambda$. Если первый из маленьких векторов горизонтален, то последний будет под углом φ , а образуют они дугу окружности длиной опять же 1. Амплитуда будет хордой этой дуги, то есть $2R \sin(\varphi/2)$, а дуга $1 = R\varphi$. Выражая R , получим ту же формулу: $I \sim (\sin(\varphi/2)/(\varphi/2))^2$. Первый нуль будет при $\varphi = 2\pi$, когда дуга загнется в полный

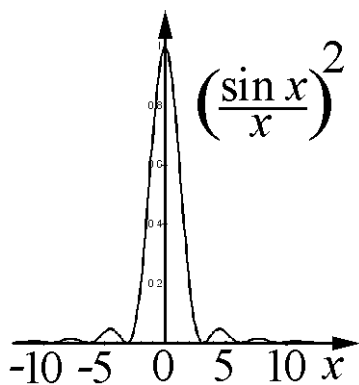


Рис. 2.5.

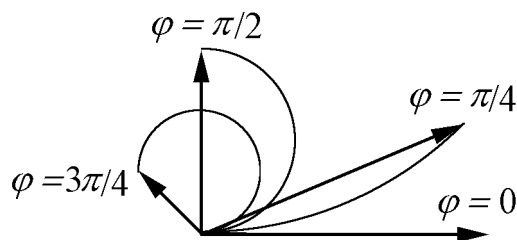


Рис. 2.6.

круг, и амплитуда станет нулевой. Отсюда легко оценить первый боковой максимум: надо из единичной веревки свернуть полторы окружности. Диаметр будет $2/3\pi = 0,2122$, интенсивность $(2/3\pi)^2 = 0,045$. Чтобы получить более точное значение 0,0472 из формулы, надо приравнять нулю громоздкое выражение производной интенсивности.

Угол на первый ноль $\theta = 2\pi/ka = \lambda/a$. Здесь, как и в прошлом примере, свет не идет по прямой, а согласно своей волновой природе разбегается в стороны. Угол расхождения, или дифракционный угол, порядка (длины волны)/(поперечник источника). Интенсивность в максимуме $\sim a^2$, его угловой размер $\sim \lambda/a$, и полная энергия, попадающая на экран, пропорциональна ширине щели a , как и следовало ожидать. Вклад боковых максимумов – несколько процентов.

Разумеется, дифракция от двух щелей будет наблюдаться, когда дифракционные пучки отдельных щелей пересекаются. В частности, поэтому мы не видим таких эффектов в комнате с двумя окнами: при макроскопическом отверстии угол расхождения мал⁴; на стене будут видны два ярких пятна даже при когерентном освещении. Если же от достаточно узких щелей главные максимумы пучков перекроются, то в области взаимодействия и будут, собственно, полосы интерференции; их количество $\sim d/a$. Отметим, что лазер для наблюдения интерференции необязателен, иначе бы ее не открыл Юнг в 1807 году. Мы часто наблюдаем дифракцию, не подозревая об этом. Например, если смотреть на яркий точечный источник, зажмурившись, можно увидеть цветные полосы; это дифракция на зазорах между ресницами, а экраном служит сетчатка глаза.

Пусть в экране много (N) щелей. Тогда получается **дифракционная решетка**. Она дает **главные максимумы** в тех же направлениях, что и две щели с тем же разнесом d : при $d \sin \theta = n\lambda$ все щели работают в фазе. Однако если чуть увеличить θ , прибавив всего одну волну на нижнем краю решетки, амплитуда уже обратится в нуль. Как и в случае одной щели, при этом взаимно гасятся волны от первой щели и от щели с номером $N/2$, от второй и $N/2 + 1$ В геометрическом представлении получится замкнутый N – угольник, при большом N почти окружность. Видно, что главные максимумы решетки очень узкие ($\sim \lambda/Nd$), зато яркие: в них интенсивность

⁴Не надо путать дифракционное расхождение с размытием границ при освещении протяженным источником (полутени от Солнца, лампы и пр.)

$\sim N^2$, а суммарная энергия, разумеется, пропорциональна числу излучателей N . Между ними находятся $\approx N$ мелких боковых максимумов, относительная интенсивность первых из них такая же, как в картине дифракции на одиночной щели. Нетрудно получить и распределение интенсивности от решетки подобно уже рассмотренным примерам. Складывая сумму вида $\sum_n \exp(ikd \sin \theta \cdot n)$, пользуйтесь формулой геометрической прогрессии.

Дифракционные решетки полезны при исследовании излучения, содержащего волны с разными длинами, позволяя разобраться в его составе. **Спектром** излучения называется набор всех составляющих его волн. Например, спектр волны вида $\cos(\delta k \cdot x - \delta \omega \cdot t) \cdot \cos(kx - \omega t)$, рассмотренной в п. 2.1 на стр. 14, содержит две компоненты с частотами $\omega \pm \delta \omega$. После взаимодействия с дифракционной решеткой каждая компонента образует свои дифракционные линии. На экране (обычно это фотопластинка) получится набор полос, напоминающий наложение двух гребенок с разным шагом. Нулевые главные максимумы ($n = 0$) совпадают, но уже первый максимум ($n = 1$) на фотопластинке распадется на две близко расположенные линии. Это и покажет, что спектр содержит ровно две компоненты. Чем больше штрихов у решетки, тем лучше ее разрешающая способность – линии спектра получают яркими и узкими.

Рентгеновские лучи – это свет с малой длиной волны (например, у меди есть линия $1,54 \text{ \AA}$). Кристаллы служат для рентгена дифракционной решеткой с большими углами поворота излучения. Эти углы характерны для каждого кристалла (рентгеноструктурный анализ).

Для отражательной решетки в максимумах отражения должно выполняться **условие Вульфа – Брэгга**: $d(\sin \theta_i - \sin \theta_r) = n\lambda$; углы меряются от вертикали. Обратите внимание, что решетка всегда отражает свет под углом, равным углу падения, но **может** отражать и под совсем другим. Нить лампы накаливания при отражении в граммофонной пластинке видна в нескольких экземплярах (и в радужных цветах). Очень красивые цветные отражения дают компакт-диски. Убедитесь на опыте, что радужные полосы наблюдаются всегда в стороне от геометрического отражения источника света.

2.4 Преломление и отражение света. Показатель преломления

Рассмотрим гладкую (в масштабе λ) поверхность. Опыт показывает, что угол отражения от нее равен углу падения. Это сразу следует из волновой картины: если длина волны λ , то периодичность точек касания поверхности с фронтами волн будет $\lambda / \sin i$, i – угол падения. Для отраженного пучка та же периодичность $\lambda / \sin r$, r – угол отражения. Эти величины должны совпадать (рис. 2.7), откуда $i = r$.

Опыт показывает, что при входе в прозрачную среду луч света меняет свое направление (преломляется). Угол преломления также принято обозначать r (от refracted).

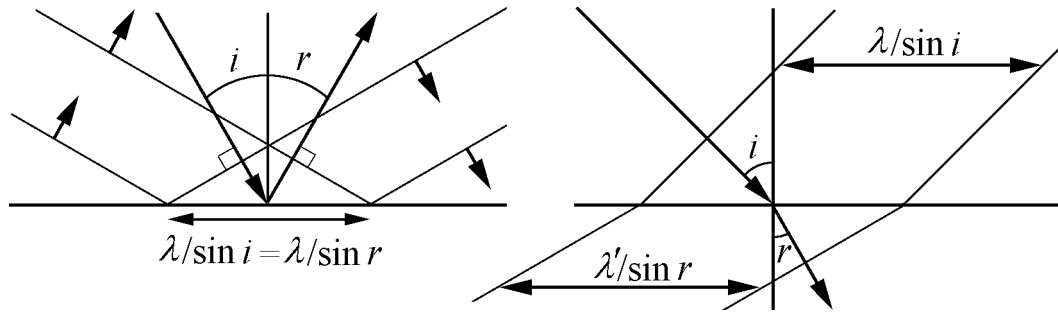


Рис. 2.7.

Такое же рассуждение, как для случая отражения, приводит к равенству (рис. 2.7)

$$\frac{\lambda}{\sin i} = \frac{\lambda'}{\sin r}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda T}{T \lambda'}.$$

Здесь λ' – длина волны света в веществе, которая для соблюдения граничного условия должна отличаться от исходной длины в пустоте λ . Напротив, частота и период колебаний света в среде T не изменяются, иначе фазы колебаний нельзя было бы согласовать на границе. Отношения $\lambda/T = c$ и $\lambda'/T = V$ – это скорости волны в пустоте и в среде. Следовательно, сам факт преломления указывает на отличие V от c . Принято выражать скорость в виде $V = c/n$, где **показатель преломления** $n > 1$; для вакуума по определению $n = 1$. Окончательно закон преломления записывается в виде

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Преломленный луч идет ближе к нормали. Поток частиц тоже может преломляться таким образом, но только если скорость в веществе, наоборот, увеличивается. Прямые кинематические измерения в XIX веке показали, что свет в среде имеет меньшую скорость, чем в пустоте, что было одним из доказательств волновой природы света.

Если граница разделяет две среды с известными показателями преломления n_i и n_r , выполняется соотношение

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_r}{n_i}.$$

Вообще говоря, на границе прозрачных сред происходит и преломление, и отражение. Некоторые особые случаи, когда отраженный или преломленный луч может отсутствовать, рассмотрены ниже.

Поскольку свет есть электромагнитная волна, показатель преломления можно связать с электромагнитными свойствами вещества. Однородный изолятор полностью характеризуется проницаемостями ϵ и μ . Уравнения

$$\oint (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = -\frac{d}{dt} \int (\mathbf{B} d\mathbf{S}), \quad \oint (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{d}{dt} \int (\mathbf{D} d\mathbf{S})$$

приводят, аналогично п. 5.4 «Электродинамики», к соотношениям:

$$E = VB, \quad \frac{B}{\mu_0 \mu} = V \epsilon_0 \epsilon E, \quad \text{откуда} \quad V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \mu}} = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E,$$

т.е. энергии полей в волне равны: $B^2/2\mu_0\mu = \varepsilon_0\varepsilon E^2/2$. Обычно для прозрачных сред $\mu = 1$ с большой точностью, и показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$. Соотношение между полями при этом: $cB = E\sqrt{\varepsilon} = nE$. Для воздуха ($\varepsilon = 1,00057$) $n \approx 1,0003$. Таким слабым отличием от 1 часто пренебрегают. Для стекол типично $n \approx 1,5$. Отметим, что n воды (1,333) не согласуется с известной нам диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon \simeq 80$). Оказывается, ε зависит от частоты. Значение 80 – для постоянного или медленно меняющегося поля. Видимый же свет имеет частоту порядка $3 \cdot 10^{15}$ Гц, при которой $\varepsilon \approx 1,78$. Видно, что зависимость $\varepsilon(\omega)$ может быть существенной (см. приложение).

При переходе из воздуха в оптически плотную среду (имеющую больший показатель преломления) $\sin r < \sin i$, т.е. луч прижимается к нормали. При обратном направлении угол между лучом и нормалью к поверхности увеличивается: $\sin r$ (в воздухе) $= n \sin i$. Если $\sin i > 1/n$, то $\sin r > 1$. Такой луч, неспособный найти себе угол выхода, целиком отражается (полное внутреннее отражение). Этот эффект используется в световодах – оптических волокнах, по которым передается сейчас большая часть информации.

Мы не учитывали пока поперечность световой волны. Вектор \mathbf{E} всегда перпендикулярен направлению распространения волны (т.е. вектору \mathbf{k}). Можно выбрать два таких, взаимно перпендикулярных, направления. Значит, произвольный свет можно представить как сумму двух **плоско поляризованных** волн, в каждой из которых электрический вектор колеблется в одной из взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся по вектору \mathbf{k} .

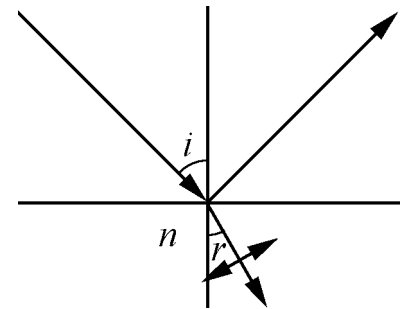


Рис. 2.8.

Рассмотрим падение на прозрачную среду волны, поляризованной в плоскости падения (рис. 2.8). В среде электроны колеблются перпендикулярно прошедшему лучу. Как мы видели при рассмотрении электромагнитных волн, излучение в направлении колебаний отсутствует. Поэтому при совпадении направления колебаний и отраженного луча никакого отражения не будет: $i+r = \pi/2$, $\sin i/\sin r = n$ или $\operatorname{tgi} = n$ (угол Брюстера). Под этим углом будет отражаться только свет, поляризованный перпендикулярно плоскости падения: так можно получать полностью поляризованный свет. Существуют также специальные поляризаторы, избирательно пропускающие свет с заданным направлением поляризации.

Коэффициенты отражения в зависимости от i , n и получаются из уравнений Максвелла (формулы Френеля). Они довольно громоздкие и зависят от поляризации.

Задача: найти коэффициент отражения при нормальном падении.

2.5 Принцип Ферма. Приближение геометрической оптики

Мы перешли от интерференции и дифракции к прямолинейному распространению света по школьным законам. Есть ли между этими явлениями какое-то соответствие?

Принцип Ферма как раз позволяет в этом разобраться. (Ферма – тот самый автор теоремы)⁵. Согласно этому принципу, свет из одной точки в другую идет по пути, требующему наименьшего времени. Для простого движения света из лампы А в глаз В, очевидно, получится прямая. Пусть свет попадает из А в В, отражаясь от зеркала (рис. 2.9). Отразим симметрично В → В'; путь из А в В равен пути АВ'. Путь АВ минимален, когда АВ' – прямая. Легко убедиться, что именно для такого случая угол падения равен углу отражения.

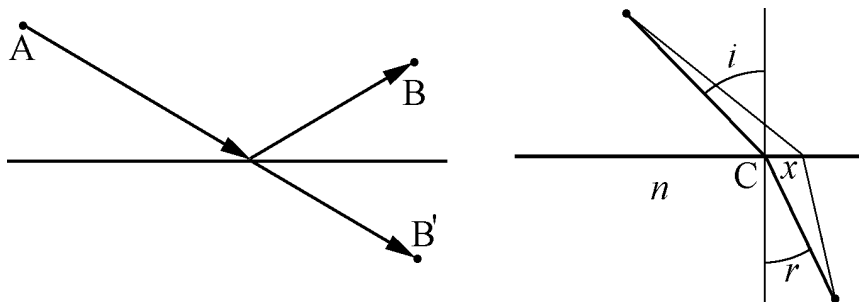


Рис. 2.9.

Так же получается закон преломления. Пусть луч преломляется в точке С. Если сместиться вдоль поверхности на малое расстояние x , то верхний путь луча (в воздухе) удлинится на $x \sin i$, а нижний (в стекле) укоротится на $x \sin r$. Если $x = 0$ соответствует минимальному времени, то оба изменения должны компенсироваться: в минимуме производная времени по x равна нулю. Получаем $x \sin i/c - x \sin r/(c/n) = 0$, или $\sin i/\sin r = n$.

Как же свету удастся выбирать минимальный путь, и почему бы ему не двигаться какими-то извилистыми путями?

Правильный ответ: он именно идет **всеми** возможными путями, а кажущаяся прямолинейность – это суммарный эффект всех путей. Возьмем прямую, которую мы воспринимаем как путь света. Для простоты рассмотрим пути типа показанных на рис. 2.10.

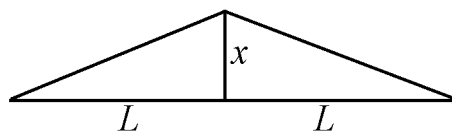


Рис. 2.10.

На таком пути свет набирает разность хода $s = 2\sqrt{L^2 + x^2} - 2L$ по сравнению с прямым, если x – высота треугольника. Очевидно, что минимум $s = 0$ при $x = 0$.

Теперь позволим свету распространяться по таким путям. Если пути равноправны и надо учесть все, остается сложить волны, прошедшие все пути, и считать окончательную волну результатом интерференции. Пусть по прямой придет свет с нулевой фазой. Соседние волны, для которых высота x мала, придут с малой разностью хода и будут складываться амплитуды. С возрастанием x появятся большие сдвиги фаз. Найдем, когда сдвиг фаз будет π (то есть полволны). При малом x из бинорма Ньютона $s = x^2/L = \lambda/2$; соответствующее $x_1 = \sqrt{\lambda L/2}$. Круг радиуса x_1 называется первой зоной Френеля. Для $L = 1$ м, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см $x_1 = 0,5$ мм.

Представим результат интерференции графически, изображая амплитуды волн, прошедших разными путями, в виде векторов почти одинаковой длины. В духе принци-

⁵Считается, что так называемая Великая теорема Ферма доказана Э. Уайлзом в 1993 г. «предварительно» и в 1994 окончательно.

па Гюйгенса эти векторы можно понимать как результат действия источников – тонких колец, расположенных в средней плоскости и имеющих одинаковые площади (малые по сравнению с площадью зоны Френеля). Сдвиг фаз изображается поворотом векторов. Свет, прошедший через первую зону Френеля, изобразится последовательностью большого числа векторов, образующих полукруг, так как фаза конечного вектора сдвинута на π (рис. 2.11). В сумме амплитуда от первой зоны будет равна диаметру круга. Далее начнется вторая зона от x_1 до $x_2 = \sqrt{2\lambda L/2} = 1,4x_1 \approx 0,7$ мм. Ее площадь равна площади первой зоны. Сдвиг фаз, или направление векторов, изменяется в ней от π до 2π , а последний вектор приходит почти в исходную точку и дает практически нулевую интенсивность. Значит, в точке наблюдения свет, прошедший через вторую зону Френеля, гасит свет, прошедший через первую зону. Конечно, общее количество света, прошедшего через отверстие радиуса x_2 , вдвое больше, но на оси пучка при таких данных будет темное пятно. На этот парадокс указал Пуассон, когда Френель докладывал свои результаты Французской академии наук. Эксперимент показал, что именно так и есть.

Дальше третья зона практически повторяет первую, четвертая – вторую и т.д. Однако с удлинением пути следует постепенно уменьшать длины векторов, и для большого числа зон образуется спираль, стремящаяся к центру круга, образованного первыми двумя зонами. Амплитуда будет равна половине амплитуды от первой зоны, а интенсивность – четверти.

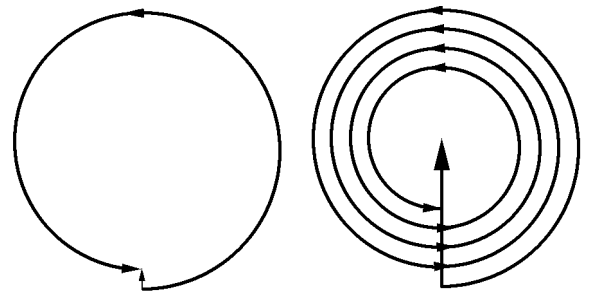


Рис. 2.11.

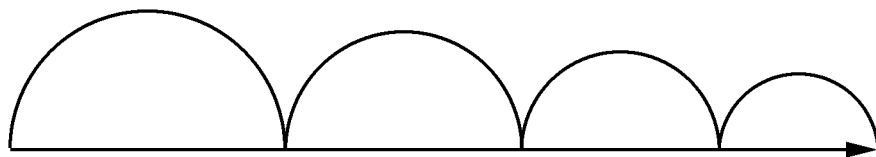


Рис. 2.12.

Видим, что свободно идущий сквозь всю плоскость свет дает в точке приема такой же результат, как если бы он проходил только сквозь часть первой зоны Френеля с поперечником $\sim 0,1$ мм. Поэтому у нас и возникает впечатление прямолинейности распространения света. При всей очевидности и практической полезности это впечатление совершенно ложное. Поместим посередине между источником и изображением **зонную пластинку**, у которой прозрачны только нечетные зоны Френеля, а четные зачернены. Тогда четные зоны не аннулируют свет, прошедший через нечетные, и интенсивность в точке наблюдения возрастет многократно (рис. 2.12). При этом мы не добавляем новый свет, а, наоборот, убираем часть имеющегося. Такая пластинка называется еще линзой Френеля и действительно дает изображение, как обычная стеклянная линза⁶.

⁶В самом деле, она собирает свет от точки – источника в точку на экране с другой стороны пла-

Этот опыт доказывает, что свет **не распространяется прямолинейно**, а использует все возможные пути. Суммирование же вкладов с разными фазами обычно маскирует этот плюрализм и симулирует прямолинейность распространения. Аналогично при отражении свет не ограничивается точкой геометрического отражения, а прощупывает все пути, в том числе неожиданные. Если выкрасить зеркало в области, далекой от геометрического отражения, полосками черной краски, из него может получиться дифракционная решетка, отражающая свет далеко «вбок». Подробно эта ситуация описывается Р. Фейнманом в популярной книге: «КЭД: странная теория света и вещества». Там же затронуты более тонкие вопросы: с чем интерферирует одиночный фотон, еще более замысловатые способы распространения света с рождением по дороге электрон-позитронных пар, которые при аннигиляции опять дают свет, и т.д.

Тем не менее возможен и другой вывод: законы геометрической оптики в пределах своей компетенции вполне пригодны. Мы можем считать, что свет распространяется прямолинейно и отражается зеркально, когда на его пути нет разных хитрых линз Френеля, малых отверстий или дифракционных решеток. Поскольку результат не зависит от наших представлений, удобно говорить о лучах света, с тем же основанием, как атомы можно представлять себе блестящими шариками.

Лучами же будут те линии, вблизи которых пути света удачно интерферируют: складываются амплитуды. Это будет, когда разности хода (а в среде разности времени хода) для близких путей малы, что достигается как раз для пути наименьшего времени. Для произвольного пути при малом его шевелении разность хода пропорциональна смещению, а для минимального – квадрату смещения.

Еще укажем, что реально существующие тонкие лучи света тоже способны ввести в заблуждение. Они тонкие сравнительно со своей длиной, но очень толстые сравнительно с длиной волны. Луч лазера, похожий на спицу, на самом деле – плоская волна, в масштабе λ практически бесконечная поперек направления распространения.

Приложение. Дисперсия в модельной среде

Рассмотрим простую модель среды, в которой электроны держатся на пружинках жесткости k (например, как в атоме Томсона). Уравнение движения электрона

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + eE_0 \exp(i\omega t) .$$

Длина волны \gg размеров атома (у света в ~ 5000 раз), так что E для атома однородно. Как обычно, временную зависимость пишем в экспоненциальном виде. Решение: $x = eE_0 \exp(i\omega t) / m(\omega_0^2 - \omega^2)$. Собственная частота $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Дипольный момент атома будет

стинки. Из нескольких светящихся точек получится столько же точек на экране. Любой светящийся или освещенный предмет – это совокупность точек, испускающих свет. Совокупность их изображений на экране и даст изображение предмета. Например, хорошо получается изображение нити лампы накаливания, причем меняющее цвета при небольшом сдвиге экрана. Цвет определяется длиной волны, для которой выполняется условие Ферма при данном расположении лампы, пластинки и экрана.

ex , а вектор поляризации $P = nex = (ne^2/m)/(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot E = \alpha E$. Наконец, диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Условие $\varepsilon > 1$ выполняется, когда частота света меньше собственной частоты среды. Если же приближаться к собственным частотам (реально их много), то начинается резонанс, колебания уже не малы; надо учитывать затухание. Свет начинает сильно поглощаться. Большинство тел как раз непрозрачны в видимом свете, попадающем в полосу поглощения, а такие, как стекло, случайно имеют «окна» прозрачности. В ультрафиолете стекло уже не пропускает.

Плазма содержит свободные электроны, для которых k и ω_0 равны нулю. Для таких сред $\varepsilon = 1 - 4\pi ne^2/m\omega^2 < 1$. Фазовая скорость волны больше скорости света в вакууме: $\omega/k = c/\sqrt{\varepsilon} = c/\sqrt{1 - 4\pi ne^2/m\omega^2}$, откуда $\omega = \sqrt{4\pi ne^2/m + c^2 k^2}$. Величина $\Omega = \sqrt{4\pi ne^2/m}$ называется плазменной частотой. Групповая скорость

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c \cdot \frac{ck}{\sqrt{\Omega^2 + c^2 k^2}} < c.$$

При $\omega < \Omega$ диэлектрическая проницаемость даже меньше нуля. Корень из ε – показатель преломления – и вместе с ним скорость волны $c/n = \omega/k$ получают мнимые значения. При действительной ω будет мнимый k , что означает затухание волны с расстоянием: $\exp(ikx) = \exp(-|k|x)$. Это не поглощение, так как наша теория не содержит какого-либо трения: будет отражение низких частот и прохождение высоких. Дальняя радиосвязь на коротких волнах облегчается их отражением от ионизированных слоев (даже от метеоритных следов), а на УКВ необходима прямая видимость, почему и строят телевизионные башни.

Для металлов ($n \sim 10^{23}$ 1/см³) $\omega_p \approx 10^{16}$ Гц, примерно как у видимого света. Однако свет даже более высокой частоты не проходит через металл из-за его большой электропроводности. Для меди $\sigma = 5 \cdot 10^7$ 1/(Ом м), и ток проводимости σE много больше тока смещения $\omega \varepsilon_0 E$. В разреженной слабоионизированной плазме ток проводимости бывает возможно пренебречь.