

УДК 532.7 + 532.516.5 + 532.593

## УЧЕТ ДЕЙСТВИЯ ОБЪЕМНЫХ СИЛ В РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ БОЛЬЦМАНА<sup>1</sup>

А. Л. Куперштох

### **Аннотация**

Реализован новый способ учета действия объемных сил на жидкость в методе решеточных уравнений Больцмана — «метод точной разности». Для расчета действия силы предложено использовать разность равновесных функций распределения при постоянной локальной плотности  $\rho$ . Выполнено разложение Чепмена—Энскога для решеточных уравнений Больцмана при использовании «метода точной разности». Показано, что во втором порядке получаются макроскопические уравнения гидродинамики (уравнение неразрывности и уравнение Навье—Стокса). Метод точной разности обеспечивает точные значения (для однородных начальных состояний) даже при конечном шаге по времени. Показано, что у известных предыдущих способах учета действия объемных сил правильными являются только члены первого порядка по  $\Delta \mathbf{u}$ , что приводит к несоответствию не только микроскопических функций распределения, но и к ошибкам в расчетных значениях макроскопических величин (плотности  $\rho$ , скорости  $\mathbf{u}$ , энергии).

### **§ 1. Введение**

Можно проследить историю развития основных дискретных моделей жидкостей (рис. 1). Примерно в 1960 г. был предложен метод молекулярной динамики, в котором среда описывалась как ансамбль молекул,двигающихся по законам ньютоновской механики и взаимодействующих друг с другом согласно заданным потенциалам межмолекулярного взаимодействия [1]. Однако, описать этим методом поведение даже сравнительно небольшого макроскопического объема сплошной среды с характерным размером

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-02-16474).

порядка миллиметра невозможно из-за чрезвычайно большого количества молекул.

В 1973 г. была предложена идея метода решеточных газов (Lattice Gas Automata — LGA) [2], который можно рассматривать как предельно упрощенный метод молекулярной динамики. В узлах двухмерной решетки «живут» частицы единичной массы, которым разрешено иметь единичную скорость, направленную вдоль одного из ребер решетки. В каждом из этих направлений может двигаться только одна из частиц, находящихся в этом узле решетки. За один шаг по времени все движущиеся частицы перелетают в соседние узлы, где сталкиваются друг с другом с учетом законов сохранения импульса и массы по некоторым заданным правилам соударений. Однако первый вариант метода LGA на двумерной квадратной решетке был слишком упрощенным и имел много недостатков, в частности, в нем получалось неправильное выражение для тензора потока импульса (неизотропность). Однако уже в следующем варианте метода [3] эта проблема была преодолена при использовании для двумерного случая треугольной решетки. Большой вклад в развитие метода внес Вольфрам [4], который исследовал возможные минимальные наборы скоростей частиц, для которых выполняется требование изотропности.

Одним из недостатков метода решеточных газов является достаточно сильный стохастический шум, в результате чего приходится усреднять величины по локальной области пространства, по времени, а иногда и по ансамблям реализаций.

Метод решеточного уравнение Больцмана (Lattice Boltzmann equation — LBE) возник в 1988–1989 гг. [5, 6] как развитие метода решеточных газов именно с целью устранить этот случайный шум. Для этого было введено понятие заселенности, т. е. концентрации частиц в узлах, летящих с заданным направлением скорости. Вместо целых чисел для заселенностей в методе LBE используются вещественные числа.

С другой стороны, развивались подходы к численному решению кинетического уравнения Больцмана, впервые написанного в 1872 г. В 1989 г. была доказана теорема существования решения уравнения Больцмана в целом [7]. Для прямого численного решения кинетического уравнения Больцмана в фазовом пространстве (координат и скоростей) даже для двумерного случая требуется численно решать задачу в четырехмерном пространстве  $(x, y, v_x, v_y)$ . В 1964 г. Бродвелл [8, 9] для описания гидродинамических течений предложил использовать дискретный набор скоростей частиц (кинетические уравнения Больцмана с дискретными скоростями). Это приближение может быть обосновано тем, что на гидродинамическом этапе эволюции динамических систем частиц, когда время больше времени свободного пробега, в малых объемах устанавливается локальное равновесие, и даже знание одночастичной функции распределения излишне. В этом случае достаточно знать ее несколько первых моментов (Боголюбов) [10, 11] и поэтому можно ограничиться простой модельной системой с дискретным набором скоростей частиц, для которой значения моментов согласованы с гидродинамическими величинами.



Рис. 1. Развитие дискретных моделей жидкостей

нами: плотностью, импульсом, энергией. Поведение таких модельных систем подробно исследовали Вольфрам, а также Годунов и Султангазин [4, 12].

В 1997 г. метод решеточных уравнений Больцмана был выведен Хе, Люо [13] и независимо Абе [14] другим способом — непосредственно из кинетических уравнений Больцмана с дискретными скоростями.

Метод решеточных уравнений Больцмана широко применяется при компьютерном моделировании сложных течений жидкости, включая многофазные и многокомпонентные. Преимуществами метода LBE являются простота алгоритма, возможность параллельных вычислений, а также легкая реализация сложных граничных условий. Обоснованием метода LBE является тот факт, что при разложении Чепмена–Энскога этих уравнений получаются соответствующие макроскопические уравнения гидродинамики (уравнение неразрывности и уравнение Навье–Стокса) (рис. 1).

Во многих задачах, течения жидкости происходят при наличии объемных сил (например, электрогидродинамические течения) [15, 16]. Во всех вариантах метода LBE, законы сохранения массы и импульса выполняются точно благодаря соответствующему выбору равновесных функций распределения. Тем не менее, все известные методы учета действия объемных сил [17–22] справедливы только в первом порядке по  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}\Delta t/\rho$ , что приводит к неправильным значениям одночастичных функций распределения. Здесь  $\Delta \mathbf{u}$  — изменение скорости в узле за шаг по времени  $\Delta t$ . Это обстоятельство очень важно даже для изотермических моделей LBE, для которых уравнение энергии не рассматривается вообще. Действительно, в этом случае в области, где действовала объемная сила, внутренняя энергия, соответствующая степени свободы в направлении действия силы, не соответствует температуре, которая для изотермических моделей LBE должна быть точно равна  $\theta = 1/3$ . Ошибка во внутренней энергии (температуре) приводит к изменению плотности (или давления) в области, где ранее действовали объемные силы. Это объясняется тем, что эти три величины связаны между собой через уравнение состояния. Следовательно, с физической точки зрения, очень важно учитывать действие силы во всех вариантах метода LBE корректно, чтобы гарантировать точное сохранение энергии даже для изотермических моделей LBE.

В данной работе предложен новый способ учета действия объемных сил в методе решеточного уравнения Больцмана (LBE). Действие силового поля включено в метод LBE, используя разность равновесных функций распределения. Новый метод универсален и справедлив для любых решеток, используемых в моделях LBE, и для любой размерности пространства. Кроме того, в этом методе значения работы объемной силы, изменения полной энергии и изменения внутренней энергии являются точными. Правильный учет действия объемных сил в методе LBE чрезвычайно важен для моделей LBE с температурой, а также для многофазных и многокомпонентных систем.

## § 2. LBE модель

В LBE методе в качестве переменных используются одночастичные функции распределения  $N_k$ . В отсутствие объемных сил, уравнение эволюции имеет вид

$$N_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = N_k(\mathbf{x}, t) + \Omega_k(N(\mathbf{x}, t)). \quad (1)$$

Здесь первые два члена соответствуют конвективному переносу, а второй член в правой части  $\Omega_k$  является оператором столкновений,  $\mathbf{c}_k$  — скорости частиц,  $\Delta t$  — шаг по времени (векторы решетки  $\mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k \Delta t$ ). Плотность жидкости  $\rho$  и скорость  $\mathbf{u}$  в узле могут быть рассчитаны как моменты функций распределения  $\rho = \sum_{k=0}^b N_k$  и  $\rho \mathbf{u} = \sum_{k=0}^b \mathbf{c}_k N_k$ . Оператор столкновений обычно используется в виде BGK (Bhatnagar–Gross–Krook):  $\Omega_k(N) = (N_k^{eq} - N_k)/\tau$ , что представляет собой просто релаксацию к локальному равновесию [23].

Равновесная функция распределения Максвелла–Больцмана по скоростям молекул имеет вид

$$f^{eq}(\mathbf{u}) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})^2}{2\theta}\right). \quad (2)$$

Здесь  $\boldsymbol{\xi}$  — микроскопическая скорость,  $\theta = kT/m$  — нормированная температура, а  $D$  — размерность пространства. Отметим, что это распределение по скоростям частиц справедливо не только для разреженных газов, но и для жидкостей [24].

Для изотермических моделей LBE разложение равновесных функций распределения по степеням  $\mathbf{u}$  зависит от плотности и скорости как

$$N_k^{eq}(\mathbf{u}) = \rho w_k \left(1 + \frac{\mathbf{c}_k \mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2\theta}\right). \quad (3)$$

Векторы  $\mathbf{c}_k$ , и коэффициенты  $w_k$  зависят от выбранной пространственной решетки. Решетка должна быть достаточно симметричной, чтобы обеспечить изотропность соответствующих тензоров четвертого и шестого ранга [4, 25]. В любом конкретном варианте метода LBE, главная часть тензора потока импульса должна иметь вид

$$\Pi_{ij}^{(0)} = \sum_{k=0}^b c_{ki} c_{kj} N_k^{eq} = p \delta_{ij} + \rho u_i u_j, \quad (4)$$

где  $p$  — давление,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Для двумерной модели D2Q9 с 9 возможными векторами скорости ( $|\mathbf{c}_k| = 0, 1$  или  $\sqrt{2}$ ) на квадратной решетке (рис. 2б) [26], коэффициенты равны  $w_0 = 4/9$ ,  $w_{1-4} = 1/9$ , и  $w_{5-8} = 1/36$ . Использовалась также одномерная модель D1Q3 (рис. 2а) с тремя значениями скорости  $\mathbf{c}_k = -1, 0$ , и  $+1$  ( $w_0 = 2/3$ ,  $w_{1,2} = 1/6$ ). Для обеих моделей соответствующее значение безразмерной температуры  $\theta = 1/3$ . Безразмерное время релаксации  $\tau$  определяет кинематическую вязкость  $\nu = \theta(\tau - 1/2)h^2/\Delta t$ . Метод устойчив при  $1/2 < \tau < \infty$ , что соответствует  $\nu > 0$ .

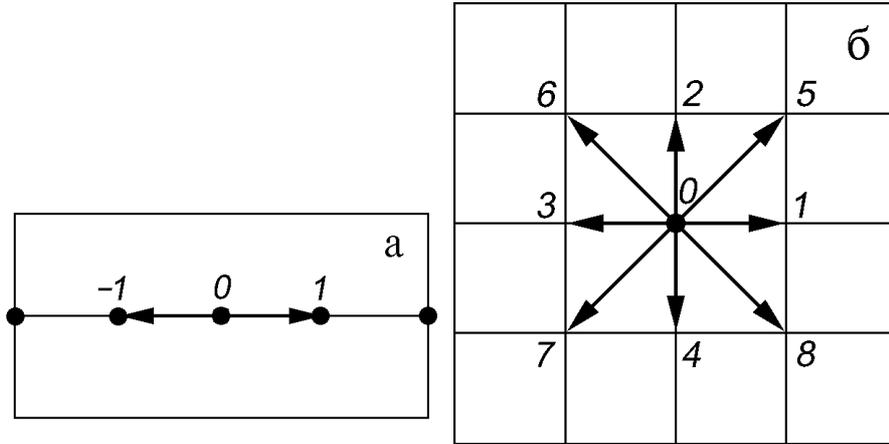


Рис. 2. Геометрия решетки и возможные вектора скорости для одномерной модели LBE (D1Q3) и для двумерной модели D2Q9.

### § 3. Действие объемных сил

За шаг по времени, сила изменяет импульс жидкости в узле на величину  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\Delta t$ . Соответствующее изменение скорости равно  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}\Delta t/\rho$ .

Рассмотрим однородное течение жидкости с плотностью  $\rho$  и скоростью  $\mathbf{u}$ , для которого функция распределения по скоростям частиц является равновесной (2). Можно показать, что после действия короткого импульса однородного поля  $\mathbf{F}$ , течение остается однородным, а распределение по скоростям будет просто сдвинуто на величину  $\Delta \mathbf{u}$ , оставаясь при этом равновесным (рис. 3), но с новым значением средней скорости  $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$ . Для метода LBE это означает, что величины  $N_k(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  должны стать равными  $N_k^{eq}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$ , если первоначально функции распределения были равновесными  $N_k(\mathbf{x}, t) = N_k^{eq}(\mathbf{u})$  и соответствовали значению скорости  $\mathbf{u}$ .

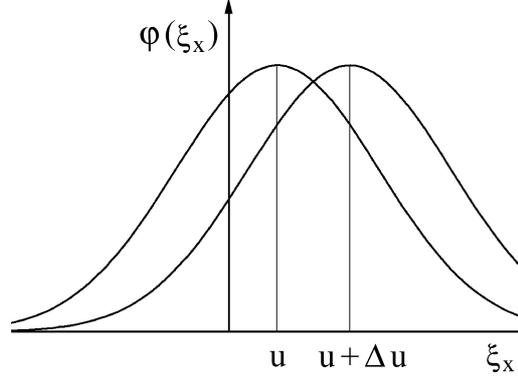
#### § 3.1. Метод точной разности для непрерывного уравнения Больцмана

Кинетическое уравнение Больцмана с интегралом столкновений  $\Omega$  имеет следующий вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \nabla f + \mathbf{a} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} f = \Omega, \quad (5)$$

где  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$  — одночастичная функция распределения в фазовом пространстве  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ , а вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)/\rho$  — ускорение из-за действия сил.

До настоящего времени неясно, как вычислить член  $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f$  для неравновесной функции распределения, чтобы можно было провести его дискретизацию в пространстве скоростей для последующего использования в методе LBE. Однако, имея в виду, что главной частью функции распределения  $f$  в методе возмущений является  $f^{eq}$ , можно прибли-


 Рис. 3. Распределение Максвелла по проекции скорости  $\xi_x$ .

женно записать  $\nabla_{\xi} f \approx \nabla_{\xi} f^{eq}$ . На основе этого приближения в [19] была получена явная формула

$$\mathbf{a} \nabla_{\xi} f^{eq} = -\frac{\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})}{\theta} f^{eq}, \quad (6)$$

которую было предложено использовать для учета действия объемных сил.

С другой стороны, автору настоящей работы удалось заметить [27], что имеет место соотношение  $\nabla_{\xi} f^{eq} = -\nabla_{\mathbf{u}} f^{eq}$ , которое справедливо для любой равновесной функции распределения (включая равновесную функцию распределения (2) Максвелла–Больцмана), так она должна зависеть только от разности  $(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})$ , чтобы была обеспечена Галилеевская инвариантность. Полная производная (при постоянной плотности  $\rho$ ) в системе отсчета, которая перемещается вместе с жидкостью,  $df^{eq}(\mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t))/dt = \nabla_{\mathbf{u}} f^{eq} \cdot (\partial \mathbf{u}/\partial t + \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}/dt)$  равна изменению функции распределения под действием силы:  $\mathbf{a} \nabla_{\mathbf{u}} f^{eq}$ .

Следовательно, непрерывное кинетическое уравнение Больцмана (5) теперь принимает вид [27]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \nabla f - \frac{df^{eq}}{dt} = \Omega. \quad (7)$$

Здесь член, учитывающий действие объемной силы  $df^{eq}/dt$ , записан как полная производная вдоль лагранжевой координаты при постоянной плотности  $\rho$ . Эта форма кинетического уравнения Больцмана более предпочтительна, чем приближение (6), потому что она точно преобразует равновесные функции распределения к равновесным после действия силы. В этом частном случае, оператор столкновений  $\Omega = 0$ , так как распределение по скоростям остается равновесным.

Поскольку изменение скорости за время  $\Delta t$  равно  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{a} \Delta t$ , получаем

$$\mathbf{a} \nabla_{\xi} f \Delta t = -(f^{eq}(\rho, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - f^{eq}(\rho, \mathbf{u})). \quad (8)$$

Здесь обратим внимание, что последнее выражение является точным даже для конечного изменения скорости  $\Delta \mathbf{u}$ , если распределение было локально равновесным перед действием силы.

Таким образом, предложенный способ можно назвать методом точной разности (МТР) для непрерывного уравнения Больцмана.

### § 3.2. Метод точной разности для LBE

После дискретизации непрерывного уравнения Больцмана (7) в пространстве скоростей, аналогично тому, как это сделано в [13, 14, 20, 21], мы получаем метод точной разности для моделей LBE в виде

$$N_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = N_k(\mathbf{x}, t) + (N_k^{eq}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) - N_k(\mathbf{x}, t))/\tau + \Delta N_k. \quad (9)$$

Здесь изменения функций распределения  $\Delta N_k$  под действием силы равны разности равновесных функций распределения при постоянной плотности  $\rho$

$$\Delta N_k = N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}). \quad (10)$$

Если первоначально  $N_k(\mathbf{x}, t) = N_k^{eq}(\mathbf{u}_0)$ , то при использовании описанного способа, мы получаем желаемый результат  $N_k(\mathbf{x}, t + \Delta t) = N_k^{eq}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u})$ . Это означает, что, действительно, функция распределения в локальной области пространства просто сдвигается на величину  $\Delta \mathbf{u}$  под действием объемной силы, оставаясь равновесной. Отметим, что это справедливо для любых значений  $\tau > 1/2$ .

Таким образом, нами предложен новый способ учета действия объемной силы в методе LBE, при котором равновесные функции распределения остаются точно равновесными после действия однородного поля сил, несмотря на то, что метод LBE является дискретным методом. То есть, действие объемной силы учитывается точно. Таким образом, мы получили метод точной разности для моделей LBE.

Более того, так как этот метод справедлив для непрерывного уравнения Больцмана для произвольной формы интеграла столкновений, наш метод (9) и (10), предложенный для моделей LBE, справедлив не только для оператора столкновений с единственным временем релаксации (BGK), но также и для операторов столкновений произвольного вида.

Можно тождественно переписать уравнения (9) и (10) в другом виде. Пусть учет действия объемной силы происходит перед выполнением оператора столкновений

$$N_k^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) = N_k(\mathbf{x}, t) + \Delta N_k. \quad (11)$$

После чего, действие оператора столкновений вычисляется обычным образом:

$$N_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = N_k^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) + (N_k^{eq}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - N_k^*(\mathbf{x}, t + \Delta t))/\tau. \quad (12)$$

Концептуально, этот подход соответствует методу расщепления по физическим процессам [28], который широко используется для конечно-разностных уравнений. В такой форме записи, действие оператора столкновений на функции распределения происходит после учета воздействия объемной силы. Это свойство коммутативности указывает на то, что предложенный способ (МТР) имеет второй порядок точности по времени [29].

В [30, 31] было показано, что метод ЛВЕ (1) имеет точность второго порядка как по пространству так и по времени из-за специального вида ошибок дискретизации. Следовательно, очень важно, чтобы наш способ учета действия объемной силы в методе ЛВЕ имел также второй порядок точности по времени.

Для конкретного вида равновесных функций распределения (3), выражение для действия объемной силы (10) может быть записано также в явном виде

$$\Delta N_k = \rho w_k \left( \frac{\mathbf{c}_k - \mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k \mathbf{u})}{\theta^2} \mathbf{c}_k \right) \Delta \mathbf{u} + \rho w_k \left( \frac{(\mathbf{c}_k \Delta \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{2\theta} \right). \quad (13)$$

Вместе с тем, выражение для действия объемной силы в форме (10) более общее и более удобно для численных расчетов.

### § 3.3. Разложение Чепмена–Энскога

Разложение Чепмена–Энскога является общепринятым инструментом для получения макроскопических уравнений гидродинамики, соответствующих конкретному варианту метода ЛВЕ. Было выполнено разложение Чепмена–Энскога для метода ЛВЕ при учете действия объемных сил по методу точной разности (10) [27] с целью получить соответствующие макроскопические уравнения гидродинамики.

Используя метод учета действия объемных сил (10) и раскладывая равновесные функции распределения  $N_k^{eq}$  в ряд Тейлора по  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{a} \Delta t = \mathbf{F} \Delta t / \rho$ , получаем

$$\Delta N_k = \mathbf{a} \frac{\partial N_k^{eq}}{\partial \mathbf{u}} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \left( \mathbf{a} \frac{\partial N_k^{eq}}{\partial \mathbf{u}} \right) + O((\Delta \mathbf{u})^3). \quad (14)$$

Используя метод возмущений — разложение функций распределения по малому параметру  $\varepsilon = \Delta t$  (решеточное число Кнудсена)  $N_k = N_k^{(0)} + \varepsilon N_k^{(1)} + \varepsilon^2 N_k^{(2)} + \dots$ , а также представление  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2}$ , мы получаем так называемое мультискэйлинговое разложение Чепмена–Энскога для метода ЛВЕ (9). Использовались общие соотношения для функций распределения  $\sum N_k^{eq} = \rho$ ,  $\sum \mathbf{c}_k N_k^{eq} = \rho \mathbf{u}$ ,  $\sum N_k^{(1)} = 0$ ,  $\sum N_k^{(2)} = 0$  и  $\sum \mathbf{c}_k N_k^{(1)} = 0$ . В первом порядке по параметру  $\varepsilon$  получаем

$$\frac{\partial N_k^{eq}}{\partial t_1} + \mathbf{c}_k \nabla N_k^{eq} = -\frac{N_k^{(1)}}{\tau} + \mathbf{a} \frac{\partial N_k^{eq}}{\partial \mathbf{u}}. \quad (15)$$

Суммируя уравнение (15) по всем возможным направлениям  $\mathbf{c}_k$ , получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (16)$$

Умножая уравнение (15) на вектор  $\mathbf{c}_k$  и суммируя по всем возможным направлениям  $\mathbf{c}_k$ , получаем

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t_1} + \nabla(\Pi_{ij}^{(0)}) = \rho \mathbf{a}, \quad (17)$$

где тензор потока импульса для ряда изотермических моделей ЛВЕ (например, D1Q3 и D2Q9) имеет вид  $\Pi_{ij}^{(0)} = \sum c_{ki} c_{kj} N_k^{eq} = \rho \theta \delta_{ij} + \rho u_i u_j$ , причем  $\theta = 1/3$ . Таким образом, в первом порядке разложения Чепмена–Энскога по параметру  $\varepsilon$  получаются уравнения Эйлера (16) и (17) для изотермического случая.

Во втором порядке разложения Чепмена–Энскога по параметру  $\varepsilon$  с использованием уравнения (15) после некоторых алгебраических вычислений имеем также

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^{eq}}{\partial t_2} + \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \left(\frac{\partial N_k^{(1)}}{\partial t_1} + \mathbf{c}_k \nabla N_k^{(1)}\right) = -\frac{N_k^{(2)}}{\tau} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\mathbf{a} \frac{\partial N_k^{eq}}{\partial \mathbf{u}}\right) - \frac{(\mathbf{c}_k \nabla)}{2} \left(\mathbf{a} \frac{\partial N_k^{eq}}{\partial \mathbf{u}}\right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right) \left(\mathbf{a} \frac{\partial N_k^{eq}}{\partial \mathbf{u}}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Последние члены, пропорциональные вектору  $\mathbf{a}$ , возникают из-за учета действия объемных сил.

Суммируя уравнение (18) по всем возможным направлениям  $\mathbf{c}_k$ , а затем комбинируя его с (16) получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = -\frac{\Delta t}{2} \nabla(\rho \mathbf{a}). \quad (19)$$

Если переопределить вектор скорости  $\tilde{\mathbf{u}}$ , чтобы он соответствовал середине шага по времени  $\Delta t/2$ , как  $\rho \tilde{\mathbf{u}} = \sum \mathbf{c}_k N_k^{eq} + \mathbf{F} \Delta t/2$  [22], то мы получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \tilde{\mathbf{u}}) = 0. \quad (20)$$

Умножая уравнение (18) на вектор  $\mathbf{c}_k$  и суммируя его по всем возможным направлениям  $\mathbf{c}_k$ , а затем, комбинируя его с (17), аналогично получаем уравнение Навье–Стокса для изотермических моделей ЛВЕ, записанное для скорости  $\tilde{\mathbf{u}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla(\tilde{\Pi}^{(0)}) = \rho \mathbf{a} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\right)\right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right) \\ + \left(\tau - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial t_1}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\nu = \theta(\tau - 1/2)h^2/\Delta t$ , а  $\tilde{\Pi}_{ij}^{(0)} = \rho \theta \delta_{ij} + \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j$  — тензор потока импульса, записанный для скорости  $\tilde{\mathbf{u}}$ . При этом использовалось соотношение  $\sum c_{ki} c_{kj} c_{kl} N_k^{eq} = \rho \theta (\delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) u_m$ , справедливое для ряда изотермических моделей ЛВЕ (например, D1Q3 и D2Q9). Таким образом, во втором порядке разложения Чепмена–Энскога по параметру

$\varepsilon$  получается система уравнений Навье–Стокса (20), (21) для изотермических моделей ЛВЕ.

Последние два дополнительных члена в (21) являются известными отклонениями от уравнения Навье–Стокса в разложении Чепмена–Энскога решеточного уравнения Больцмана, которые связаны со сжимаемостью жидкости. Этими членами иногда пренебрегают, чтобы получить варианты метода решеточных уравнений Больцмана для случая почти несжимаемой жидкости [20, 21] или их можно учесть для сжимаемой жидкости в конечно-разностной форме. Никаких дополнительных неправильных членов, связанных с наличием объемных сил, не возникает, в том числе и в случае пространственно неоднородной силы. Это обстоятельство является несомненным достоинством нашего метода точной разности.

### § 3.4. Работа объемной силы

Полная энергия микроскопической системы частиц в узле равна  $E = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \mathbf{c}_k^2 N_k$ . Если справедливо выражение (4) для главной части тензора потока импульса, то для нашего метода (10) изменение полной энергии за шаг по времени под действием силы равно

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^b \mathbf{c}_k^2 \Delta N_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \mathbf{c}_k^2 (N_k^{eq}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - N_k^{eq}(\mathbf{u})) = \rho \mathbf{u} \Delta \mathbf{u} + \rho (\Delta \mathbf{u})^2 / 2. \quad (22)$$

Последнее выражение точно совпадает с выражением для изменения кинетической энергии

$$\Delta E_K = \rho (\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})^2 / 2 - \rho \mathbf{u}^2 / 2 = \rho \mathbf{u} \Delta \mathbf{u} + \rho (\Delta \mathbf{u})^2 / 2 \quad (23)$$

при увеличении скорости на величину  $\Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dt$ .

Полная внутренняя энергия в узле равна

$$E_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^b \mathbf{c}_k^2 N_k - 2\mathbf{u} \sum_{k=0}^b \mathbf{c}_k N_k + \mathbf{u}^2 \sum_{k=0}^b N_k \right). \quad (24)$$

Можно показать, что для нашего метода (10)  $\Delta E_1 = 0$ . Таким образом, работа, совершенная силой точно равна изменению кинетической энергии в узле.

С другой стороны, работу, совершенную микроскопическими силами, действующими на частицы, которые переместились на расстояние  $\mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k \Delta t$ , можно вычислить, используя формулу трапеций

$$\Delta A_k = \mathbf{a} \mathbf{e}_k (N_k(\mathbf{u}) + N_k(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})) / 2. \quad (25)$$

При этом полная работа будет равна  $\sum_{k=0}^b \Delta A_k = \rho \mathbf{u} \Delta \mathbf{u} + \rho (\Delta \mathbf{u})^2 / 2$ , что совпадает с точными выражениями для изменения полной энергии (22), а также для изменения кинетической энергии (23).

### § 3.5. Методы, прямо использующие выражение для явной производной от равновесной функции распределения

В другом классе моделей [19–21] непосредственно используется выражение для действия объемной силы в виде (6), подразумевая, что ее величина не изменяется в течение шага по времени. В этом случае, изменение функции распределения при воздействии короткого импульса силы имеет вид

$$\Delta N_k = \frac{(\mathbf{c}_k - \mathbf{u})\Delta\mathbf{u}}{\theta} N_k^{eq}(\mathbf{u}). \quad (26)$$

Соответственно, в целом ряде методов в решеточном уравнении Больцмана используются разложения этого выражения до нулевого, первого или до второго порядка по скорости  $\mathbf{u}$ . Например, до первого порядка [20]:

$$\Delta N_k = \rho w_k \left( \frac{\mathbf{c}_k - \mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k \mathbf{u})}{\theta^2} \mathbf{c}_k \right) \Delta \mathbf{u}. \quad (27)$$

Этот класс методов можно назвать методом явной производной (МЯП). Чтобы функции распределения остались равновесными после действия поля однородных сил надо, чтобы последнее выражение совпадало с (13). Видно, что разложение (26) до второго порядка по скорости  $\mathbf{u}$  будет еще хуже, так как не будет согласовано с порядком разложения равновесных функций распределения (3).

Главный недостаток этого метода — отсутствие членов второго порядка по  $\Delta\mathbf{u}$ . Это обстоятельство приводит к неправильному значению работы объемной силы. Можно вычислить работу объемной силы, используя метод явной производной (26), для жидкости, которая первоначально находилась в состоянии покоя ( $\mathbf{u} = 0$ ). При этом получаем

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^b (\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k) \Delta N_k = \frac{\rho \Delta \mathbf{u}}{2\theta} \sum_{k=0}^b w_k (\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k) \mathbf{c}_k = 0. \quad (28)$$

Эта работа, а, следовательно, и изменение полной энергии равны нулю, так как для всех решеток, используемых в моделях ЛВЕ, для каждого вектора скорости частиц  $\mathbf{c}_k$ , отличного от нуля, существует вектор скорости  $\mathbf{c}_m = -\mathbf{c}_k$ . Внутренняя энергия жидкости при этом уменьшается. Действительно, этот эффект наблюдался при компьютерном моделировании методом ЛВЕ как для модели D1Q3 так и для девяти-скоростной модели D2Q9, но этот недостаток имеет место для всех вариантов моделей ЛВЕ, в которых используется выражение (26) для учета действия объемных сил.

В [19], уравнение Больцмана (5) с целью дискретизации интегрировалось по времени. Используя формулу (6) и метод трапеций, было получено, что член объемной силы имеет вид

$$\Delta f = \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})}{\theta} f^{eq} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})}{\theta} f^{eq} \Big|_t \right]. \quad (29)$$

Однако, авторами [19] не было получено конечного выражения для метода ЛВЕ, так как не было ясно, что при вычислении этого выражения следует использовать условие  $\rho = \text{const}$ . Нами, после дискретизации (29) в пространстве скоростей, используя равновесные функции распределения в форме (3) и условие  $\rho = \text{const}$ , получено конкретное явное выражение для действия объемной силы для изотермического варианта метода ЛВЕ в форме

$$\Delta N_k = \frac{\mathbf{c}_k - \mathbf{u}}{\theta} N_k^{eq}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} + \rho w_k \left( \frac{(\mathbf{c}_k \Delta \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{2\theta} \right) + O(\mathbf{u}(\Delta \mathbf{u})^2). \quad (30)$$

Если оставить в (30) только члены порядка  $O(\Delta \mathbf{u})$ ,  $O(\mathbf{u}\Delta \mathbf{u})$  и  $O((\Delta \mathbf{u})^2)$ , то получим выражение, точно совпадающее с выражением (13) для метода точной разности. Таким образом, при использовании выражения (29) мы получили в (30) правильный квадратичный член, пропорциональный  $(\Delta \mathbf{u})^2$ , который отсутствует при использовании (26). Однако наличие в (30) остаточных членов высших порядков фактически означает, что при использовании выражения для действия силы в форме (29), добиться точного преобразования равновесных функции распределения в равновесные после действия объемных сил все равно нельзя.

### § 3.6. Метод неопределенных коэффициентов

В [22] было предложено использовать общий вид разложения члена действия объемной силы в степенной ряд по скорости частиц  $\mathbf{c}_k$

$$\Delta N_k = \rho w_k \left( A + \frac{\mathbf{B}\mathbf{c}_k}{\theta} + \frac{\mathbf{C} : (\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k - \mathbf{1}\theta)}{2\theta^2} \right) \Delta t. \quad (31)$$

Неопределенные коэффициенты  $A$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  зависят от величины объемной силы  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{a}$  и были определены как  $A = 0$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{a}$  и  $C_{ij} = a_i u_j + a_j u_i$ , чтобы в результате разложения Чепмена–Энскога получились уравнения неразрывности и Навье–Стокса.

Однако, в этом методе, также как и в методе (26), учитываются только члены первого порядка по  $\Delta \mathbf{u}$  (и, соответственно, первого порядка по импульсу силы  $\mathbf{F}\Delta t$ ). Отсюда ясно, что у метода [22] те же самые недостатки, что и у всех методов явной производной (26). Например, работа силы равна нулю для первоначально покоящейся жидкости. Кроме того, этот метод тоже не может обеспечить условие того, что функции распределения остаются равновесными после действия однородного поля сил на жидкость, первоначально находящуюся в состоянии с равновесными функциями распределения. Оба эти недостатка уже подробно обсуждались.

### § 3.7. Метод модификации оператора столкновений BGK

В работах [17,18] было предложено действие объемных сил учесть путем модификации оператора столкновений BGK в уравнении эволюции:

$$N_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = N_k(\mathbf{x}, t) + (N_k^{eq}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_+) - N_k(\mathbf{u}))/\tau, \quad (32)$$

где  $\Delta \mathbf{u}_+ = \Delta \mathbf{u} \cdot \tau / \Delta t$ .

Используя явный вид равновесных функций распределения (2), для изотермических вариантов метода LBE можно из (32) получить явное выражение для изменения функций распределения под действием сил

$$\Delta N_k = N_k^{eq}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - N_k^{eq}(\mathbf{u}) + \frac{\rho w_k}{2} \left( \frac{(\mathbf{c}_k \Delta \mathbf{u})^2}{\theta^2} - \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{\theta} \right) (\tau - 1). \quad (33)$$

К сожалению, в этом методе учета действия объемных сил последний член в (33), который имеет второй порядок по  $\Delta \mathbf{u}$ , является физически неправильным. Только в частном случае  $\tau = 1$ , когда это слагаемое обращается в нуль, распределение по скоростям остается равновесным после действия объемной силы на жидкость, первоначально находящуюся в состоянии  $N_k = N_k^{eq}$ . Однако при фиксированном значении  $\tau$  отсутствует возможность изменять величину вязкости жидкости  $\nu = 1/6$  (при фиксированных  $\Delta t = 1, h = 1$ ).

## § 4. Тестовые расчеты

Были проведены расчеты одномерных течений, которые возникают в первоначально покоящейся жидкости плотности  $\rho_0 = 1$ . Граничные условия по оси  $x$  были периодическими. Использовалась простейшая одномерная модель D1Q3, чтобы сравнить три метода учета действия объемных сил, упомянутых выше.

Рассмотрим течение, которое возникает под действием короткого импульса ( $\Delta t = 1$ ) однородного поля объемных сил  $\mathbf{F} = 0.2$  на центральную область жидкости между  $x_1 = 11$  и  $x_2 = 30$ . Из-за действия силы центральная область жидкости мгновенно начинает двигаться направо со скоростью  $\Delta \mathbf{u} = 0.2$  (рис. 4а). Следовательно, происходит распад разрывов на левой и на правой границах области, где действовала сила. Около правой границы возникают две ударных волны, а вблизи левой границы возникают две волны разрежения.

Для  $\tau < 1$  как в методе модификации оператора столкновений (32), так и для методов явной производной (27), одночастичные функции распределения  $N_k$  становятся сильно неравновесными после действия объемных сил и начинают осциллировать во времени около точных значений равновесных функций распределения в области действия объемной силы (рис. 4 а,б,в,г). Неправильные значения функций распределения могут

приводить к ошибкам в значениях макроскопических переменных таких, как плотность и скорость (колебания плотности рис. 5а). По мнению автора, это происходит из-за колебаний (отклонений) температуры в тензоре потока импульса (3), которые возникают в свою очередь из-за несоответствия внутренней энергии правильным значениям при использовании метода явной производной (27). Результаты, полученные при использовании метода точной разности, значительно лучше (рис. 5б).

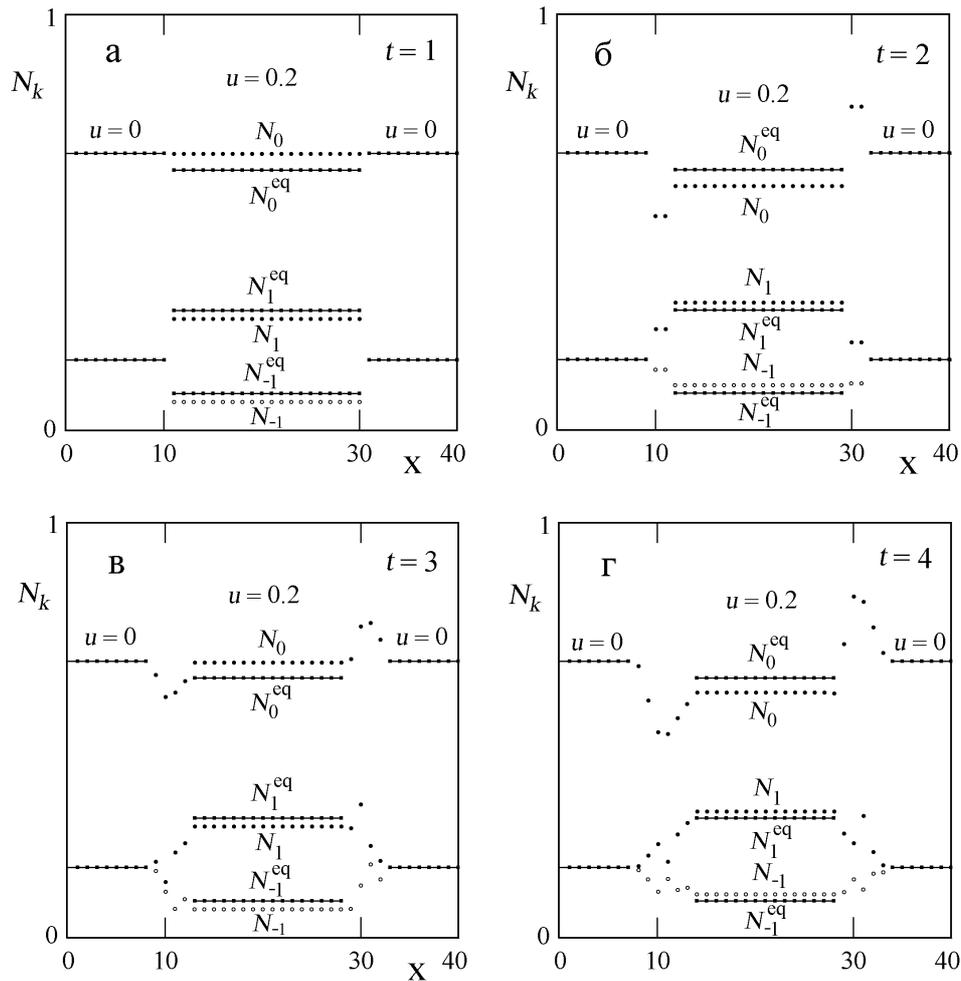


Рис. 4. Значения функций распределения  $N_k$  после действия короткого импульса ( $\Delta t = 1$ ) объемной силы на первоначально покоящуюся жидкость при использовании метода явной производной (27). Сплошные линии точные значения равновесных функций распределения в областях, где течения однородные.  $\tau = 0.51$ .

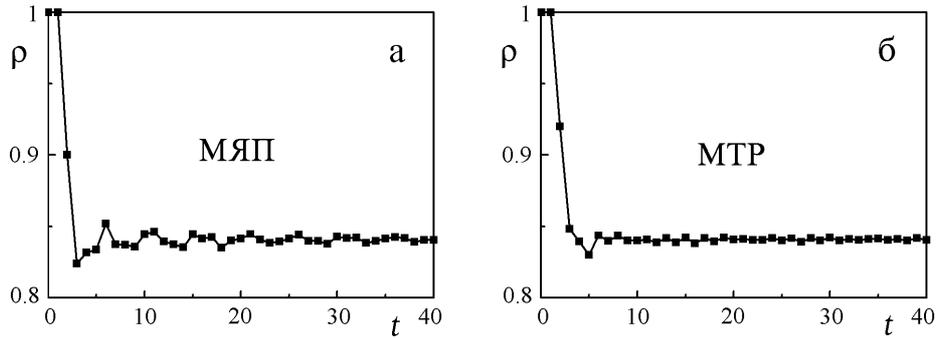


Рис. 5. Плотность на левой контактной границе между волнами разрежения при  $x = 11$ . (а) метод явной производной (27), (б) метод точной разности (10).

Действительно, для  $\tau < 1$  осцилляции функций распределения приводят к осцилляциям полной и внутренней энергий, продолжающимся достаточно долгое время после действия силы (рис. 6а,б).

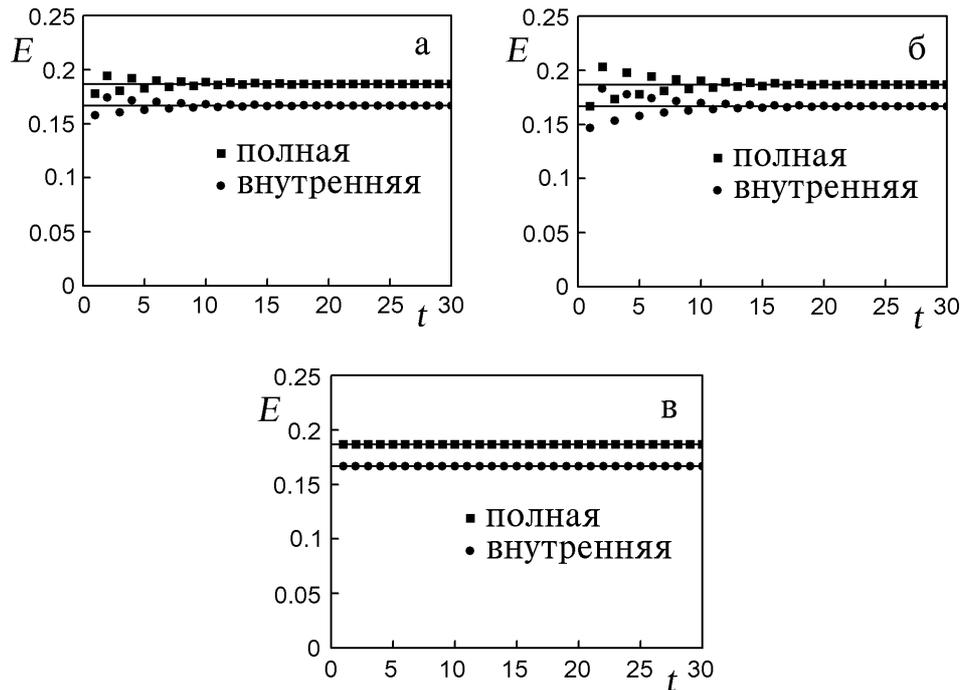


Рис. 6. Зависимость полной и внутренней энергий в узле от времени после действия короткого импульса ( $\Delta t = 1$ ) объемной силы на первоначально покоящуюся жидкость. (а) метод модификации оператора столкновений (32), (б) метод явной производной (27), (в) метод точной разности (10).  $\Delta u = 0.2$ ,  $\tau = 0.55$ .

Для  $\tau > 1$  как в методе модификации оператора столкновений, так и для метода явной производной (27), полная и внутренняя энергии в области, где действовала сила, стремятся к правильным значениям монотонно во времени (рис. 7а,б).

Метод точной разности (10) преобразует все равновесные функции распределения к равновесным значениям и, соответственно, полная и внутренняя энергии остаются все время правильными для любых значений  $\tau$  и, соответственно, для любой вязкости (например, рис. 6в).

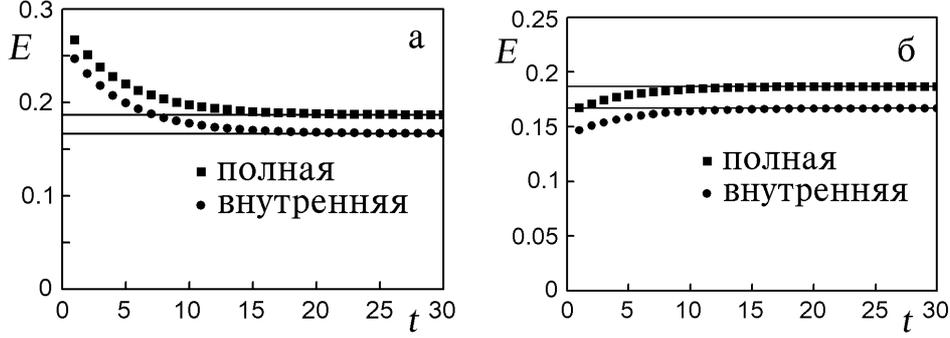


Рис. 7. Зависимость энергии в узле от времени после действия короткого импульса ( $\Delta t = 1$ ) объемной силы на первоначально покоящуюся жидкость. (а) метод модификации оператора столкновений (32), (б) метод явной производной (27).  $\Delta u = 0.2$ ,  $\tau = 5$ .

Если внутренняя энергия не равна ее правильному значению (рис. 6а,б и 7а,б), то значения внутренней энергии поступательной степени свободы в направлении действия силы не соответствуют температуре изотермической модели ЛВЕ, которая должна быть точно равна  $\theta = 1/3$ . Отклонение внутренней энергии приводит к изменению плотности (и/или давления) в области, где ранее действовала сила.

Действительно, рассмотрим одномерное ЭГД течение, которое возникает в первоначально покоящейся жидкости плотности  $\rho_0 = 1$ . По оси  $X$  граничные условия периодические. Электрический заряд был первоначально равномерно распределен в центральной области между  $x_1 = 11$  и  $x_2 = 30$  так, что плотность заряда  $q(x) = q_0$ . Короткий импульс однородного электрического поля действовал в течение временного интервала  $\Delta t = 1$ . Значения электрического поля  $\mathbf{E}$  и плотность заряда  $q_0$  были выбраны так, чтобы собственным электрическим полем заряда можно было бы пренебречь.

Из-за действия силы  $\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$  заряженная область жидкости мгновенно начинает двигаться направо со скоростью  $\Delta \mathbf{u} = q_0 \mathbf{E} / \rho \cdot \Delta t = 0.1$  (рис. 8). Следовательно, происходит распад разрывов на левой и на правой границах заряженной области. Около правой границы возникают две ударных волны, идущие влево и вправо от нее, а вблизи левой границы возникают две волны разрежения. Если заряженная и незаряженная области состоят из одного вещества, то скорости жидкости в окрестности обеих границ должны стать приблизительно равными половине скорости жидкости в заряженной области.

Видно, что для  $\tau \neq 1$  метод модификации оператора столкновений ВГК приводит к совсем неправильным результатам (кривые 1). В частности, плотность в ударных вол-

нах увеличена, а плотность в волнах разрежения уменьшена только справа от границ заряженной области (рис. 8а, кривая 1). Этот эффект возникает из-за того, что внутренняя энергия в области, где действовала сила, больше, чем значение, соответствующее температуре  $\theta = 1/3$ . Соответственно, при том же давлении в этой области плотность вещества значительно меньше правильного значения.

Как уже говорилось, это обусловлено тем, что последний член в (33), который пропорционален  $(\Delta \mathbf{u})^2(\tau - 1)$ , неверный. Напротив, наш метод точной разности (9) и (10) дает удовлетворительные результаты (кривые 2). Заметим, что обе контактные границы двигаются в направлении  $x$  со скоростью  $u_i = 0.05$ . Следовательно, теоретические графики плотности (рис. 8а, кривая 2) и скорости (рис. 8б, кривая 2) в окрестностях контактных границ не должны быть точно симметричны относительно начальных положений поверхностей раздела, а должны быть слегка сдвинуты в момент времени  $t = 3$  направо на величину  $\Delta x \approx 0.15$ , что и наблюдается на рис. 8.

Аналогичные результаты были получены и в численных расчетах по двумерной LBE модели D2Q9.

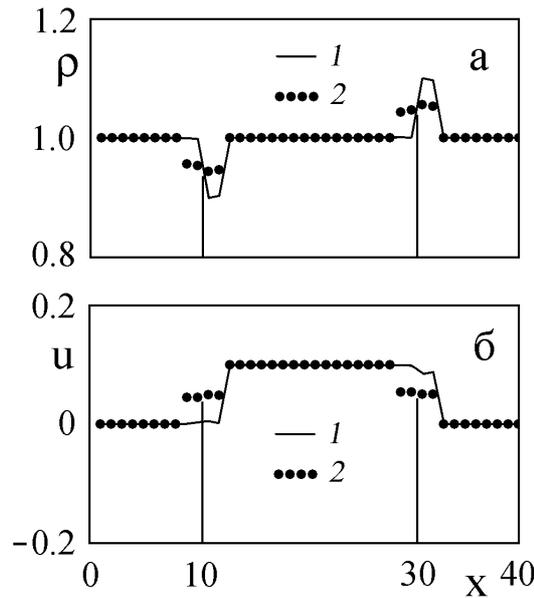


Рис. 8. Распределения (а) плотности и (б) скорости при  $t = 3$  после воздействия короткого импульса электрического поля. 1 — метод модификации оператора столкновений (32), 2 — метод точной разности (10).  $\rho = 1$ ,  $\tau = 10$ ,  $\Delta \mathbf{u} = q_0 \mathbf{E} / \rho \cdot \Delta t = 0.1$ . Модель LBE D1Q3.

Результаты, полученные при использовании полученного нами для изотермической модели приближенного выражения (30), совпадают с результатами, полученными с помощью МТР (10), с высокой точностью. Однако, как уже упоминалось, метод точной разности (10) и проще чем (30) и является не приближенным, а точным.

## § 5. Заключение

Показано, что у всех ранее известных способов учета действия объемных сил в методах ЛВЕ правильными являются только члены первого порядка по  $\Delta \mathbf{u}$ . Поэтому эти методы вполне применимы в случае относительно малых значений объемных сил. Однако заметим, что для ряда импульсных течений жидкости значения  $\Delta \mathbf{u}$  могут быть достаточно большими. Для течений с фазовыми переходами, величины сил и, соответственно, значения  $\Delta \mathbf{u}$  тоже оказываются достаточно большими в тонком переходном слое между разными фазами вещества.

Был предложен новый метод — метод точной разности (МТР), который учитывает действие объемной силы, используя разность равновесных функций распределения (10). Для локально однородного течения, распределение Максвелла просто сдвигается на величину  $\Delta \mathbf{u}$ , оставаясь равновесным. Кроме того, в МТР, уравнения для изменения полной энергии, изменения внутренней энергии и для работы объемной силы являются точными даже для конечного шага по времени  $\Delta t$ . Таким образом, масса, импульс и энергия сохраняются точно даже при наличии объемных сил, хотя метод ЛВЕ и является дискретным. Метод точной разности достаточно прост, и учет действия объемной силы может быть легко включен в любой вариант метода ЛВЕ. В то же самое время, количество арифметических операций сильно не увеличивается. Необходимо только на каждом узле во второй раз вычислить равновесные функции распределения  $N_k^{eq}$ .

Следует подчеркнуть, что наш метод (10) не является каким-либо разложением, а представляет собой принципиально новый общий способ учета действия объемных сил для любых вариантов метода решеточных уравнений Больцмана. Метод точной разности справедлив для любых решеток, обладающих достаточной симметрией, и для любой размерности пространства. Его использование не зависит от конкретной формы (или конкретного разложения) равновесных функций распределения, и поэтому он значительно проще, чем другие методы. Метод может быть успешно использован также и при решении кинетических уравнений Больцмана с конечным набором скоростей, которые не привязаны к конкретной пространственной решетке [32, 33].

Хотя предыдущие методы учета действия объемных сил (метод модификации оператора столкновений, методы явной производной, метод неопределенных коэффициентов) вполне пригодны для моделирования большинства течений жидкости, нет причин использовать их в настоящее время, так как предложенный метод точной разности гораздо проще для использования и в ряде случаев гораздо точнее.

Правильный учет действия объемных сил чрезвычайно важен для всех вариантов метода ЛВЕ, особенно для моделей ЛВЕ с температурой, а также для многофазных и многокомпонентных систем.

Реализована модификация метода ЛВЕ для моделирования электрогидродинамиче-

ских течений с новым способом расчета действия на жидкость электродинамических сил, в котором для учета действия силы используется метод точной разности [27,34,35].

В целом, метод LBE представляется перспективным для расчета задач электрогидродинамики, включая начальную стадию зарождения пробоя в жидких диэлектриках.

### Литература

- [1] *B. J. Alder, T. E. Wainwright*, Studies in molecular dynamics. I, General method, J. Chem. Phys., **31**, (1960), 459.
- [2] *J. Hardy, Y. Pomeau, O. de Pazzis*, Time evolution of a two-dimensional model system. I, Invariant states and time correlation functions, J. Math. Phys., **14**, No 12 (1973), 1746–1759.
- [3] *U. Frisch, B. Hasslacher, Y. Pomeau*, Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation, Phys. Rev. Lett., **56**, No 14 (1986), 1505–1508.
- [4] *S. Wolfram*, Cellular automaton fluids 1: Basic theory, J. Stat. Phys., **45**, No 3/4 (1986), 471–526.
- [5] *G. R. McNamara, G. Zanetti*, Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata, Phys. Rev. Lett., **61**, No 20 (1988), 2332–2335.
- [6] *F. J. Higuera, J. Jiménez*, Boltzmann approach to lattice gas simulations, Europhys. Lett., **9**, No 7 (1989), 663–668.
- [7] *R. J. DiPerna, P.-L. Lions*, On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability, Ann. Math., **130**, No 2 (1989), 321–366.
- [8] *J. E. Broadwell*, Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method, J. Fluid Mech., **19**, (1964), 401–414.
- [9] *J. E. Broadwell*, Shock structure in a simple discrete velocity gas, Phys. Fluids, **7**, (1964), 1243–1247.
- [10] *Н. Н. Боголюбов*, Проблемы динамической теории в статистической физике, М., ОГИЗ, 1946.
- [11] *Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин*, Термодинамика, статистическая физика и кинетика, М., Наука, 1977.
- [12] *С. К. Годунов, У. М. Султангазин*, О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана, Успехи мат. наук, **26**, № 3 (1971), 3–51.
- [13] *X. He, L.-S. Luo*, A priori derivation of the lattice Boltzmann equation, Phys. Rev. E, **55**, No 6 (1997), R6333–R6336.
- [14] *T. Abe*, Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation, J. Comp. Phys., **131**, No 1 (1997), 241–246.
- [15] *D. A. Medvedev, A. L. Kupershtokh*, Use of the Lattice Boltzmann Equation Method to Simulate Charge Transfer and Electrohydrodynamic Phenomena in Dielectric Liq-

- uids, Proc. 2nd Int. Workshop on Electrical Conduction, Convection, and Breakdown in Fluids, Grenoble, France, 2000, 60–63.
- [16] *D. A. Medvedev, A. L. Kupershtokh*, Modeling of electrohydrodynamic flows and microbubbles generation in dielectric liquid by lattice Boltzmann equation method, Proc. 14th Int. Conf. on Dielectric Liquids, IEEE No. 02CH37319, Graz, Austria, 2002, 45–48.
- [17] *X. Shan, H. Chen*, Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components, Phys. Rev. E, **47**, No 3 (1993), 1815–1819.
- [18] *X. Shan, H. Chen*, Simulation of nonideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice Boltzmann equation, Phys. Rev. E, **49**, No 4 (1994), 2941–2948.
- [19] *X. He, X. Shan, G. D. Doolen*, Discrete Boltzmann equation model for nonideal gases, Phys. Rev. E, **57**, No 1 (1998), R13–R16.
- [20] *L.-S. Luo*, Unified theory of lattice Boltzmann models for nonideal gases, Phys. Rev. Lett., **81**, No 8 (1998), 1618–1621.
- [21] *L.-S. Luo*, Theory of the lattice Boltzmann method: Lattice Boltzmann models for nonideal gases, Phys. Rev. E, **62**, No 4 (2000), 4982–4996.
- [22] *A. J. C. Ladd, R. Verberg*, Lattice-Boltzmann simulations of particle-fluid suspension, J. Stat. Phys., **104**, No 5/6 (2001), 1191–1251.
- [23] *P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. K. Krook*, A model for collision process in gases. I, Small amplitude process in charged and neutral one-component system, Phys. Rev., **94**, No 3 (1954), 511–525.
- [24] *Ю. Л. Климонтович*, Статистическая теория открытых систем, М., ТОО «Янус», 1995.
- [25] *Y. Chen, H. Ohashi, M. Akiyama*, Thermal lattice Bhatnagar–Gross–Krook model without nonlinear deviations in macroscopic equations, Phys. Rev. E, **50**, No 4 (1994), 2776–2783.
- [26] *Y. H. Qian, D. d’Humières, P. Lallemand*, Lattice BGK models for Navier — Stokes equation, Europhys. Lett., **17**, No 6 (1992), 479–484.
- [27] *A. L. Kupershtokh*, Calculations of the action of electric forces in the lattice Boltzmann equation method using the difference of equilibrium distribution functions, Материалы 7-й Международ. науч. конф. «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей», Санкт-Петербург, СПбГУ, 2003, 152–155.
- [28] *Н. Н. Яненко*, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, Наука, 1967.
- [29] *Г. И. Марчук*, Методы расщепления, М., Наука, 1988.
- [30] *J. D. Sterling, S. Chen*, Stability analysis of lattice Boltzmann methods, J. Comp. Phys., **123**, No 1 (1996), 196–206.
- [31] *N. Cao, S. Chen, S. Jin, D. Martinez*, Physical symmetry and lattice symmetry in the lattice Boltzmann method, Phys. Rev. E, **55**, No 1 (1997), R21–R24.

- [32] X. He, L.-S. Luo, M. Dembo, Some Progress in Lattice Boltzmann Method. Part I. Nonuniform Mesh Grids, J. Comp. Phys., **129**, No 2 (1996), 357–363.
- [33] G. Peng, H. Xi, C. Duncan, S.-H. Chou, Finite volume scheme for the lattice Boltzmann method on unstructured meshes, Phys. Rev. E, **59**, No 4 (1999), 4675–4682.
- [34] А. Л. Куперштох, Метод решеточного уравнения Больцмана с учетом действия на вещество объемных сил, Тезисы докладов, 4-я школа-семинар «Физика взрыва и применение взрыва в физическом эксперименте», Новосибирск, Институт гидродинамики СО РАН, 2003, 27–29.
- [35] А. Л. Куперштох, Учет действия объемных сил в непрерывном и решеточном уравнениях Больцмана, Материалы 11-й научной школы-семинара «Физика импульсных разрядов в конденсированных средах», Николаев, Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, 2003, 24–27.