

МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

ВВЕДЕНИЕ

КИНЕМАТИКА

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

ВВЕДЕНИЕ

Мы приступаем к изучению физики. Эта обширная и развивающаяся наука не может быть определена кратко, в немногих словах, если мы хотим сохранить сколько-нибудь вразумительности. Поэтому вместо определения мы начнем с приблизительных пояснений. Возможны несколько способов такого предварительного обозначения физики.

В рамках **описательной схемы** можно понимать физику как совокупность основных разделов, которые обыкновенно перечисляют в исторической последовательности:

1. **Механика.**
2. **Теплота и молекулярная физика.**
3. **Электродинамика.**
4. **Волновая физика и строение вещества.**

В таком порядке и будет излагаться данный курс. Разумеется, между разделами нет жестких границ. Движение молекул – это, безусловно, механика¹. Оптика принадлежит и электродинамике, и волновой физике. Многие приемы, развитые для одного раздела физики, впоследствии пригодились для других (пример – теория колебаний).

Наряду с рассмотренной выше классификацией «по разделам» физики можно выделить различные подходы. Безусловно, ключевая роль в физике принадлежит **эксперименту**. Осознание этого восходит к Галилею (1564–1642). Например, вряд ли можно какими-то рассуждениями доказать или вычислить, что есть два рода электрических зарядов (положительные и отрицательные), а вот масса бывает только положительной. Это можно установить только в опыте. В ряде случаев эксперимент давал совершенно неожиданные результаты и стимулировал новое понимание природы. Примерами являются опыт Майкельсона – Морли (опровергнута концепция эфира), и опыт Резерфорда, в котором было открыто атомное ядро.

В то же время физики считают, что физика владеет наиболее солидным **теоретическим** подходом среди всех наук о природе. Среди теоретических достижений упомянем механику Ньютона, электродинамику Максвелла, теорию относительности Эйнштейна, квантовую механику (Планк, Бор, де Бройль, Шредингер, Гейзенберг, Дирак и др.).

¹Хотя классическая механика годится не всегда.

Бывает еще **прикладная** физика. Специалисты в этой области, не претендуя на открытие основ мироздания, пытаются применить уже известное, что-то сконструировать, изобрести и пр. Иногда получается нечто узко практическое, иногда же эти изобретения получаются неожиданными и выходят на первый план в жизни человечества (ядерное оружие, транзисторы, лазеры).

Построение курса

Данный двухгодичный курс физики основан на опыте Новосибирской физико-математической школы (ФМШ, ныне СУНЦ НГУ). Это – первая из специализированных школ, организованная в Новосибирском академгородке М.А. Лаврентьевым. Программы ФМШ/СУНЦ всегда включали существенные расширения по сравнению со стандартными школьными курсами (примером служат начальные сведения из математического анализа). Этим достигалось более полное, логичное и в конечном счете более понятное для учеников изложение физики, в противоположность несколько отрывочному школьному курсу. Практически за два года (вместо пяти в обычной школе) удастся пройти гораздо более полный курс, включающий рассмотрение некоторых достаточно тонких вопросов и многочисленных примеров.

Разумеется, не вся программа ФМШ подходит для использования в более широком масштабе. В данном Интернет-курсе сделаны заметные сокращения. Однако сохранены некоторые разделы повышенного уровня, не обязательные для изучения. Далее такой материал выделен более мелким шрифтом (как в этом абзаце), а при выделении целого параграфа или главы их названия снабжены звездочкой. Предполагается, что такие дополнения могут представлять интерес для отдельных любознательных учеников.

Продолжением введения в физику будут последующие три вводных параграфа. Некоторые термины (как нейтрино, электрон, ядро) ниже будут употребляться без разъяснений, в предположении, что они, хотя бы туманно, известны даже начинающему из общего культурного контекста. Многие определения будут очевидно нестрогими, а разъяснения – неполными, что также извинительно на данной стадии.

Частицы. Поля. Волны. Фундаментальные взаимодействия. Состояния вещества

Еще один способ выделить в окружающем мире физику – это обозначить ее предмет. На некотором уровне можно считать объектами физики частицы и поля.

Частицы для начала мы можем понимать как некоторое обобщение знакомых нам из практики дробинок или крупинок. Частицами являются, например, электроны, протоны, атомы, молекулы и любые агрегаты, состоящие из вышеназванных вещей. Если

размеры агрегата становятся существенными, уже говорят не о частицах, а о телах, и их движение становится предметом механики. В физике важное значение имеют **элементарные частицы**, часто именно они и подразумеваются, когда говорится о частицах «просто». Вначале полагали, что элементарные частицы – это простейшие детали более сложных образований (атом водорода состоит из электрона и протона, а электрон и протон уже на части не делятся). Теперь про части электрона по-прежнему ничего не известно, а протон считается состоящим из «более элементарных» кварков. Тем не менее за протоном сохраняется немалая часть его репутации в отношении «элементарности», поскольку он все же есть деталь атома и поскольку освободить заключенные в нем кварки, по современным представлениям, невозможно.

Опыт показывает, что между частицами существуют взаимодействия, о которых обычно говорят, как о **полях**. Например, Земля создает вокруг себя гравитационное поле, действие которого на нас обеспечивает наше притяжение к Земле или, что то же, силу тяжести. Отталкивание электронов есть проявление электрического поля, как и притяжение электрона и протона. Поля, в противоположность частицам, не локализованы в пространстве, а «размазаны».

На более глубоком уровне, в квантовой физике, разница между частицами и полями размывается. Например, фотон – квант электромагнитного поля – часто называют частицей. Электрон – как бы эталон частицы – можно считать квантом некоторого электронного поля. И фотоны, и электроны подчиняются довольно похожим волновым уравнениям и, значит, имеют волновую природу. Можно сказать, что окружающий нас мир построен из очень мелкошабных волн. Поэтому в физике волновые явления заслуживают гораздо большего внимания по сравнению с механикой, где волны, в общем, довольно частный вид движения.

Известны следующие основные, или фундаментальные, взаимодействия:

1. **гравитационные;**
2. **электромагнитные (+ слабые);**
3. **сильные.**

Гравитационное взаимодействие с соседом по парте существует, но мы его не замечаем. Можно его измерить, используя тонкие и дорогие приборы. Чтобы гравитационное воздействие на нас стало хорошо различимо, нужна огромная масса вещества (Земля). Тяготение удерживает вместе самые крупные скопления вещества – планеты, звезды, галактики.

Электромагнитное взаимодействие сильнее на десятки порядков. Но мы редко наблюдаем его во всей красе. В отличие от гравитационного, электрическое взаимодействие обычно экранировано, почти все заряды компенсированы противоположными зарядами. Поэтому нам и кажется, что электрические силы только и годятся, чтобы поднимать расческой обрывки бумаги. В действительности же атомы сдерживаются вместе именно электрическими силами. Эти же силы обеспечивают прочность тел и их упругость. На них, в основном, и построен окружающий нас мир.

В списке к электромагнитным добавлены слабые взаимодействия. Ими, например, называются некоторые типы радиоактивного распада. Само название намекает на совершенно особую слабость (примером является поразительная проникающая способность нейтрино, которые легко проходят через всю Землю, совсем не замечая вещества). Это совершенно непохоже на электромагнитное взаимодействие. Поэтому большим сюрпризом оказалось установление единой природы слабых и электромагнитных взаимодействий в 80-х годах XX века. Видимое же различие связано с тем, что в человеческой практике слабое взаимодействие действительно очень слабо. Но на очень малых расстояниях (порядка $2 \cdot 10^{-16}$ см) разница двух взаимодействий сглаживается, и они сливаются в единое электрослабое взаимодействие. Подобным образом ранее совсем непохожими выглядели электрическое и магнитное поля, теперь же они рассматриваются как проявления единого электромагнитного поля. Поскольку «электрослабое» объединение произошло недавно, зачастую за слабым взаимодействием по традиции сохраняют статус фундаментального, так что в списке получается четыре вида сил.

Наконец, сильные взаимодействия обеспечивают стабильность атомных ядер (которые электрическое отталкивание протонов стремится разорвать). Поскольку стабильные ядра существуют, на размерах ядра эти взаимодействия гораздо сильнее электромагнитных. Однако они быстрее спадают (на расстоянии $\simeq 10^{-13}$ см). В результате нейтрон, не имеющий электрического заряда, пролетает в плотном веществе несколько сантиметров, пока не попадет в какое-то ядро. Протон, имеющий заряд, тормозится гораздо быстрее.

Частицы объединяются в более крупные образования. Из протонов и нейтронов состоят атомные ядра. Вокруг ядер летают электроны, в числе, равном числу протонов. Число это называют атомным номером. Сейчас известно более 100 элементов (т.е. видов атомов с различными номерами), но примерно начиная с номера 93 ядра становятся настолько неустойчивы, что практически не встречаются в естественном виде, хотя некоторые из них могут быть приготовлены искусственно. Например, элемента 94 (плутония) сделано несколько сотен тонн.

Молекулы – это образования, построенные из атомов (бывают и одноатомные молекулы). Молекулы тоже друг к другу притягиваются, и из них получается плотное вещество. При нагревании устойчивость плотного состояния уменьшается, и возрастает доля молекул, свободно летающих по-одиночке (газовая фаза). Обычно молекулы остаются стабильными при испарении. Например, и жидкая, и газообразная вода состоит из трехатомных молекул H_2O (хотя нередки случаи, когда при испарении вещества получаются самые разные фрагменты). При сравнительно низких температурах жидкости затвердевают. В твердом состоянии, как правило, вещество имеет несколько фаз, или кристаллических модификаций. При достаточно высоких температурах разрушаются молекулы, а затем и атомы. Получается плазма (примеры ее – пламя и звезды).

Пространство и время

Природные объекты находятся в пространстве, а процессы разворачиваются (происходят, идут) во времени. Наше пространство трехмерно (хотя в некоторых теориях

вводятся дополнительные скрытые измерения), а время одномерно (с той же оговоркой). Само по себе пространство в физике считается **однородным и изотропным**. Конечно, в природе бывает неоднородность (на полюсе холодно, на экваторе жарко) и анизотропность (верх-низ), но это действие не самого пространства, а находящихся в нем объектов (Солнца, Земли). Такие представления, сейчас кажущиеся единственно разумными, сформировались не сразу. Сегодняшняя концепция пространства восходит к Евклиду (III век до н.э.) и Ньютону (1687)².

Время также полагают однородным. Это совсем не очевидно: как проверить, меняется ли ход времени «со временем» и чем это проконтролировать, если мы не умеем возвращаться назад? Под однородностью времени понимают нечувствительность ряда процессов к сдвигу по времени: сегодня камень летит так же, как вчера, если обеспечены те же начальные условия.

В древности существовали концепции циклического времени (с возвратами к исходному состоянию), некоторые следы которых остались и в нынешней культурной традиции. Тем не менее, благодаря массовому внедрению в практику часов, возобладала идея линейно-равномерного хода времени. С изотропностью времени сложнее: далеко не все процессы идут назад с тем же успехом, что вперед; само понятие хода времени (как говорят, «стрелы времени») подразумевает необратимость.

И сейчас пространство и время, в массовом сознании образованных людей, ничем не отличаются от «абсолютного» пространства и «абсолютного» времени Ньютона. Однако в XX веке ньютоновские представления подверглись ревизии. В специальной теории относительности пространство и время объединяются, приблизительно как в геометрии компоненты вектора. Оказалось, что ход времени и размеры тел зависят от системы отсчета. Хотя про это все слышали, свободно ориентируется в этих вопросах незначительное меньшинство. Если бы мы умели путешествовать с большими скоростями, порядка скорости света, все давно бы почувствовали относительность на опыте. Например, сейчас каждый, купив билет на самолет, может убедиться, что местное (поясное) время в разных городах разное, а на некоторых рейсах попадаешь в прошлые сутки. Но это не всегда было ясно. Известен случай с экспедицией Магеллана, участники которой знали, что Земля круглая, и поневоле сотни раз должны были определять местное время, но очень удивились, когда в течение кругосветного путешествия «потеряли» один день.

Еще сложнее ситуация в общей теории относительности, где пространство искривлено вблизи тел значительной массы (стало быть, неоднородно), а время течет по-разному в разных местах. Более того, сейчас полагают, что пространство и время возникли вместе с «остальной Вселенной» около 15 миллиардов лет назад (Большой взрыв). С тех пор Вселенная расширяется, что астрономы наблюдают как разбегание галактик. Опять-таки, не имея случая побывать вблизи черных дыр, и в силу краткости нашей жизни, мы не можем привыкнуть к таким явлениям, и они остаются экзотикой, понятной немногим посвященным. Однако ограниченность нашего опыта имеет и положительную сторону. Мы вполне можем, в разумных

²Любопытно, что основные труды обоих авторов кратко назывались «Начала».

пределах, пользоваться ньютоновскими представлениями. Поэтому по большей части будем считать пространство однородным и изотропным, а время – однородным.

Системы единиц и эталоны.

Хорошим примером физического подхода является практика разработки эталонов и систем единиц для измерения физических величин. Мы будем в основном пользоваться системой СГС, в которой основные единицы – сантиметр, грамм и секунда, измеряющие соответственно длину (L), массу (M) и время (T). Единицы любых других величин (как говорят, производные единицы) выражаются с использованием уравнений, связывающих эти величины с основными. Например, уравнение $x = vt$ определяет, что единицей скорости v в СГС будет сантиметр в секунду. Говорят, что **размерность** скорости $[v] = L/T$, или (что считается менее строгим) $[v] = \text{см/с}$. Иногда удобнее система СИ. В рамках механики разница между ними несущественна (смещение десятичной запятой: $0,001 \text{ м} = 0,1 \text{ см}$). Но далее мы увидим, что в СИ больше основных единиц (например, единица тока ампер в СИ основная, а в СГС единица тока производная), в результате чего может отличаться даже вид уравнений в двух этих системах.

Но в любой системе основные единицы надо определять – установить эталоны и процедуры их воспроизведения. Необходимость эталонов ощущалась всегда, но практически унифицировать их удалось не так давно. Приведенный ниже исторический обзор необязательно запоминать. Его цель – продемонстрировать, насколько непростые процедуры лежат в основе сегодняшней физики и техники³.

Когда-то в каждой местности были свои эталоны, вроде длины королевской ступни (foot). Новая эра началась в 1791 г., когда Национальное собрание Франции узаконило **метр** как десятиmillionную часть четверти парижского меридиана. В отличие от многих нововведений Французской революции, эта мера прижилась. После точных обмеров части парижского меридиана между Дюнкерком и Барселоной (около 1/40 меридиана) в 1799 г. был изготовлен эталон метра в виде платиновой концевой меры (линейки; его соответствие нынешнему метру проверить нельзя, так как этот архивный эталон погиб при пожаре). В 1875 г. 17 государств подписали метрическую конвенцию, образовали Международный комитет мер и весов и постоянно действующее Международное бюро мер и весов. Еще ранее от привязки к меридиану решили отказаться⁴ и приняли за эталон архивный образец. К 1889 г. были изготовлены и сертифицированы 30 эталонов метра в виде стержней из платино-иридиевого сплава (90/10) с X-образным поперечным

³Более подробное изложение имеется в издании: Пальчиков Е.И. Введение в технику физического эксперимента. Измерение длины, времени и частоты. Новосибирск: Изд. НГУ, 2001. 112 с.

⁴Если измерять расстояние вдоль земной поверхности, будут сказываться ее неровности. Если же проектировать меридиан на уровень моря, измерения становятся трудно проверяемы. На море и вовсе трудно проводить точные измерения.

сечением. Стержни были изготовлены в Лондоне с использованием уральской платины, а окончательная обработка и обрезка до длины 102 см проведены в Париже. Там же были нанесены поперечные штрихи, расстояние между серединами которых при температуре тающего льда для прототипа №6 и было принято за метр. Точность эталонов составляла 0,2–0,3 мкм. Образцы метра были распределены по жребию, причем Россия получила эталоны №11 и №28. В России метрические меры введены как обязательные постановлением СНК РСФСР от 14 сентября 1918 г., но реально стали обязательными с 1 января 1927 г. Эталон №28 исправно служил до 1960 г.

Хоть эталоны и сделаны весьма прочными, они подвержены износу. Появились к тому же подозрения, что за десятки лет из-за перекристаллизации материала эталоны могли укоротиться в пределах 0,5 мкм. Развитие оптики указало нестареющий и неразрушаемый эталон – длину волны света. С 1927 г. использовался промежуточный эталон («естественный свидетель прототипа метра») – излучение атомов кадмия, причем метр равнялся 1553164,13 длины волны красной линии кадмия. С 1960 г. Генеральная конференция по мерам и весам приняла новое определение метра, основанное на излучении изотопа криптона-86 (переход $2p_{10} - 5d_5$, красная линия): $1 \text{ м} = 1650763,73$ длин волн. Точность воспроизведения этого эталона около 10^{-8} м, или $1/10$ длины волны.

Развитие лазерной техники открыло новые возможности. В 1983 г. Генеральная конференция по мерам и весам приняла определение метра, действующее и сегодня: метр – это расстояние, проходимое светом в вакууме за $1/299792458$ долю секунды. Это определение согласовано с предыдущим в пределах его воспроизводимости. Другими словами, зафиксирована скорость света $c = 299792458$ м/с (целое число), и начиная с 1983 г. бесполезно ее уточнять. По существу, теперь основным эталоном стала секунда, которую можно зафиксировать с лучшей точностью, чем метр по определению 1960 г.

Механические приспособления позволяют измерять длины от 1 мкм до 10 – 100 м. Оптические микроскопы действуют до $\sim 10^{-5}$ см, электронные – до $\sim 10^{-8}$ см – атомных размеров. За этой гранью понятие размера уже не имеет привычного нам смысла за отсутствием четко ограниченных объектов (но понятия пространства и метрики продолжают работать). Размеры атомных ядер $10^{-13} \div 10^{-12}$ см оцениваются по взаимодействию их с быстро летящими частицами. Сейчас полагают, что можно говорить о малых длинах вплоть до планковской 10^{-33} см, вблизи которой, как предполагается, свойства пространства должны резко измениться. Возможно, меньшие размеры вообще не имеют смысла.

Расстояния и координаты на Земле определяют триангуляцией. В последнее время используется спутниковая система глобального позиционирования GPS, имеющая точность порядка 30 метров и определяющая запаздывания сигналов от группы спутников с бортовыми эталонами времени. Расстояния до планет Солнечной системы измеряют радиолокацией, теперь часто с ретрансляцией передатчиками межпланетных зондов. Для ближайших звезд (до сотен световых лет) применяют триангуляцию на базе диа-

метра земной орбиты. В диапазоне до 10^9 световых лет используют фотометрический метод, наблюдая определенный тип переменных звезд (цефеиды, у которых период колебаний яркости и светимость взаимосвязаны). До $\simeq 15 \cdot 10^9$ световых лет (граница видимой Вселенной) используется доплеровский сдвиг частоты света, вызванный разбеганием галактик⁵. Объекты на больших расстояниях, если таковые и есть, принципиально ненаблюдаемы, поэтому измерять такие расстояния не требуется.

Перейдем к измерению времени. Около 1657 г. Гюйгенс построил первые маятниковые часы, и с этих пор можно говорить о точных измерениях в пределах суток. Английский астроном Шорт (1710–1768) изобрел конструкцию маятниковых часов, имевших точность $2 \cdot 10^{-8}$, или 0,6 секунды за год. Эталоном вначале были **средние солнечные сутки**, содержащие 86400 секунд. Именно средние, потому что из-за неравномерности движения Земли по орбите актуальное солнечное время может уклоняться от среднего солнечного на ± 15 минут (уравнение времени). Удобнее наблюдать звезды, движущиеся по небосводу более равномерно, чем Солнце, причем звездный год содержит на одни сутки больше солнечного (366,2422 дня). Астрономические наблюдения (основанные на вращении Земли вокруг оси) были более точными, чем время механических часов. В 1884 г. введено среднее время по Гринвичу (GMT), часовые пояса, международная линия смены дат. С 1904 – 1912 начались передачи сигналов точного времени (Парижская обсерватория, ВМС США, Гринвичская обсерватория). С 1928 г. введено название UT (universal time) для астрономического «звездного» времени. В 1955 г. были предложены три астрономических шкалы: UT0 обозначает непосредственно наблюдаемое звездное время; UT1 – с поправками $\simeq 30$ мс на движение полюса (в результате получается единое время для всех точек Земли); UT2 – это UT1 с поправкой на сезонную неравномерность вращения Земли (также порядка 30 мс). Но даже UT2 не есть физически равномерная шкала, поскольку основана на вращении Земли, подверженном нерегулярности и дрейфу. Поэтому до 1956 г. секунда была непостоянной величиной.

Уточнить секунду позволили астрономические наблюдения многих небесных тел, с привлечением расчетов их движения (**эфемеридные** таблицы). Например, с 1900 г. до 1960 время UT0 отстало от эфемеридного времени ET примерно на 30 секунд. Поэтому в 1956 г. Международный комитет мер и весов зафиксировал в качестве единицы времени эфемеридную секунду, определив ее как $1/31556925,947$ часть тропического года для 1900 г. 0 января в 12 часов эфемеридного времени. Секунда стала постоянной, но трудно воспроизводимой (для требуемой точности нужны были астрономические наблюдения в течение 2 – 3 лет).

Наконец, был принят атомный стандарт времени. Все атомы данного сорта одинаковы, а влияние внешних условий на атомные процессы можно сделать малым. Поэтому можно добиться хорошей воспроизводимости эталона. С 1967 г. 1 секунда есть

⁵По последним данным (2000 г.), постоянная Хаббла составляет 72 ± 8 км/с на мегапарсек (точность около 11%), или 23 км/с на миллион световых лет

9192631770 периодов излучения при переходах между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома ^{133}Cs . Поделив скорость света на это число периодов, найдем длину волны излучения – около 3,26 см. Новая секунда насколько возможно согласована с эфемеридной. Воспроизводимость цезиевого эталона составляла 10^{-11} . Равномерная физическая цезиевая шкала называется IAT (international atom time).

Однако для астрономических наблюдений и навигации по-прежнему удобнее шкала UT1. Поэтому с 1972 г. введена новая шкала времени UTC (universal time coordinated). Секунда в ней – физическая, она же атомная. Но как только между UTC и UT1 накапливается разница 0,7 секунды, UTC исправляется: добавляется или отнимается одна секунда. В результате разница никогда не превышает 0,7 с. Вставка или вырезание секунды производится обычно 31 декабря или 30 июня. Сигналы точного времени привязаны именно к шкале UTC. Поэтому точно поставленные электронные часы могут иногда «уйти» на секунду за самое короткое время.

За 10^{-24} с свет проходит размер атомного ядра, это характерное время быстрой ядерной реакции. За 10^{-19} с свет проходит через атом. Период колебаний видимого света $\sim 10^{-15}$ с. Свет проходит от этого текста к Вашему глазу за наносекунду (10^{-9} с). Характерное время взрыва – микросекунда (10^{-6} с), выстрела – миллисекунда (10^{-3} с). Около 1000 с – время жизни свободного нейтрона. В году с хорошей точностью $\pi \cdot 10^7$ с. Период полураспада ^{14}C , используемого для исторических датировок, 5717 лет. Предок человека появился миллион лет назад, ящеры вымерли 50 – 70 млн лет назад, следы жизни имеют возраст порядка миллиарда лет, древнейшие породы – до 4 млрд лет. Возраст Солнечной системы около 4,7 млрд лет, возраст Вселенной $\simeq 15$ млрд лет. Более ранних событий не предполагается. Пока не ясно, будут ли какие-либо естественные границы для положительных значений времени (вроде момента схлапывания Вселенной в точку), или же времени предстоит «тикать» дальше сколько угодно.

Наконец, **килограмм** вначале (1799) был определен как масса кубического дециметра воды при температуре максимальной плотности 4 °С, т.е. плотность воды в СГС ровно 1 г/см³. Однако архивный килограмм представлял собой более удобный в обращении платиновый цилиндр. Позднее более точные измерения показали, что плотность воды непостоянна, завися, в частности, от изотопного состава; масса же литра воды и систематически отклоняется от архивного эталона. Поэтому одновременно с платино-иридиевыми эталонами метра были изготовлены эталоны килограмма из того же материала в виде цилиндров высотой 39 мм и диаметром 39 мм. Из 43 международных эталонов Россия получила два (№12 и №26). Эти образцы служат и сейчас. Погрешность сличения эталонов не превышает $2 \cdot 10^{-9}$. По современным представлениям, масса эталона не подвержена изменениям со временем, таким как, например, длина. Это и объясняет историческую устойчивость эталона массы.

Глава 1

КИНЕМАТИКА

Кинематика – раздел механики, описывающий движение. Причины, почему движение именно такое, сейчас не рассматриваем. Основная цель – по **частичной** информации о движении определить **полную** информацию.

1.1 Системы отсчета. Координаты

Чтобы описать движение, нужно указывать положение тел. Проще всего это сделать для тел малых размеров. Тела, размерами которых при описании движения можно пренебречь, называют **материальными точками** или **частицами**.

Дело не в самих по себе размерах. Огромную Землю при рассмотрении орбитального движения можно считать точкой, поскольку ее диаметр ($\approx 1,3 \cdot 10^4$ км) мал в сравнении с радиусом орбиты ($\approx 1,5 \cdot 10^8$ км).

Молекула мала по обыденным меркам, но при изучении ее колебаний считать ее точкой, конечно, нельзя. Здесь суть как раз в периодическом изменении ее размеров. Но можно принять за точки ядра атомов, составляющих молекулу, и рассматривать изменение расстояния между ними.

В случае, когда тело недопустимо считать точечным, его подразделяют на малые части, которые с устраивающей нас точностью являются точками. Положение тела известно, когда известны положения каждой из таких составляющих тело частиц.

Ответ на вопрос: «Где?» состоит в указании точки пространства, вблизи которой наблюдается объект, произошло событие. И в любом случае без каких-то ориентиров не обойтись. Два последовательных удара сердца дремлющего пассажира происходят на том же месте относительно самолета и на расстоянии многих десятков метров относительно Земли.

Чтобы избежать неопределенности, одно из тел специально выбирают для указания положения и описания движения других тел и частиц. Его называют **телом отсчета**. Все измерения проводятся от выбранного тела отсчета.

Выбрав тело отсчета, каждой точке пространства можно приписать точный адрес. С телом отсчета связывают **систему координат**, которая служит для указания положения частиц. Наиболее часто применяется декартова система координат, названная по имени французского ученого Р. Декарта (1596–1650).

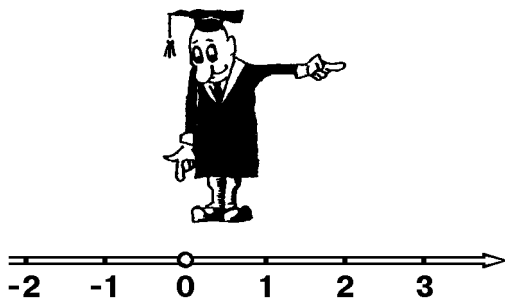


Рис. 1.1.

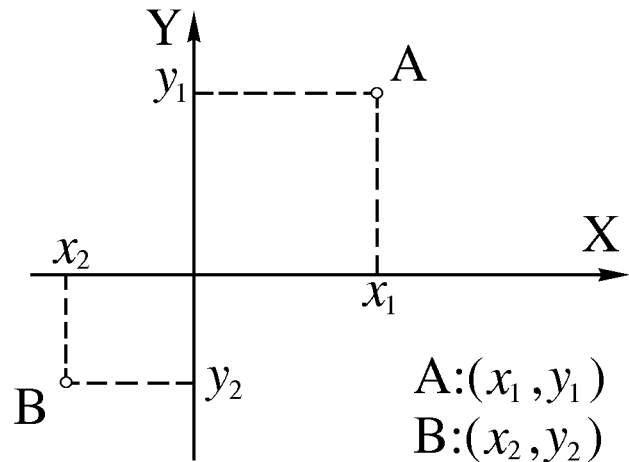


Рис. 1.2.

На прямой определить координаты проще всего. Одна из точек прямой выбирается за **начало отсчета** O . Задается положительное направление на прямой (оси). В положительной части оси **координата** x точки равна ее расстоянию от начала, в отрицательной части – координата равна расстоянию со знаком минус (рис. 1.1).

На плоскости из выбранного начала отсчета O проводятся под прямым углом две **координатные оси** X и Y (рис. 1.2). Из интересующей нас точки опускаются перпендикуляры на оси и прочитываются на них координаты x и y . Координаты точки на плоскости записывают в круглых скобках числами через запятую: (x, y) .

Чтобы по координатам узнать расстояние r от начала отсчета до частицы, применим теорему Пифагора (рис. 1.3):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Убедитесь самостоятельно, что при координатах двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) расстояние между ними

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Отношение координат y/x дает тангенс угла, под которым видна точка из начала отсчета O по отношению к оси X (рис. 1.3):

$$\operatorname{tg}\varphi = y/x.$$

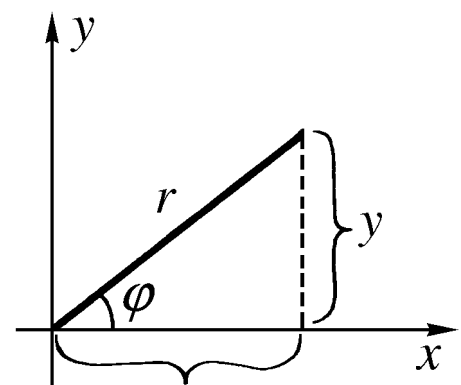


Рис. 1.3.

В пространстве из начала отсчета выходят три взаимно перпендикулярных координатных оси. Две стены и пол комнаты, например, образуют координатные плоскости

ХОУ, YOZ и ZOX. Через точку проводятся три плоскости, перпендикулярные осям. Их пересечения с осями и задают координаты частицы (x, y, z) . Четвертого перпендикуляра к трем осям (как и четвертой координаты) не существует: наше пространство **трехмерно**.

Чтобы по координатам (x, y, z) точки узнать расстояние от точки отсчета, требуется двухкратное применение теоремы Пифагора. Треугольник с катетами x и y , имеет гипотенузу $l = \sqrt{x^2 + y^2}$; затем l и z образуют катеты второго прямоугольного треугольника, чья гипотенуза и есть искомое расстояние

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Расстояние между двумя точками в пространстве определяется формулой:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Декартовы координаты – не единственный удобный способ задать «адрес» точки. На плоскости часто используют **полярные координаты**: r – расстояние до начала отсчета (**полюса**) и φ – угол между направлением на объект и **полярной осью** (рис. 1.3). Угол отсчитывается против часовой стрелки.

Если начало полярных и прямоугольных координат совпадают, а ось X является полярной осью, то нетрудно выразить прямоугольные координаты через полярные:

$$x = r \cos \varphi ; \quad y = r \sin \varphi .$$

Чтобы описать движение, нужно не только задать координаты точки, но и моменты времени, в которые она занимает данные положения. Требуется указать время каждого события. Поэтому тело отсчета и систему пространственных координат следует дополнить системой, определяющей время – часами.

Говорят, что тело отсчета, система координат и часы вместе образуют **систему отсчета**. В системе отсчета есть все необходимое для описания движения.

1.2 Прямолинейное движение. Средняя скорость

Простейшее движение – вдоль прямой. При этом изменяется координата тела x в зависимости от времени t , что записывается кратко в виде:

$$x = x(t) .$$

Правая часть обозначает не умножение, а **функциональную зависимость**. Способы задания такой зависимости возможны разные. Например, в автомобиле может сидеть человек с секундомером, отмечающий координату через каждую минуту или же времена проезда мимо километровых столбов. В результате получится табличное задание

функции, хотя бы такое:

t	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
x	0.0	2.01	3.99	6.03	7.02	8.01

Время t называют аргументом или независимой переменной, а x – функцией или зависимой переменной. Из вида таблицы с тем же успехом можно сказать, что t зависит от x , и такой подход иногда полезен. Но мы чувствуем, что вообще-то время идет само по себе, двигается автомобиль или нет.

Другой способ задания функции – **формула** или **алгоритм**. Наша таблица с хорошей точностью (0.5%) задается такой формулой:

$$x = (\text{если } t \leq 3 \text{ то } 2t \text{ иначе } t + 3). \quad (1.1)$$

В нашем примере отклонения вполне могут быть в пределах ошибок измерения. Кажется, что формула лучше таблицы, так как она позволяет получить координату в дробные моменты времени. Но формул по данным эксперимента можно подобрать сколько угодно. С тем же успехом можно добавить в правую часть (1.1) $\sin(\pi t)$, умноженный на любой коэффициент, от чего значение x в целые моменты времени не изменится. Обычно все же можно считать, что простейшая формула хорошо описывает движение, позволяя распространить наши сведения на все промежуточные моменты.

Возможно и **графическое** задание функции на плоскости (x, t) . Оно полезно не столько само по себе как источник данных (скажем, на ленте самописца), сколько для наглядного изображения функций, заданных двумя первыми способами.

Перейдем к основной задаче кинематики: посмотрим, что еще можно получить из имеющихся данных. Бытовому понятию быстроты движения соответствует скорость v , тоже зависящая от времени:

$$v = v(t).$$

Напомним определение **средней скорости**: на промежутке времени от t_1 до t_2 средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \text{ или } \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \text{ или } \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Средняя скорость – функция двух времен t_1 и t_2 , а точнее, относится ко всему промежутку от t_1 до t_2 :

$$\langle v \rangle = \langle v \rangle(t_1 \dots t_2).$$

Например, на интервале от 2.0 до 3.0 средняя скорость по приведенной таблице равна приблизительно 2, на интервале (3.0 ÷ 5.0) получим 1.0, а между 2.0 и 5.0 $\langle v \rangle = 4/3 = 1.33$ (в единицах таблицы). Заметим, что последняя величина вовсе не равна полусумме скоростей на частях полного интервала $(2+1)/2$. Выражения типа Δx или Δt обозначают не умножение величины Δ на x , а **изменение** этого x (difference –

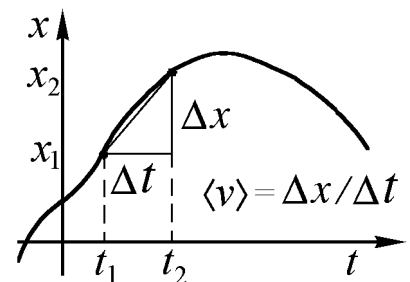


Рис. 1.4.

разность, греческая Δ соответствует d). Геометрически средняя скорость – это тангенс угла между хордой (отрезком, соединяющим точки (x_1, t_1) и (x_2, t_2)) и осью t (рис. 1.4).

1.3 Мгновенная скорость. Производная. Ускорение

Средняя скорость – это не совсем то, что нам хотелось бы получить. Должна существовать скорость в данный момент времени, иначе что показывает спидометр автомобиля? По крайней мере, в нашей бытовой практике (а на самом деле в гораздо более широких рамках) действительно можно ввести **мгновенную** скорость. Но это требует некоторых математических усилий.

Идея проста: чтобы два момента времени, или интервал $t_2 - t_1 = \Delta t$, не запутывали дело, надо этот интервал сделать по возможности малым («мгновением»). Тогда и получится мгновенная скорость, или просто скорость в данный момент. Например, для движения Земли вокруг Солнца малым будет интервал ~ 1 дня.

Если в очередной раз вспомнить таблицу из п. 1.2, то ее данных для нахождения мгновенной скорости явно мало. Необходимо иметь способ дополнения таблицы, чтобы иметь возможность говорить о скорости в данный момент. Для человеческой реакции малым будет промежуток времени в 0.1 сек, и примерно с такой степенью подробности надо иметь данные (для чего нужен какой-то прибор). Тогда средняя скорость, определенная на таких малых интервалах, с достаточной точностью будет отражать «настоящую» скорость. Поскольку интервалы Δt малы, можно относить значение скорости к любому моменту в их пределах. (Интуиция подсказывает, что точнее всего будет отнести скорость к середине интервала).

Когда имеется формула, связывающая x и t , процедура совсем простая:

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Хотя это похоже на (1.2), здесь разница в том, что Δt подразумевается малым. Чтобы подчеркнуть малость интервала, вместо (1.3) пишут более длинное выражение:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right). \quad (1.4)$$

Здесь \lim обозначает предел (сокращенное limit) выражения в скобках. Этот предел берется при Δt , стремящемся к нулю. Вначале надо вычислить координаты x в моменты t и $(t + \Delta t)$, вычесть из позднего раннее (получится перемещение Δx) и поделить на интервал Δt . Пусть, например, известно, что $x = k \cdot t^2$, где k – постоянный коэффициент. Тогда, опуская знак предела везде, кроме последнего равенства, получим

$$v(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{k \cdot (t + \Delta t)^2 - k \cdot t^2}{\Delta t} = \frac{2kt\Delta t + k\Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2kt + k\Delta t).$$

Теперь устремляем Δt к нулю:

$$v(t) = 2kt.$$

Выражение уже не содержит никакого интервала и зависит только от одного времени t . Это и есть мгновенная скорость для данной зависимости $x(t)$. Заметим, что сначала надо вычислить и по возможности упростить выражение, а уж потом переходить к пределу. Если, наоборот, сразу положить $\Delta t = 0$, получится неопределенность $0/0$.

Более компактно мгновенную скорость принято записывать так:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \quad (1.5)$$

Краткое обозначение dx/dt происходит от $\Delta x/\Delta t$, причем подразумевается, что и Δx , и Δt стремятся к нулю. Обозначения dx и dt можно понимать как бесконечно малые изменения координаты и времени. Операция (1.5), или, что то же, (1.4), называется вычислением **производной** $v(t)$ для функции $x(t)$, или **дифференцированием** координаты по времени. Малые приращения dx и dt называют **дифференциалами** (опять от иностранного слова difference).

Геометрически производная dx/dt – это тангенс угла между касательной к непрерывной кривой $x(t)$ и осью t (рис. 1.5), что следует из того, что средняя скорость – тангенс угла наклона хорды (хорда в пределе переходит в касательную).

В физике, как правило, Δt обозначает малое изменение времени. Поэтому мы будем пользоваться на равноправной основе как обозначением dx/dt , так и $\Delta x/\Delta t$.

Смысл этих новых названий в том, что существуют довольно простые **правила дифференцирования**. Вместо того, чтобы каждый раз вычислять пределы, надо только освоить эти правила. Следующий ниже текст не является частью п. 1.3. Это справочник по разделам математики, которые будут попадаться нам на каждом шагу.

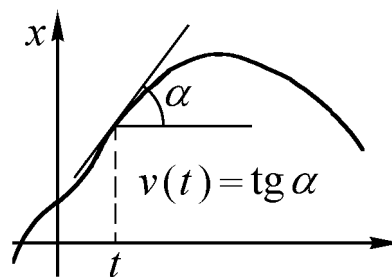


Рис. 1.5.

Математическое дополнение.

Системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 6x + 7y = 5, \\ 2x + 5y = 3. \end{cases}$$

Умножаем первое на 5, второе на 7 и вычитаем из первого второе: $(30 - 14)x + (35 - 35)y = 25 - 21$, откуда $x = 4/16 = 0,25$. Аналогично, умножая первое на 2, а второе на 6, получим $(14 - 30)y = 10 - 18$, $y = 8/16 = 0,5$. Такой метод исключения неизвестных (Гаусса) применим для любого количества уравнений. Если уравнений меньше, чем

неизвестных, то решений обычно бесконечно много. Если наоборот, число уравнений больше числа неизвестных, то решений, как правило, нет.

Квадратное уравнение. Из уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ рекомендуется получить делением на a более простое уравнение $x^2 + px + q = 0$. Решение:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Дискриминанты никакие не нужны. Пример:

$$x^2 - 200000x + 1 = 0; \quad x = 100000 \pm \sqrt{100000^2 - 1}.$$

Попробуйте вычислить это на калькуляторе. При знаке (+) все просто, выйдет $x_1 = 200000$. Но при знаке (-) вычитаются почти одинаковые большие числа с потерей точности. Поэтому второй корень удобнее найти из теоремы Виета: $x_1 \cdot x_2 = q$, откуда $x_2 = 1/200000$.

Тригонометрия. В физике, если специально не указано обратное, угол измеряется

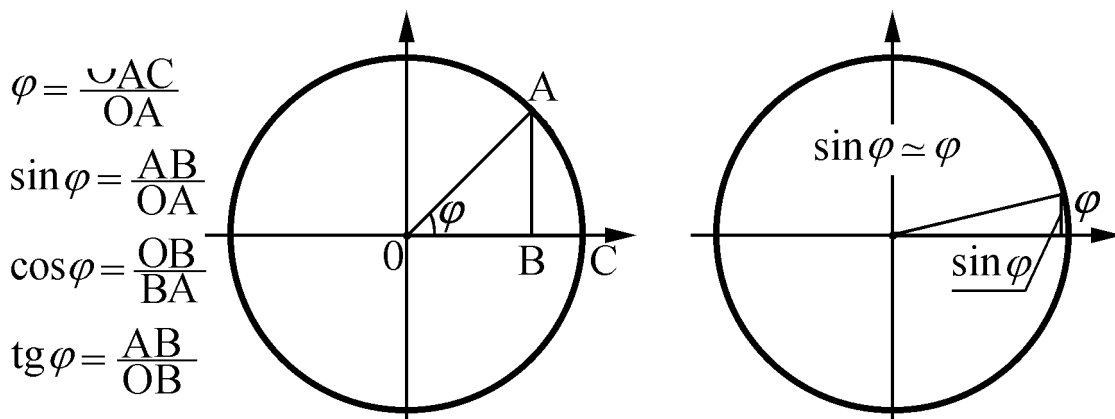


Рис. 1.6.

Рис. 1.7.

в радианах. Величина угла – это длина дуги единичного круга, а для круга любого радиуса – отношение длины дуги к радиусу (рис. 1.6). Полный угол равен 2π , прямой $\pi/2 \approx 1,57$. Для единичного круга вертикальный отрезок – синус, горизонтальный – косинус. Тангенс – это \sin / \cos . Остальные (секанс и т.д.) не нужны. Для малых углов $\sin \varphi \approx \varphi$, что очевидно из рис. 1.7. Менее очевидно, что $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Проверим:

φ	$\sin \varphi$	$1 - \cos \varphi$	$\varphi^2/2$
$0,5234 = \pi/6$	0,5	0,134	0,137
0,2	0,1987	0,01993	0,02
0,1	0,09983	0,004996	0,005

Полезные формулы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta; \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Бином Ньютона.

$$\begin{aligned}(1+x)^1 &= 1 + 1 \cdot x = 1 + 1 \cdot x \\(1+x)^2 &= 1 + 2 \cdot x + x^2 \approx 1 + 2 \cdot x \text{ при малом } x \\(1+x)^3 &= 1 + 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 + x^3 \approx 1 + 3 \cdot x \text{ при малом } x.\end{aligned}$$

Видим, что при малых x можно оставить два слагаемых:

$$(1+x)^n \approx 1 + n \cdot x.$$

Если имеем $(a+b)^n$, где $b \ll a$, выносим a за скобку: $a^n \cdot (1+b/a)^n$. Здесь n не обязательно целое число. Например, $\sqrt{1+x} = (1+x)^{0.5} \approx 1 + x/2$. Отсюда и следует формула для косинуса малого угла: $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \approx 1 - \sin^2 \varphi / 2 \approx 1 - \varphi^2 / 2$.

Производные и дифференцирование. Для функции $x(t)$ производная dx/dt – это отношение

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0$$

(напоминаем). Видно, что от постоянной величины производная равна нулю.

Уже знаем производную от $x = k \cdot t^2$: $dx/dt = 2kt$. Найдем производную от $x = k \cdot t^n$.

$$\left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) = k \cdot \left(\frac{(t + \Delta t)^n - t^n}{\Delta t} \right) = k \cdot t^n \left(\frac{(1 + \Delta t/t)^n - 1}{\Delta t} \right).$$

Применяем бином Ньютона: $(1 + \Delta t/t)^n \approx 1 + n\Delta t/t$, откуда

$$\frac{d(k \cdot t^n)}{dt} = nkt^{n-1}.$$

Очевидно, что если две (любые) функции пропорциональны, то пропорциональны их производные с тем же коэффициентом. Далее коэффициенты опускаем.

Теперь – производная синуса. Пусть $x = \sin(\omega t)$, где ω – это постоянная величина (размерности 1/сек). Находим $dx/dt = [\sin(\omega t + \omega \Delta t) - \sin(\omega t)]/\Delta t$. Из рисунка 1.8 $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin \varphi + \Delta\varphi \cdot \cos \varphi$ при малом $\Delta\varphi$. У нас $\varphi = \omega t$, $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$ и отношение равно $\Delta\varphi \cdot \cos \varphi / \Delta t = \omega \cdot \cos \omega t$:

$$\frac{d(\sin(\omega t))}{dt} = \omega \cdot \cos(\omega t).$$

Аналогично находим производную косинуса:

$$\frac{d(\cos(\omega t))}{dt} = -\omega \cdot \sin(\omega t).$$

Продемонстрируем довольно очевидную вещь: производная от суммы функций равна сумме производных. Из определения :

$$\frac{d(f+g)}{dt} = \frac{f(t+\Delta t) + g(t+\Delta t) - (f(t) + g(t))}{\Delta t} = \frac{(f(t+\Delta t) - f(t)) + (g(t+\Delta t) - g(t))}{\Delta t}.$$

Это явно даст $df/dt + dg/dt$. Сложнее будет производная произведения функций

$$\frac{d(f \cdot g)}{dt} = \frac{f(t + \Delta t) \cdot g(t + \Delta t) - f(t) \cdot g(t)}{\Delta t}$$

(на самом деле, конечно, предел такого отношения). В числитель добавим и вычтем кое-что:

$$\frac{f(t + \Delta t) \cdot g(t + \Delta t) - f(t + \Delta t) \cdot g(t) + f(t + \Delta t) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(t)}{\Delta t}.$$

Это распадается на два выражения:

$$f(t + \Delta t) \cdot \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} + g(t) \cdot \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Дроби – это производные g и f , а множитель $f(t + \Delta t)$ перейдет в $f(t)$. Окончательно

$$\frac{d(fg)}{dt} = f \cdot \frac{dg}{dt} + g \cdot \frac{df}{dt}.$$

Например, от $t \cdot \cos(\omega t)$:

$$\frac{d(t \cos(\omega t))}{dt} = t \cdot (-\omega \sin(\omega t)) + \cos(\omega t) \cdot 1 = \cos(\omega t) - \omega t \cdot \sin(\omega t).$$

Для частного функций аналогично получим

$$\frac{d(f/g)}{dt} = \left(g \cdot \frac{df}{dt} - f \cdot \frac{dg}{dt} \right) \cdot g^{-2}.$$

Например, $\operatorname{tg}(\omega t) = \sin(\omega t) / \cos(\omega t)$,

$$\frac{d(\operatorname{tg}(\omega t))}{dt} = \frac{\cos \cdot \omega \cos - \sin \cdot (-\omega \sin)}{\cos^2} = \frac{\omega}{\cos^2(\omega t)}.$$

Наконец, производная сложной функции:

$$\frac{d(f(g(t)))}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$$

(умножаем и делим на dg). Пример: f – это синус, g – квадрат.

$$\frac{d(f(g(t)))}{dt} = \frac{d(\sin t^2)}{dt} = \frac{d(\sin t^2)}{d(t^2)} \cdot \frac{d(t^2)}{dt} = \cos(t^2) \cdot 2t.$$

Производная возрастающей функции положительна, убывающей – отрицательна. В точках максимума и минимума производная равна нулю.

Пример. Как из квадратного листа сделать коробку максимального объема? Пусть сторона квадрата a , высота коробки x . Объем будет $V = x \cdot (a - 2x)^2$. Производная по вышеприведенным правилам:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= (\text{произведение}) x \cdot \frac{d(a - 2x)^2}{dx} + (a - 2x)^2 \cdot \frac{dx}{dx} = \\ &= x \cdot \frac{d(a^2 - 4ax + x^2)}{dx} + (a - 2x)^2 = \\ &= (\text{сумма}) x \cdot (-4a + 8x) + (a - 2x)^2 = (a - 2x) \cdot (a - 6x). \end{aligned}$$

При максимуме это выражение должно обращаться в нуль. Когда первый множитель равен нулю, это явно не максимум: объем получится нулевой. Следовательно, должно быть $x = a/6$, при этом объем будет $(2/27) \cdot a^3$.

Снова п. 1.3.

Скорость – это производная координаты по времени: $v = dx/dt$. Скорость тоже обычно зависит от времени, и полезна ее производная – **ускорение**:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad \text{или} \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.6)$$

От координаты получается вторая производная (производная от производной). В примере, разобранным на стр. 14, $x = k \cdot t^2$, $v = 2kt \Rightarrow a = 2k$, то есть постоянно.

Приблизительно вторую производную можно выразить через приращения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} - \frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{\Delta^2x}{\Delta t^2}.$$

Здесь через Δ^2x обозначена **вторая разность**, или разность разностей:

$$\Delta^2x = \Delta_+ - \Delta_- = (x(t+\Delta t) - x(t)) - (x(t) - x(t-\Delta t)) \equiv x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t).$$

Второй дифференциал d^2x можно понимать как вторую разность Δ^2x при $\Delta t \rightarrow 0$.

Геометрическое представление второй разности показано на рис. 1.9: Δ^2x есть удвоенное отклонение хорды от кривой в средней точке. Довольно очевидно, что при малых приращениях такими же будут отклонения кривой от средней касательной в крайних точках. Для прямой вторая разность и второй дифференциал обращаются в нуль, то есть ненулевая вторая производная бывает только у **кривой** линии.

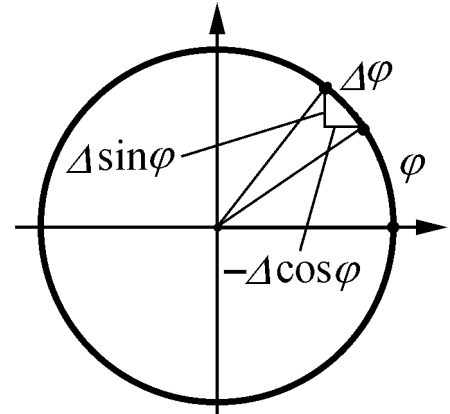


Рис. 1.8.

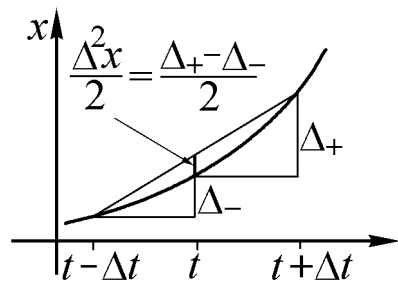


Рис. 1.9.

Аналогично можно было бы ввести следующую производную, показывающую скорость изменения ускорения, и т.д. Но в физике такие высшие производные не нужны (почти никогда). Это большое облегчение, так как ускорение, видимо, это максимально сложная величина, которую мы можем, хотя и с трудом, улавливать визуально.

1.4 Определение пути по скорости и скорости по ускорению

Это обратная задача по сравнению с рассмотренной в п. 1.3. Мы хорошо знаем, как найти путь при постоянной скорости V . За промежуток $t_2 - t_1$ тело пройдет $V \cdot (t_2 - t_1)$. На графике скорости (в данном случае горизонталь) путь выражается площадью под графиком (рис. 1.10).

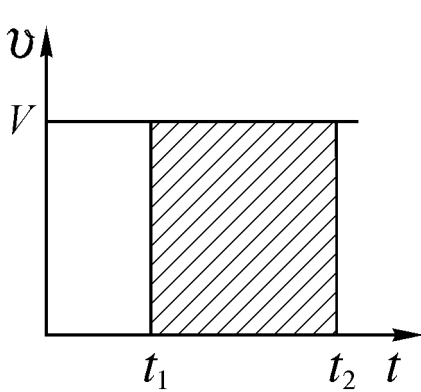


Рис. 1.10.

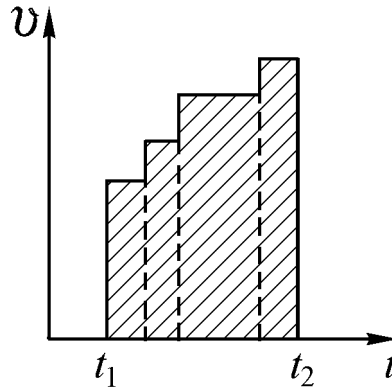


Рис. 1.11.

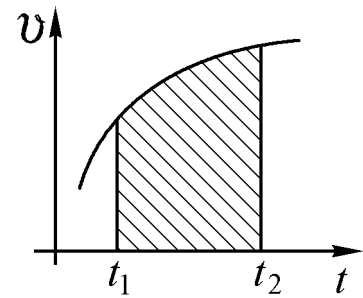


Рис. 1.12.

Если зависимость скорости от времени ступенчатая¹, разбиваем промежуток $(t_2 - t_1)$ на меньшие отрезки $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots$, на которых скорость постоянна. Снова видим (рис. 1.11), что путь будет площадью под графиком скорости, а в виде формулы запишется так:

$$x(t_2) - x(t_1) = v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \cdot \Delta t_2 + \dots = \sum_{j=1}^{j=n} v(t_j) \cdot \Delta t_j .$$

Последнее выражение, хотя и выглядит внушительно, просто сокращенная запись. Например, можно записать, что $t_2 - t_1 = \sum_{j=1}^{j=n} \Delta t_j$, хотя от этого и не видно прямой пользы.

Если теперь $v(t)$ произвольная функция времени, не имеющая постоянных участков, то достаточно разбить интервал $(t_2 - t_1)$ на такое большое число малых частей Δt , что в их пределах с достаточной точностью можно считать v постоянной. Путь опять выразится такой же формулой

$$x(t_2) - x(t_1) = v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \cdot \Delta t_2 + \dots = \sum_{j=1}^{j=n} v(t_j) \cdot \Delta t_j \quad (1.7)$$

с той разницей, что число интервалов n очень велико, а сами интервалы достаточно малы. Геометрически получится площадь ступенчатой фигуры, которая при малых Δt_j практически равна площади под кривой $v(t)$ (рис. 1.12).

¹На самом деле скачки скорости невозможны, но могут быть довольно резкие изменения скорости, которые приближенно можно рассматривать как скачки.

Находить такие суммы можно многими способами, хотя бы нарисовать график $v(t)$ на миллиметровке и найти площадь прямым подсчетом. Или вырезают график ножницами и взвешивают. Если нужна зависимость $x(t)$, такую операцию придется повторять много раз. Если $v(t_j)$ известно в виде формулы или таблицы, можно найти x прямым вычислением, особенно при нынешней доступности компьютеров. Иногда же удается вычислить $x(t)$ точно.

Пример: $v = a \cdot t$, где ускорение a постоянно. Пусть мы знаем $x(0) = 0$ и хотим найти $x(t)$. Разбиваем участок $0 \div t$ на 10 частей; $\Delta t_j = 0,1t$ и $v(t_j) = 0,1jt \cdot a$. Пишем путь в виде (1.7) :

$$x(t) - x(0) = \sum_{j=1}^{j=10} v(t_j) \cdot \Delta t_j = 0,1ta \cdot 0,1t \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 10) .$$

Такая сумма легко считается в уме, если ниже записать ее же в обратном порядке: $(10+9+8+\dots+1)$. Получим, что удвоенная сумма равна $10 \cdot 11$, так что $x(t) = 0,55 \cdot a \cdot t^2$.

Если 10 частей мало, берем 100: $\Delta t_j = 0,01t$ и $v(t_j) = 0,01jt \cdot a$; $x(t) = 0,01ta \cdot 0,01t \cdot (1+2+3+\dots+100)$. Аналогично находим сумму: $(1+2+3+\dots+100) = 100 \cdot 101 / 2 = 5050$. Отсюда $x(t) = 0,505 \cdot a \cdot t^2$. При 1000 частей $x(t) = 0,5005 \cdot a \cdot t^2$, и т.д. Видно, что при уменьшении отрезков результат будет стремиться к $at^2/2$. Это и есть площадь под кривой – в данном случае треугольник с катетами (at, t) .

Такое длинное вычисление и без того известной величины все же не лишено смысла. Теперь мы можем применить такой же путь к другим зависимостям, для которых площадь нам пока неизвестна. Если не удастся просуммировать в уме, всегда можно сделать это механически – «на руках» или на компьютере. Кроме того, можно оценить погрешность. Видно, что она порядка $\Delta t/t$ или $1/n$.

Пусть теперь $v = k \cdot t^2$. Для 10 интервалов $v(t_j) = 0,01kj^2t^2$, $x(t) = 0,1t \cdot 0,01kt^2 \cdot \underbrace{(1 + 4 + 9 + \dots + 100)}_{385} = 0,385kt^3$. Если взять «нижнюю» сумму $(0+1+4+\dots+81)$, будет $0,285kt^3$. Среднее, более точное, значение, получается $0,335kt^3$. Как мы увидим, совсем точный результат $kt^3/3 \approx 0,333kt^3$.

Для определения скорости по известной координате мы ввели операцию дифференцирования (вычисления производной). Для обратной задачи в математике изобретена и обратная операция – интегрирование. **Определенным интегралом** от функции $v(t)$ на интервале от t_1 до t_2 будет предел нашей суммы:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot dt = \lim \sum v(t_j) \cdot \Delta t_j \text{ при } \Delta t_j \rightarrow 0 .$$

Знак интеграла \int – это стилизованная S и соответствует греческой Σ (такая же связь, как d и Δ). Запись в виде интеграла короче, а считать интегралы удобнее, чем суммы большого числа слагаемых.

Математическое дополнение

Интегрирование. Пусть надо найти $\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot dt$. Допустим, что по виду $f(t)$ мы угадали такую функцию $F(t)$, что $f(t) = dF/dt$ (пример: $F(t) = kt^3/3$, тогда $f(t) = kt^2$). Вспоминаем, что интеграл – это большая сумма:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot dt = \sum f(t_j) \cdot \Delta t_j = \sum \frac{\Delta F_j}{\Delta t_j} \cdot \Delta t_j = \sum \Delta F_j .$$

Сумма всех изменений ΔF_j на участке от t_1 до t_2

$$(F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \dots + (F_n - F_{n-1}) = F_n - F_1 .$$

Здесь $F_1 = F(t_1)$, $F_n = F(t_2)$. Окончательно получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot dt = F(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \equiv F(t_2) - F(t_1) .$$

(формула Ньютона-Лейбница). Вертикальная черта с индексами напоминает, что в функцию $F(t)$ еще нужно подставить пределы.

Видно, что очень выгодно угадать для функции f , которую мы хотим интегрировать, ее **первообразную** F , такую, что $f = dF/dt$. Другое название первообразной – **неопределенный интеграл** (определенным он станет, если подставить пределы). Пишут еще так:

$$\int f(t) \cdot dt = F(t) \quad - \text{это эквивалентно} \quad f = dF/dt .$$

Например, для функции $f(t) = kt^2$ неопределенный интеграл $F(t) = kt^3/3$. С тем же успехом можно добавить к F любую постоянную. Производная от постоянной равна нулю, а в формуле Ньютона-Лейбница эти постоянные вычтутся.

Зная производные некоторых функций, автоматически получаем таблицу неопределенных интегралов от этих производных:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} ; \quad \int \sin x dx = -\cos x ; \quad \int \cos x dx = \sin x ; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x .$$

Производная от левых частей уничтожит знак \int и уберет dx , а в правых частях стоят уже знакомые функции, от которых производные равны подынтегральным выражениям. К сожалению, приходится двигаться задним ходом. Поэтому не приходит сразу в голову интеграл от тангенса ($= \ln(1/\cos x)$) или от $\sin^2 x$ (он равен $x/2 - \sin x \cdot \cos x/2$). Умение интегрировать приходит с опытом. Можно обращаться к таблицам интегралов (например, таблицы Градштейна и Рыжика весят около 3 кг). Надо заметить, что не

всякий интеграл «берется», то есть выражается через элементарные функции. Например, функция $\sin(x^2)$ выглядит довольно просто (тригонометрия и степень), но никакая комбинация школьных функций не может выразить интеграла от нее. В этих случаях специально вводят новые функции или так и оставляют в виде неопределенного интеграла. Заметим, что производная по правилам вычисляется всегда, не требуя введения новых функций. Сейчас имеются компьютерные программы аналитических вычислений (Maple, Mathematica), умеющие «брать» интегралы. Еще раз напомним, что численно любой интеграл считается, как сумма.

Пример. Найдем площадь под кривой $f(x) = \sin x$. Из таблицы

$$\int \sin x dx = -\cos x ; \quad \int_0^x \sin x dx = -\cos x \Big|_0^x = -\cos x - (-\cos 0) = 1 - \cos x .$$

При $x = \pi$ площадь равна 2, при $x = 2\pi$ – нулевая (там, где функция ниже оси, площадь отрицательна, положительные и отрицательные значения синуса компенсируются).

Снова п. 1.4.

Теперь вместо (1.7) мы можем записать

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v(t) dt . \quad (1.8)$$

Точно так же, зная ускорение, находим скорость:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a(t) dt . \quad (1.9)$$

Это и есть окончательные формулы, решающие задачу, поставленную в начале параграфа. В естественной постановке механики известно как раз ускорение; по нему находится скорость, а по скорости – координата. Как видим, нужны еще начальные условия – значения скорости и координаты в исходный момент t_0 . Они зависят не от динамики, а от выбора системы отсчета и начала координат.

1.5 Движение с постоянным ускорением

Ускоряться могут поезда, автомобили... Порой на заметных интервалах времени ускорение практически постоянно. Рассмотрим прямолинейное равноускоренное движение. Для этого важного частного случая неравномерного движения нетрудно найти скорость и положение тела в виде простых формул.

Рассмотрим движение тела, ускоряющегося начиная с момента времени $t = 0$ вдоль заданной прямой. Тело имело начальную скорость v_0 . Постоянное ускорение тела обозначим буквой a . Найдем зависимость скорости от времени. В общем случае, даже для переменного ускорения,

$$v(t) = v_0 + (a_1 \cdot \Delta t_1 + a_2 \cdot \Delta t_2 + \dots + a_n \cdot \Delta t_n).$$

Так как ускорение постоянно, то в сумме все ускорения одинаковы, равны a , и ускорение можно вынести. Сумма же

$$(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n)$$

попросту равна полному времени t . Тогда зависимость скорости частицы от времени определится выражением:

$$v(t) = v_0 + at.$$

То же самое получим, записывая скорость в виде (1.9):

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a dt = v_0 + a \int_0^t dt = v_0 + at.$$

Нарастает скорость в случае, когда ускорение a положительно. Если же $a < 0$, скорость уменьшается со временем, тогда говорят о равнозамедленном движении. В обоих случаях зависимость скорости от времени линейная.

Кроме скорости v , надо задать и начальное положение тела x_0 . Зная скорость и используя (1.8), найдем зависимость координаты от времени:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) dt = x_0 + \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}.$$

Перемещение тела **при равноускоренном движении** можно записать и через среднюю арифметическую начальной и текущей скоростей:

$$S = x(t) - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t.$$

Можно также, используя геометрический способ, найти перемещение как площадь трапеции, основания которой v_0 и $v_0 + at$, а высота t .

Иногда зависимость от времени знать не требуется. Например, тело с ускорением a переместилось на расстояние S , и нас интересует его скорость. Или, зная начальную и конечную скорость, мы хотим найти перемещение. Выразив время движения через скорости: $t = (v - v_0)/a$ и подставив в формулу для S , получаем:

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \quad v^2 = v_0^2 + 2aS.$$

Если $v_0 = 0$, то $v = \sqrt{2aS}$. Для этого же частного случая легко выразить и время: $t = \sqrt{2S/a}$.

Мы получили полное решение задачи о равноускоренном движении:

$$v(t) = v_0 + at ,$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2} .$$

Здесь ускорение входит «с плюсом», но a может быть и отрицательным (при торможении). Однако разных формул для $a > 0$ и для $a < 0$ писать не надо. Если ускорение отрицательно, к скорости, например, будет прибавляться число, меньшее нуля, скорость будет уменьшаться. Общая формула включает оба случая.

Полезно помнить формулы равноускоренного движения, но надо понимать, что они **не всегда пригодны**. Не всякое ускорение постоянно; не всякое неравномерное движение будет равноускоренным. Школьник по пути в школу то бежит вприпрыжку, то плетется еле-еле, а может и вообще остановиться. Ускорение меняется поминутно. Для общего случая неравномерного движения приходится делать расчеты, как это описано в предыдущем параграфе.

Важный случай движения с постоянным ускорением – падение на Землю тел. Из результатов Галилея и более поздних исследований Ньютона (который сбрасывал разные предметы, в том числе сосуды со ртутью, с лондонского собора св. Павла) следует, что при свободном падении ускорение у всех тел одинаково, если можно пренебречь сопротивлением воздуха. Ускорение свободного падения принято обозначать буквой g . Его величина

$$g \approx 9,81 \text{ м/с}^2 .$$

Часто в расчетах это число округляют до 10 м/с^2 . Направлено ускорение свободного падения вертикально вниз.

Например, при падении тела без начальной скорости пройденное им расстояние равно $S = gt^2/2$. За первую секунду падения тело проходит $9,81/2 \approx 5$ м. Проверьте это на опыте!

1.6 Траектория, радиус кривизны, центростремительное ускорение

В пространстве нужны три координаты: x, y, z . Соответственно есть три скорости v_x, v_y, v_z и три ускорения a_x, a_y, a_z вдоль каждой оси координат. Сохраняются такие же равенства: $a_y = dv_y/dt$, $z = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z dt$ и т.д.

Положение точки можно задать и направленным отрезком (вектором). **Радиус-вектор** точки $\mathbf{r}(t) = (x, y, z)$ проводится в точку из начала координат. (Здесь и далее

векторы обозначаются жирными буквами). Три координаты – это **компоненты** вектора (проекции на оси). Разность векторов $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ называется перемещением, см. рис. 1.13 (для случая двух измерений). Скорость \mathbf{v} и ускорение \mathbf{a} тоже векторы, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$.

Движущееся тело описывает некоторую линию в пространстве. Можно сделать эту линию видимой, если тело оставляет за собой след, например, дымовую струю. Подобный след, в основном из мелких капель воды или снежинок, <рисует> на большой высоте реактивный самолет. **Траектория** – это последовательность всех промежуточных положений при движении. Задание $\mathbf{r}(t)$ или $(x, y, z)(t)$ определяет траекторию в **параметрической** форме, причем параметром является время t .

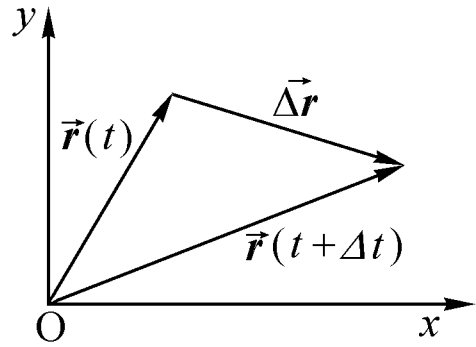


Рис. 1.13.

Иногда время нас не интересует (допустим, надо узнать, заденет ли брошенное тело за препятствие, неважно в какой момент). Тогда, если получится, удобнее явная форма, для плоской кривой в виде $y = y(x)$.

Пример.

$$x = R \cos(\omega t), \quad y = R \sin(\omega t).$$

Это – окружность радиуса R , так как $x^2 + y^2 = R^2$. Траектория описана в параметрической форме. Нетрудно выписать и явную форму: $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$. Неудобство ее в том, что есть две ветви: нижняя и верхняя полуокружности.

Понятие траектории полезно преимущественно для криволинейного движения. Из приведенного примера (окружность – кривизна в чистом виде) находим $v_x = -\omega R \sin(\omega t)$, $v_y = \omega R \cos(\omega t)$. Еще раз дифференцируем: $a_x = -\omega^2 R \cos(\omega t)$, $a_y = -\omega^2 R \sin(\omega t)$. Видно, что вектор ускорения пропорционален радиус-вектору с началом в центре окружности и направлен противоположно (коэффициент равен $-\omega^2$); $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$. Если выразить ускорение через скорость $V = \omega R$, получаем $a_c = V^2/R$. Это известная формула **центростремительного** (значит, направленного к центру) ускорения.

Мы знаем, что гладкая кривая имеет в произвольной точке касательную прямую, наклон которой равен производной dy/dx . Эта прямая в окрестности касания очень близка к кривой. Еще ближе будет проходить касательная окружность, если как следует подобрать ее радиус (называемый **радиусом кривизны** в данной точке). Например, представим параболу $y = bx^2$ в нижней точке окружностью радиуса R : $y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$. При малых x разложим корень по биному: $y \approx R - R(1 - x^2/2R^2) = x^2/2R$. Получаем, что радиус кривизны $R = 1/2b$. Если $b = 1$ (x, y безразмерны), то $R = 1/2$. Проверьте это вычисление построением. Отличие касательной окружности от кривой в окрестности точки касания будет пропорционально x^4 (то есть много меньше,

чем x^2 у касательной прямой).

Кроме центростремительного ускорения, происходящего от изменения направления скорости, еще есть тангенциальное, которое показывает изменение скорости вдоль траектории: $a_\tau = d|V|/dt$. Например, для брошенного тела в исходной точке $a_\tau = -g \sin \alpha$, а в верхней – нулевое. Иногда удобнее раскладывать вектор ускорения на такие подвижные оси – вдоль и поперек кривой, чем на заранее жестко заданные.

1.7 Преобразования Галилея. Сложение скоростей

Как уже говорилось, движение можно описать, когда задана система отсчета. Часто большое удобство представляет переход из одной системы отсчета в другую. Пусть движение частицы полностью описано в некоторой системе отсчета S . Опишем движение той же частицы в системе S' , которая движется относительно первой прямолинейно и равномерно со скоростью \mathbf{V} . Ограничимся случаем, когда системы отсчета ориентированы так, что соответствующие оси (X и X' , Y и Y' , Z и Z') параллельны, в начальный момент времени $t = 0$ начала отсчета совпадают и часы синхронизованы.

Переходя в другую систему отсчета, скажем, садясь в самолет, мы не вносим поправок в показания часов. (Кроме моментов, когда пересекаем часовые пояса. Но это не потому, что время в самолете течет по другому, а потому, что на Земле в разных местах начало суток сдвинуто). Час в самолете – это то же самое, что час на Земле.

При скоростях, сравнимых со скоростью света, промежуток времени, измеренный движущимися часами, отличается от промежутка времени, измеренного неподвижными. Этот вопрос проясняется в теории относительности. Но даже для планет Солнечной системы (их скорости – десятки километров в секунду) поправки оказываются совершенно незначительными.

Итак, в рамках классической механики, при скоростях много меньших скорости света, время в обеих системах отсчета протекает одинаково. Можно сказать, что время «не преобразуется»:

$$t' = t .$$

Возьмем некоторый момент времени t . За это время начало системы S' сместилось относительно начала системы S на вектор $\mathbf{V}t$. Обозначим радиус-вектор частицы в системе S в этот момент через \vec{r} , а в системе S' – через \vec{r}' (рис. 1.14).

Легко видеть, что между тремя введенными векторами имеется простая связь:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \mathbf{V}t .$$

Положение пассажира относительно самолета совсем другое, чем относительно места взлета.

Формулы пересчета координат и времени от одной системы к другой (для времени – просто совпадение) называются **преобразованиями Галилея**.

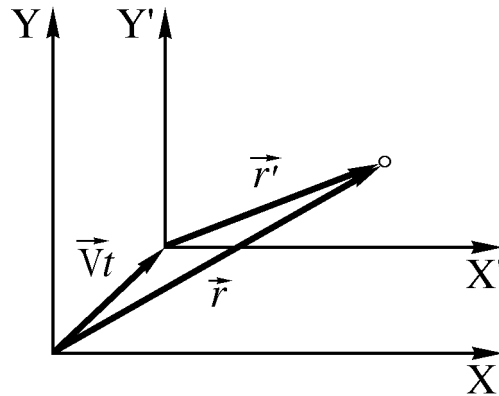


Рис. 1.14.

Они позволяют переходить от описания движения в одной системе отсчета к описанию в другой, движущейся относительно первой с **постоянной** скоростью.

Возьмем промежуток времени Δt . Пусть в системе S за этот промежуток частица переместилась на $\Delta \vec{r}$. Тогда из преобразования радиус-вектора можно записать:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}' + \mathbf{V} \Delta t .$$

Разделив на Δt , получим: $\Delta \vec{r}' / \Delta t = \Delta \mathbf{r}' / \Delta t + \mathbf{V}$ или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} .$$

Эта формула называется **законом сложения скоростей**.

Примеры.

1. Рассмотрим движение тела, брошенного со скоростью V_0 под углом α к горизонту. Начальную скорость тела разложим на горизонтальную $V_x = V_0 \cos \alpha$ и вертикальную $V_y = V_0 \sin \alpha$ составляющие. Для упрощения задачи перейдем в систему отсчета S' , имеющую скорость $V = V_0 \cos \alpha$ в горизонтальном направлении. По формуле сложения скоростей $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}'_0 + \mathbf{V}$. В системе S' начальная скорость тела вертикальна. Как отмечалось в п. 1.5, ускорение тела равно g и направлено вертикально вниз. Поэтому скорость в системе S' останется вертикальной и далее; величина ее $V'_y(t) = V_0 \sin \alpha - gt$. Координата $y' = V_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2$. Переходя в исходную систему отсчета, получим: $V_x(t) = V_0 \cos \alpha$, $V_y(t) = V_0 \sin \alpha - gt$, $x = V_0 \cos \alpha \cdot t$, $y = V_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2$.

Получена траектория тела в параметрической форме. Разумеется, можно было найти эти выражения и без перехода в систему S' , учитывая, что ускорение тела вертикально и, значит, горизонтальная скорость постоянна. Выражая t через x , получим явное уравнение траектории: $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - gx^2 / (2V^2 \cos^2 \alpha)$. Это – парабола, обращенная вершиной вверх.

Из формулы для центростремительного ускорения $a_c = V^2/R$, полученной в предыдущем параграфе, можно определить радиус кривизны траектории. При полете в поле тяжести ускорение всегда равно g и направлено вниз; в верхней точке параболы скорость $v = V_0 \cos \alpha$ и радиус кривизны $R = v^2/g = V_0^2 \cos^2 \alpha/g$. В исходной точке ($x = 0$) скорость V_0 , но ускорение не чисто центростремительное: не перпендикулярно к траектории; $R = V^2/(g \cos \alpha)$. Этот радиус больше (траектория здесь «прямее»).

2. Уравнения $x' = R \cos(\omega t)$, $y' = -R \sin(\omega t)$ задают движение точки по окружности радиуса R в системе S' . Если в системе S центр окружности движется горизонтально со скоростью V , то координаты в S будут $x = R \cos(\omega t) + Vt$, $y = -R \sin(\omega t)$. При $V = \omega R$ (точка на ободе катящегося вправо колеса) получается **циклоида** с остриями, обращенными вниз. Явную формулу $y(x)$ получить вообще нельзя, но можно выразить (тоже не очень удобно) $x(y)$. При $V < \omega R$ траектория напоминает спираль (предельный случай $V = 0$ – окружность, при $V > \omega R$ – искаженную синусоиду (при $V \gg \omega R$ – почти точная синусоида)).

Из траектории брошенного тела (пример 1) легко найти дальность полета: $y = 0$ при $x = V^2 \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha/g = V^2 \sin 2\alpha/g$, откуда видно, что максимальная дальность будет при $\alpha = \pi/4$. В верхней точке высота в этом случае равна четверти дальности. Реально сильно влияет сопротивление воздуха. В дальнобойной артиллерии используют более крутой запуск, чтобы полет происходил в разреженных слоях атмосферы.

МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

ДИНАМИКА

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

Глава 2

ДИНАМИКА

В этой главе рассмотрены законы Ньютона, которые определяют механическое движение, а также законы взаимодействия частиц и тел.

2.1 Принцип относительности Галилея. Системы отсчета

Все явления следует описывать в **системе отсчета**, которую можно представлять себе как систему координат, связанную с некоторым телом. Например, можно «привязать» систему координат к земной поверхности, или к вагону поезда, или к центру Солнца. От выбранного начала координат далее отмеряются расстояния.

Система отсчета не единственна – ее можно связать с любым телом. Возникает проблема выбора. Сидя в вагоне, мы видим, что станция движется, а человек, сидящий в станции, считает, что движется вагон. Кто же прав? Что движется на самом деле?

Многие думают, что истинно неподвижна станция. Это как будто разумнее, тогда неподвижны рельсы, земля, Австралия и много других вещей. Кажется маловероятным, что все они могут поехать по воле машиниста поезда. Сам же поезд сравнительно невелик, и он-то поехать как раз способен. Этот взгляд широко распространен. Почти любой уверен, что Земля летает вокруг Солнца (по приблизительно круговой орбите), а не наоборот. При этом не замечают явного противоречия: если Земля вращается вокруг Солнца, то как можно говорить о неподвижности железнодорожной станции? Далее, мы знаем, что Солнце тоже куда-то летит. Но тогда как может Земля двигаться по кругу?

Галилей в начале семнадцатого века первым понял, что бессмысленно разбирать, кто прав. Все системы отсчета равноправны. К этому заключению Галилея привели знаменитые эксперименты с наклонной плоскостью. Он скатывал шары с наклонной доски. Оказалось, что пройденные расстояния пропорциональны квадрату времени. Конечно, влиял и угол наклона доски к горизонту. Однако квадратичная зависимость сохраня-

лась для всех углов, при которых удавалось получить результат. В современной записи

$$X = at^2/2,$$

то есть, как мы уже знаем из кинематики, шары катились с постоянным для данного угла ускорением a . Ускорение зависело от угла наклона φ ; очевидно, что при $\varphi = 0$, то есть на ровной доске, шар не разгоняется.

Теперь представим себе уже катящийся шар на почти горизонтальной доске. При малом угле наклона шар разгонялся бы, хотя и медленно. Если сделать угол отрицательным (заставить шар подниматься), то его скорость будет уменьшаться. Что будет при строго горизонтальной доске? Галилей догадался, что идеальный шар должен катиться по горизонтальной плоскости с **постоянной скоростью**.

Другими словами, свободное от внешних воздействий тело должно двигаться равномерно и прямолинейно (закон инерции). Этот результат резко противоречил «научным» представлениям того времени. Считалось, по Аристотелю, что для всякого движения нужно внешнее воздействие. Это соответствует и бытовому опыту. Лодку надо тянуть, хотя бы на веревке, из-за того, что есть заметное сопротивление среды. Конечно, и в опытах Галилея присутствовало сопротивление, которое мы теперь называем трением качения. Заслуга Галилея состоит в том, что он смог понять непринципиальность трения, возможность уменьшения его практически до нуля. В этом ему помогла удачная постановка опытов. Трение качения вообще незначительно; выбор шаров, а не брусков, позволил Галилею увидеть главное в его экспериментах.

Закон инерции прямо приводит к равноправию систем отсчета. Если свободное тело движется с постоянной скоростью, в другой системе отсчета скорость будет другой. Можно сделать тело неподвижным, перейдя в систему, имеющую точно такую же скорость (скажем, можно пойти рядом с катящимся шаром или просто поместить начало координат в его центре). Для древних греков вопрос о смене системы отсчета не возникал вообще, несмотря на развитые перевозки и мореплавание. Все свободные тела должны были останавливаться относительно земли, с которой, на теперешнем языке, связывалась абсолютная, выделенная система отсчета. Но если тело не останавливается само, основания для выделения какой-либо системы отпадают.

И вот Галилей выдвинул свой **принцип относительности**. Все системы отсчета совершенно равноправны. Все явления происходят одинаково во всех системах отсчета, то есть одинаково поставленные эксперименты должны давать одинаковые результаты. Скажем, опыты с наклонной плоскостью, проведенные в каюте корабля, покажут те же законы движения, что и в лаборатории Галилея. Разумеется, это правильно при отсутствии качки или ускорений. Поэтому мы должны ограничить возможные переходы между системами отсчета. Если идеальный шар имеет постоянную скорость относительно стен комнаты, то он будет иметь постоянную (конечно, другую) скорость во всех системах отсчета, движущихся равномерно относительно комнаты. Галилей не только

исключил из рассмотрения силы трения, но и ограничился лишь системами отсчета, движущимися без ускорений.

Сидя в каюте и не высываясь наружу, невозможно определить, «движется» корабль (относительно берега) или стоит. Если же выглянуть, то мы увидим движение, но не абсолютное, а всего лишь относительно берега. Если на палубе пиратского корабля идет сражение, никто не берет поправок на перемещение корабля и не интересуется его скоростью, справедливо считая, что шпаги и пистолеты действуют так же, как если бы корабль стоял у пристани. (Но если корабль налетит на риф, то все тотчас это заметят).

Видимо, принцип относительности – это первое использование идеи **наблюдаемости**, согласно которой от умозрительных построений, не приводящих к наблюдаемым на эксперименте последствиям, нет никакой пользы. Раз нет способа определения абсолютной системы отсчета, то и не существует такой системы. Движение можно определить только относительно системы отсчета (берега, корабля или другой – все равно). Нет выделенной, абсолютной системы отсчета. Конечно, Галилей обобщил не только свои эксперименты, но и разносторонний опыт человечества. Скажем, при плаваниях через океаны, когда нет видимых ориентиров, моряки часто могли сталкиваться с трудностью определения движения корабля по воде в тихую погоду.

Насколько устойчивы неверные представления о абсолютном пространстве, показывает роман «Магелланово облако» Ст. Лема. Космонавты отправляются к Альфе Центавра со скоростью всего 170000 км/с ($\approx 60\%$ световой). Если ехать быстрее, возникают неприятные ощущения, а скорость около 190000 км/с приводит даже к гибели экипажа. Это ограничивает эйнштейновское замедление времени на уровне 80% и тем затрудняет полеты к звездам. Разумеется, ученые находят выход. При достаточно быстром разгоне смерть оказывается обратимой! После торможения все оживут.

Здесь мы видим смесь современных (предельность скорости света) и догалилеевских представлений. Не возникает вопроса, относительно чего ракета развивает скорость и почему жители Земли, имеющие в системе ракеты такую же по величине скорость, даже не замечают своего опасного положения. Ясно, что в пространстве везде вбиты колья и верстовые столбы, и система Земли – центр вселенной.

Как ни удивительно, но сейчас выясняется, что в некотором смысле можно говорить не об абсолютной, но все же выделенной системе отсчета. Это система, в которой изотропно реликтовое излучение – заполняющий Вселенную газ фотонов, имеющий температуру около 3 градусов Кельвина. Солнечная система имеет скорость около 600 км/с относительно системы излучения. В результате с одной из сторон небосвода приходят чуть более энергичные фотоны, чем с противоположной. Это движение создает ненулевую (но совершенно ничтожную) силу трения. Механическое действие реликтовых фотонов нельзя измерить теперь и, возможно, нельзя будет измерить никогда.

Вернемся в XVII век. Галилей же изобрел маятниковые часы. Отсюда ясно, как непросто было ему провести свои опыты. Экспериментальный подход в его времена был совершенно новым и до некоторой степени тоже «изобретен» Галилеем. Большинство тогдашних ученых считало достоверным только знание, полученное из логических рассуждений. Например, ко-

гда Галилей открыл спутники Юпитера с помощью зрительной трубы, ему возражали, что пятнышки, видимые в трубу возле планеты, могут быть вовсе не небесными телами, а только видимостью, какими-то бликами из-за несовершенства оптики. Допустим, эти пятна появлялись, когда труба наводилась на Юпитер. «С каких пор свидетельства наших органов чувств могут идти в сравнение с ярким светом строгой логики?» (Б.Брехт, Жизнь Галилея). Логически опровергнуть такую позицию нельзя. Поскольку свойства телескопа были еще плохо известны, только практика могла показать, что если земные предметы, Луна или Венера таких фантомов не производят, то и Юпитер вряд ли должен, то есть трубе можно доверять.

Принцип относительности плохо согласуется с заявлением «А все-таки она вертится». Такое утверждение недалеко от бессмыслицы, не говоря о том, что никогда не приводится какой-либо реакции на него. Можно заявить, что Солнце вращается вокруг Земли, и не будет никакой ошибки. Ведь это мы и видим, обитая в системе Земли.

2.2 Инерциальные системы отсчета. Законы Ньютона

Галилей первым начал развивать механику на должном уровне, но основные результаты получил Ньютон (1689). Традиционно принято выделять три закона Ньютона.

Первый закон – повторение результата Галилея: тело движется равномерно и прямолинейно либо покоится, если на него не действуют силы. Сейчас принято дополнять формулировку словами «в инерциальной системе отсчета». Инерциальная же система – это в которой выполняется первый закон. Чтобы избежать тавтологии, можно считать, что первый закон постулирует существование инерциальных систем и подтверждается опытом. Способ проверить инерциальность может быть таким: повторяем в нашей системе отсчета опыты Галилея. Если изолированное от всех воздействий тело не ускоряется, система будет инерциальной. Например, шар может лежать на гладкой горизонтальной поверхности стола, установленного на железнодорожной платформе, которая стоит на рельсах или равномерно катится по ним. Это инерциальные системы.

Двигаясь с постоянной скоростью относительно любой инерциальной системы, получаем другую инерциальную систему. Хорошим примером инерциальной системы будет система, связанная с так называемыми «неподвижными звездами».

Очевидно и наличие неинерциальных систем. Достаточно закрутиться вокруг оси, и вся Вселенная завертится в обратную сторону по кругам, в том числе и вполне изолированные тела. Если вагон начнет разгоняться, шар внутри этого вагона покатится по горизонтальной поверхности. Это тоже будет неинерциальная система, в которой не выполняется закон инерции.

Основная заслуга Ньютона – формулировка законов динамики. **Второй закон** определяет движение **не** изолированного тела, на которое действуют другие тела. Как должен выглядеть такой закон?

Ньютон мог рассуждать примерно таким образом. Из результатов Галилея следова-

ло, что движение само по себе несущественно, то есть скорость тела не может определяться воздействиями на него в данный момент. Ведь в другой системе отсчета скорость может быть нулевой! Когда мы едем в автомобиле (по хорошей дороге), мы не чувствуем скорости, но легко замечаем ее изменения. Внешние воздействия могут определять **изменение** скорости во времени, то есть **ускорение**. Заметим, что Галилей такой физической величины не знал, и даже старался избегать умножения или деления величин разных размерностей. Свой закон качения он формулировал примерно так: отношения пройденных расстояний равны отношению квадратов времен. Ньютон уже не имел таких препятствий и, кроме того, сам открыл необходимый для механики математический аппарат – производные и интегралы.

Попробуем искать закон движения в таком виде:

$$\text{ускорение} \sim \text{воздействию}.$$

Мы ничего не потеряем, если слово «ускорение» заменим буквой a , (от английского acceleration), «воздействие» же заменим на слово «сила» или на букву F (от английского force). Пока это только жонглирование словами или буквами, ведь мы еще не знаем, как определить (для физика это значит измерить) силу:

$$a \sim F.$$

Нам точно известно, что такое ускорение. Теперь, взяв какое-то тело (назовем его эталонным) мы можем изучать силы! Если под влиянием некоторого воздействия тело получает единичное ускорение (1 м/с^2), то и силу назовем единичной. При ускорении 2 м/с^2 сила будет двойной. Пример – действие на тело растянутой пружины. Очевидно, что чем больше растягивать пружину, тем «лучше» она ускоряет пробное тело, тем больше будет ускорение. Такие опыты показывают, что сила примерно пропорциональна растяжению пружины. Укрепив пружину на дощечке, можно проградуировать прибор и получить измеритель силы – динамометр (от греческого dynamis – сила).

Теперь можно изучить действие силы на различные тела. Ясно, что железнодорожный вагон будет ускоряться медленнее, чем маленькая тележка. Пробуя ускорять тела разных размеров, из различных материалов, приходим к уравнению:

$$ma = F, \tag{2.1}$$

где m (англ. mass) – характеристика каждого конкретного тела. Собственно, это определение массы. Мы можем проделать опыты по разгону ряда тел, например, при единичной силе, и определить массы этих тел из уравнения (2.1).

Заметим, что форма этого уравнения пока что не накладывает никаких ограничений на закон движения. Например, масса могла бы оказаться зависящей от силы. Нет никакой гарантии, что масса имеет какие-либо удобные простые свойства. Выяснить это можно только в опыте.

Меняя силу, мы из опыта можем убедиться, что m не зависит от F ! Для любого тела удвоенная сила дает удвоенное ускорение. Следовательно, для каждого тела

масса m – константа. Далее, опыт показывает, что при единичной силе «удвоенное» тело, составленное из двух эталонных, или единичных, имеет половинное ускорение. Следовательно, m – аддитивная характеристика, массы тел складываются из масс составляющих. Это свойство не зависит от формы, цвета, материала и т.п. составляющих. Теперь мы знаем, что все тела составлены из молекул, и масса, грубо говоря, – это количество таких структурных единиц.

Что будет, если на тело одновременно есть несколько воздействий? Снова опыт показывает, что когда тело тянут двумя динамометрами, ускорение будет таким же, как если приложить одну «результатирующую» силу, равную сумме показаний динамометров. Но если тянуть в разные стороны, результирующая сила будет разностью элементарных сил. В общем, если направления действия сил различны, результирующая сила оказывается равна векторной сумме отдельных сил. Поскольку ускорение – тоже вектор, можно записать уравнение движения в более общем виде:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} . \quad (2.2)$$

Итак, в духе принципа Галилея, внешнее воздействие (сила \mathbf{F}) определяет не скорость, а ускорение, которое одинаково во всех инерциальных системах. Вместо (2.1) мы могли бы написать $m^2 a = F^3$, но тогда были бы аддитивными куб «силы» и квадрат «массы», что явно неудобно. Следовательно, форма записи уравнений – это результат не «вывода», приведенного выше, а главным образом опыта.

Уравнения (2.1) и (2.2) есть различные формы записи **второго закона Ньютона**.

Разумеется, приведенная последовательность «экспериментов», хотя и последовательна логически, вряд ли наиболее удобна. Например, массы тел лучше определять путем взвешивания: здесь используется экспериментально установленная пропорциональность массы и силы тяжести. Исторически закон Ньютона, конечно, был не результатом намеченной выше цепочки опытов, а обобщением накопившейся практики человечества, выражением «здравого смысла» в области механики. Вместе с тем заметим, что такие эксперименты провести, разумеется, можно, причем средствами современной школьной лаборатории. Очень полезное приспособление – «воздушная дорога» – позволяет практически исключить трение. Применяемая в Новосибирской физико-математической школе конструкция состоит из трубы прямоугольного сечения с рядом малых отверстий на верхней стенке. В трубу нагнетается воздух обычным бытовым пылесосом, и по ней могут скользить исследуемые тела.

Третий закон Ньютона: силы между телами **взаимны**. Не только нельзя подействовать на тело и самому избежать его воздействия (стукнуть по стене и не почувствовать удара), но и силы эти равны точно и противоположны по направлению:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} .$$

В простых случаях мы уже можем убедиться в правильности этого закона. Пусть тела масс m_1 и m_2 соприкасаются, и первое тело толкают с известной силой F (рис. 2.1).

Ускорение системы из (1) будет $a = F/(m_1 + m_2)$. Таким же должно быть ускорение каждого тела. На второе действует пока неизвестная сила F_{12} со стороны первого. Записывая второй закон Ньютона, получаем $a = F_{12}/m_2$, откуда $F_{12} = Fm_2/(m_1 + m_2)$. Рассмотрим теперь движение тела m_1 : $a = (F + F_{21})/m_1$. F_{21} – это сила действия второго тела на первое. Отсюда находим

$$F_{21} = -F + am_1 = -Fm_2/(m_1 + m_2) = -F_{12} .$$

Мы получили искомое равенство сил, совершенно не зная, как взаимодействуют тела (сколько точек соприкосновения, каковы упругие свойства материалов, ...). Все, что нам понадобилось – это тот опытный факт, что тела могут ускоряться вместе, сохраняя соприкосновение. Тела могли бы быть склеены или вообще быть частями единого тела.

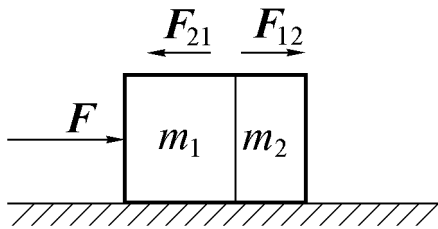


Рис. 2.1.

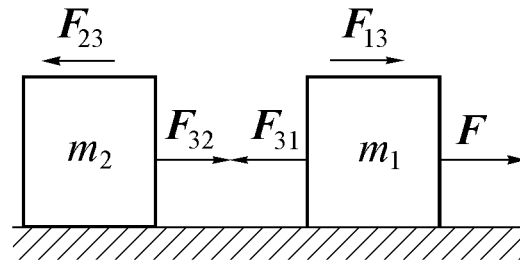


Рис. 2.2.

Конечно, мы не «вывели» третий закон Ньютона, а только показали его справедливость на примере. Важно, что и в более сложных случаях закон выполняется. Тела могут иметь разные ускорения (при ударе, электрическом или гравитационном взаимодействии). Независимо от этого третий закон обязан выполняться.

Более сложный случай – два тела, соединенных нитью (рис. 2.2). Такая система позволяет рассматривать растягивающие усилия. В качестве первого (вполне разумного) приближения примем, что нить не изменяет своей длины (нерастяжима). Тогда по-прежнему ускорения тел одинаковы. Но тел уже три! Как мы знаем, противоположными будут силы взаимодействия каждого тела с нитью:

$$F_{13} = -F_{31}, \quad F_{23} = -F_{32} .$$

Непосредственно «через пространство» тела не взаимодействуют, поэтому сил F_{12} и F_{21} попросту нет. Все же иногда говорят, что тела взаимодействуют «через нить». При этом подразумевают, что нить имеет пренебрежимо малую массу. А тогда из уравнения движения, написанного для нити,

$$m_{\text{нити}} \cdot a = 0 \cdot a = F_{23} + F_{13} ,$$

получаем равенство $F_{13} = -F_{23}$. Тогда о нити можно забыть, и силы, действующие на первое и второе тела, будут подчиняться правилу взаимности: $F_{32} = -F_{31}$. Но это – не

третий закон Ньютона, а в общем случайное равенство сил между различными парами тел. Если массой нити пренебречь нельзя, такого равенства, конечно, не будет.

Можно тела соединить пружиной нулевой массы, так что ускорения тел не будут равны из-за деформации пружины. И в этом случае можно приравнять $F_{32} = -F_{31}$. Если же масса пружины не мала, надо честно рассматривать три тела, силы между взаимодействующими парами будут равны по величине и противоположны. Подробнее смысл третьего закона Ньютона и его необходимость мы выясним далее.

Понимание законов Ньютона достигается практикой решения задач. Здесь отметим важные свойства сил:

- **Сила имеет источник:** в механике это какое-то другое тело.
- **Принцип суперпозиции:** силы, действующие на данное тело со стороны других, векторно складываются. Сумму называют равнодействующей или результирующей силой.

Кроме того, важно знать, как **не надо** говорить о силе. ma – это **не** сила, а ее **результат**. Среди всех сил со стороны различных тел **никогда** нет «силы» ma (и **почти никогда** нет силы, численно равной по величине)! Произведение массы тела на его ускорение – это результат действия нескольких сил, каждая из которых имеет источник. Никакое другое тело не действует на рассматриваемое тело с такой силой.

Равным образом сила – это не ma , а воздействие со стороны другого тела, и только равнодействующая всех реальных сил равна ma .

Научные термины по необходимости происходят от слов, обозначающих донаучные, бытовые понятия. Обычно принято указывать, что физическая величина совсем мало похожа на своего языкового предка. Может быть, это верно для таких тонких понятий, как цвет кварков. Но в механике почти всегда слова обозначают практически то же, что в обычном языке. Сильный человек на любом приборе, измеряющем силу, будет иметь преимущество перед слабым. То же относится и к понятию массы.

Изложенные законы составляют основу механики. До Ньютона механика была довольно бессистемным набором **сведений** и **рецептов**. Ньютон же написал **уравнения**, позволяющие (в принципе) решить любую задачу. Впервые возникла **научная теория**.

Размерность силы из (2.1) $\text{г}\cdot\text{см}/\text{с}^2$. Эта единица системы СГС (сокращенно сантиметр, грамм, секунда) называется **дина**. В системе СИ будет $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2 = \text{Н}$ (ньютон). Подставляя кг и м, видим, что $1 \text{ Н} = 10^5$ дин. Внесистемная единица – кГ (килограмм силы, или вес тела массой 1 кг на Земле). $1 \text{ кГ} = 1 \text{ кг} \times g = 9.8 \text{ Н}$ (часто считают 10) или примерно 10^6 дин.

2.3 Силы в природе

Чтобы применять законы Ньютона, надо знать, от чего зависят и как изменяются силы при конкретных взаимодействиях. Рассмотрим основные виды сил, ограничиваясь пока силами, важными для решения задач механики.

Во введении уже упоминались **фундаментальные** взаимодействия: сильное, слабое, электромагнитное, гравитационное. Изучение сильных и слабых взаимодействий – задача не механики, а ядерной физики и физики элементарных частиц. Силы, рассматриваемые в механике, по своему происхождению обусловлены электромагнитным или гравитационным взаимодействием. В частности, электромагнитное происхождение имеют силы, возникающие при деформации тел, и силы трения; гравитационное – силы притяжения тел к Земле. Впрочем, в механике важно знать не столько природу силы, сколько ее **закон**, то есть зависимость ее от различных условий.

2.3.1 Силы упругости

Наглядные примеры упругих тел – пружины и резинки. Но оказывается, что и тела, называемые обычно «твердыми», способны немного изменять свои размеры. Все тела состоят из атомов и молекул. При сильном сближении атомы отталкиваются друг от друга (все тела сопротивляются сжатию). С другой стороны, при увеличении расстояний между атомами они должны притягиваться, иначе невозможно было бы существование устойчивых тел, состоящих из многих частиц.

Поэтому при попытке сжать или растянуть тело с его стороны возникает реакция – сила f , противостоящая воздействию. Ее называют возвращающей силой, или **силой упругости**. Тело стремится вернуться в исходное состояние. Опыт показывает, что при малых растяжениях или сжатиях тела, когда его длина l изменяется на небольшую величину x , выполняется закон Гука:

$$f = -kx .$$

Здесь k – **коэффициент жесткости** (или просто жесткость) тела; k зависит от материала, формы и размеров тела, но не от величины деформации. Знак минус означает, что сила упругости f направлена противоположно смещению x из положения равновесия (например, растянутое тело стремится сократиться). В равновесии, при $x = 0$, сила нулевая.

Сила упругости возникает при приложении к телу внешней силы F . По третьему закону Ньютона, эти силы противоположны:

$$F = -f .$$

Например, пусть один конец пружины закреплен, а другой тянут с силой F . Смещение x направлено в ту же сторону, что и внешняя сила F . Если тело покоится, пружина действует на тело с силой $f = -F$, направленной в обратную сторону.

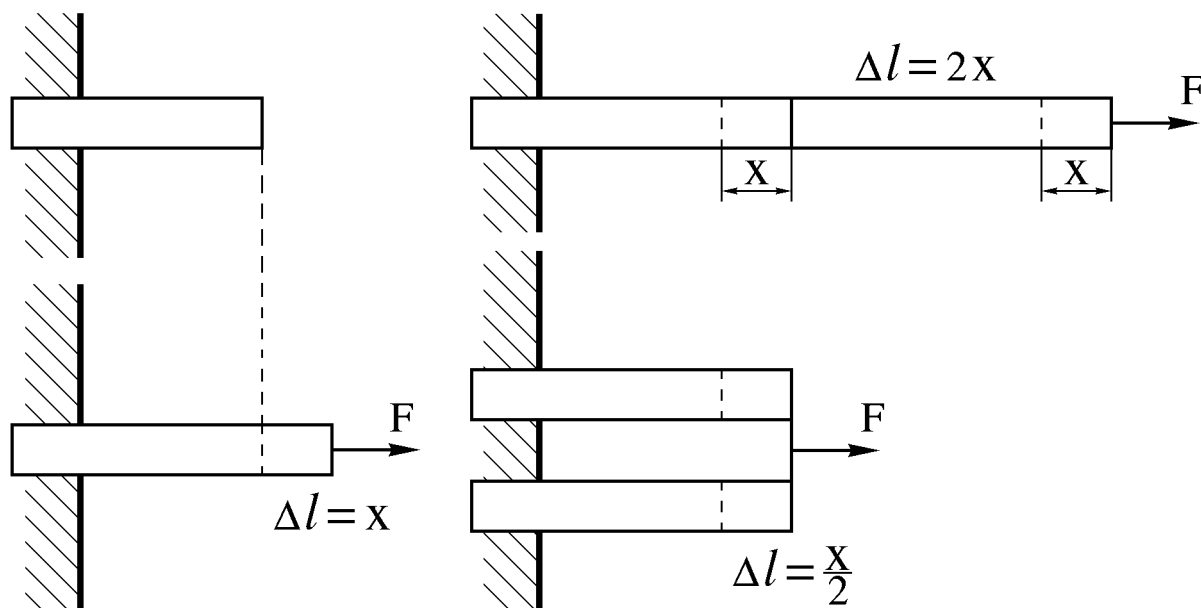


Рис. 2.3.

В простых случаях можно установить зависимость жесткости от размеров упругого тела. Пусть однородный стержень постоянного поперечного сечения S и длины L имеет жесткость k . Если стержень закреплен одним концом в стене, а на свободный конец стержня действует растягивающая сила F , то он растянется на величину $x = F/k$ (рис. 2.3).

Чтобы растянуть одновременно второй такой стержень, нужна еще такая же сила F . Значит, стержень двойного сечения растягивается на x при действии двойной силы. Следовательно, коэффициент жесткости пропорционален S .

Если соединить два одинаковых стержня последовательно, то под действием растягивающей силы F растянется каждый из них. Суммарное удлинение будет двойным, значит, k обратно пропорционален длине стержня. Действительно, растянуть длинную резинку на ту же абсолютную величину x гораздо легче, чем короткую.

Учитывая эти зависимости, для стержня закон Гука записывают в более конкретном виде:

$$f = -\frac{ES}{L} \cdot x.$$

Коэффициент E называют **модулем Юнга**. Он зависит только от материала. Например, для стали $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Н/м².

Пусть стальную проволоку длины $L = 1$ м и площадью поперечного сечения $S = 1$ мм² растягивают с силой $F = 100$ Н. Тогда удлинение проволоки оказывается всего 0,5 мм. Потому сталь и считается твердым телом, что ее нелегко деформировать.

Но из той же проволоки можно изготовить пружину, которая деформируется очень легко. Основная причина такой разницы в том, что при деформации пружины длина проволоки практически не меняется.

Пружины часто встречаются в школьных задачах. При их сжатии хорошо выполняется закон Гука. Как и для стержней, при последовательном соединении получается

более мягкая, при параллельном – более жесткая пружина.

2.3.2 Сила тяжести. Вес тела

Со времен Галилея известно, что все тела вблизи поверхности Земли падают с одинаковым ускорением \vec{g} , если можно пренебречь сопротивлением воздуха. Применяя второй закон Ньютона для тела массы m , получаем, что на тело со стороны Земли вблизи ее поверхности действует: **сила тяжести**:

$$F_{\text{тяж}} = m\vec{g}.$$

Притяжение к Земле – частный случай гравитационного взаимодействия, определяющегося законом всемирного тяготения. Согласно этому закону, две точечные массы m_1 и m_2 , расположенные на расстоянии r друг от друга, притягиваются с силой, пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – **постоянная всемирного тяготения**. Подробнее этот закон и его применения будут рассмотрены в главе 6.

Сила тяжести широко используется на практике для определения массы тел путем взвешивания. Весом тела называется сила, с которой это тело действует на подставку или подвес. В обычных условиях вес измеряется при неподвижной относительно Земли подставке и обусловлен силой тяжести.

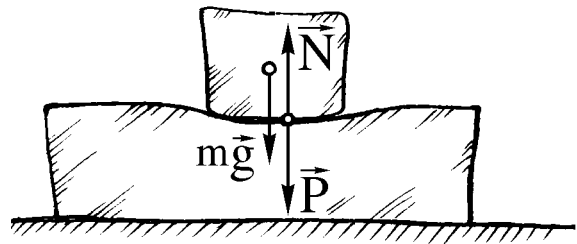


Рис. 2.4.

Земля притягивает тело, и оно слегка деформирует подставку (рис. 2.4). В результате возникает сила упругости N , называемая еще **реакцией опоры**. В равновесии $N = -m\vec{g}$, иначе бы тело ускорилось вверх либо вниз.

Тело действует на подставку с силой, противоположной N (это и есть вес P); $P = -N = m\vec{g}$. Поскольку g для всех тел постоянно, вес пропорционален массе, что и используется при взвешивании. (Хотя реально весы измеряют силу, и даже процедура называется взвешиванием, определением веса, но на самом деле нам, конечно, нужна масса – количество продукта).

Пусть теперь подставка вместе с телом помещена в лифт, движущийся вертикально вниз с ускорением a (рис. 2.5). По третьему закону Ньютона сила P , действующая на подставку со стороны тела (вес тела) будет равна по величине силе нормального давления N и противоположно направлена. Записав второй закон Ньютона

$$mg - N = ma,$$

получим вес тела в ускоренно движущемся лифте:

$$P = m(g - a).$$

При свободном падении $a = g$ и вес тела обращается в нуль, наступает **невесомость**. Естественно, что в таком лифте тело на подставку не давит, так как тоже свободно падает с тем же ускорением g .

В лифте невесомость достигается только на небольшое время. В самолете, летящем по баллистической траектории, состояние невесомости может продолжаться уже 20–30 секунд. Ускорение самолета при таком движении тоже равно g . На спутниках Земли и космических станциях невесомость постоянна. Длительное пребывание в невесомости опасно для здоровья. Это ограничивает время работы экипажа в космосе.

Физическая причина невесомости на орбите вокруг Земли в том, что космический корабль все время «падает» – притяжение его к Земле ничем не компенсировано. В этом он ведет себя так же, как и лифт. Но, в отличие от лифта, из-за большой скорости его горизонтального движения круглая Земля «уходит» из-под него.

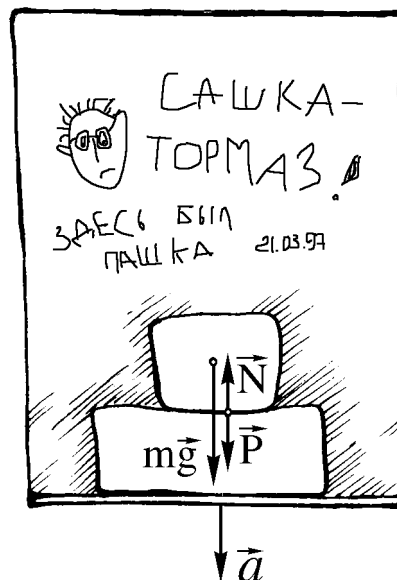


Рис. 2.5.

2.3.3 Сила трения

Силы трения сами по себе не фундаментальны, но исключительно важны. Допустим, что трение вдруг исчезло. Ровный ледяной каток дает слабое представление о таком бедствии. В мире без трения не смогли бы двигаться автомобили и поезда, не смогли бы ходить люди. С любого склона все скатывалось бы в ямы.

Рассмотрим, как влияет трение на движение тел. Пусть на горизонтальном столе лежит тело массы m . Начнем действовать на это тело горизонтальной силой F . Если сила мала, тело не сдвинется с места. Лишь при силе, величина которой превышает некоторое значение F_0 , начнется скольжение. При этом ускорение тела будет меньше, чем обеспечивает та же сила F , например, на гладком льду. Причина состоит в том, что на тело со стороны стола действует **сила трения**, препятствующая движению.

Можно было бы сказать, что при появлении силы F меняется сила взаимодействия стола с телом. Причем новая сила реакции R не перпендикулярна поверхности соприкосновения, а направлена под некоторым углом α к нормали (рис. 2.6). Однако, в этом случае удобнее рассматривать по отдельности две компоненты силы реакции как отдельные силы: N – силу нормального давления, перпендикулярную поверхности соприкосновения тел, и $F_{\text{тр}}$ – силу трения, направленную вдоль этой поверхности.

Такой подход позволяет сформулировать сравнительно простые законы, описывающие силу трения. Подчеркнем, что сейчас речь идет о **сухом трении**, когда непосредственно взаимодействуют твердые тела.

Сила трения возникает при взаимодействии молекул, находящихся на поверхностях тел. Детальное рассмотрение таких взаимодействий – очень сложная задача. Но экспериментально приближенные закономерности, описывающие сухое трение, установил еще в 1781 году французский физик Шарль Кулон (1736 – 1806). Согласно Кулону, величина **силы трения скольжения** не зависит от площади соприкосновения взаимодействующих тел и пропорциональна силе нормального давления:

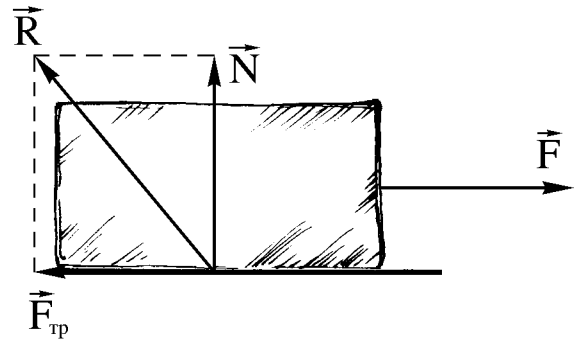


Рис. 2.6.

$$F_{\text{тр}} = \mu N .$$

Здесь введен безразмерный **коэффициент трения** μ , зависящий от материалов, из которых сделаны взаимодействующие тела, и от состояния поверхностей (качества шлифовки, степени загрязнения). Последняя зависимость может быть существенной, так что значения коэффициентов трения, приводимые в справочниках, довольно условны. Пропорциональность силе давления можно объяснить тем, что от N зависит реальная площадь соприкосновения поверхностей. Поверхность имеет многочисленные неровности, которые под давлением расплющиваются и образуют контактные площадки. Именно на этих площадках происходит взаимодействие атомов двух соприкасающихся тел.

При проскальзывании **сила трения направлена против скорости**.

Характерным свойством сухого трения является то, что сила трения может быть отлична от нуля и при отсутствии проскальзывания. Вернемся к началу параграфа. При внешней силе $F < F_0$ тело, лежащее на столе, не движется. Значит, в этом случае сила трения равна по величине и противоположна по направлению внешней силе:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\mathbf{F} .$$

Если нет проскальзывания, силу трения называют **силой трения покоя**. При увеличении силы F растет и величина силы трения. Это продолжается, пока внешняя сила не достигает порогового значения F_0 , при которой начинается скольжение. Оказывается, что с приемлемой точностью максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения. Иными словами, сила сухого трения меньше или равна произведению коэффициента трения на силу нормального давления:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N .$$

Равенство достигается при пороговой силе F_0 , которая также равна μN .

Выше предполагалось, что коэффициент трения не зависит от величины скорости. Реально некоторая зависимость есть, но на практике обычно этим можно пренебречь.

При движении тел в жидкостях или газах также возникает сила, препятствующая движению. Ее происхождение связано как с возникновением в среде разности давлений, так и с «трением» слоев среды, вовлеченных телом в движение – вязкостью. Подробнее этот вопрос рассматривается в других разделах физики. Здесь ограничимся несколькими замечаниями.

В отличие от сухого трения, в жидкости нет трения покоя – при нулевой скорости **жидкое трение** равно нулю. При движении возникает сила, направленная против скорости. При малых скоростях эта сила линейно зависит от скорости:

$$F = \alpha v ,$$

где α – коэффициент, определяющийся параметрами среды и тела.

При увеличении скорости зависимость становится сложнее. Так, существует область скоростей, в которой сила растет приблизительно пропорционально квадрату скорости:

$$F = \beta v^2$$

с другим коэффициентом пропорциональности β .

Из-за трения о воздух при падении тел с большой высоты довольно быстро устанавливается постоянная скорость. Скажем, для парашютиста при затяжном прыжке она составляет около 50 м/с. Раскрытие парашюта резко увеличивает силу сопротивления движению (коэффициент β), и установившаяся скорость падения оказывается около 5 м/с.

2.4 Импульс. Сила как изменение импульса

Вспомнив, что $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, можно переписать (2.2) в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} , \quad (2.3)$$

где вектор $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ называется **импульсом** тела. Внести массу под знак производной можно, так как масса постоянна. На первый взгляд, преимущества в такой записи не видно. Однако заметим, что уравнение (2.2), строго говоря, пригодно для материальной точки, для которой мы знаем, что означают координаты, скорость и ускорение. С меньшей уверенностью можно применять (2.2) к телам достаточно малых размеров. Покажем, что (2.3) применимо к любым телам и даже к системам тел, причем импульс системы – это векторная сумма импульсов ее частей, а сила \mathbf{F} будет суммой сил, действующих на тела системы.

Пусть имеется тело или набор (система) тел. Делим их на малые части m_j , которые можно считать точечными и, значит, для которых хорошо определены скорости \mathbf{v}_j , координаты \mathbf{r}_j и ускорения \mathbf{a}_j . Для каждой элементарной массы

$$m_j \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{F}_j , \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} = \mathbf{F}_j .$$

Замечаем, что силы \mathbf{F}_j делятся на внешние по отношению к системе (обозначим их \mathbf{F}_j^o , от слова out) и внутренние \mathbf{F}_{kj} действия частицы k на частицу j . Тогда

$$\frac{d\mathbf{p}_j}{dt} = \mathbf{F}_j^o + \sum_{k \neq j} \mathbf{F}_{kj}.$$

Суммируем эти равенства для всех частиц системы. По третьему закону Ньютона, каждая \mathbf{F}_{kj} аннигилирует с противоположной \mathbf{F}_{jk} . В левой части будет производная от суммы импульсов, или полного импульса системы:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{F}_j^o = \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Видим, что полный импульс системы меняется только под влиянием суммы внешних сил. Иначе невозможно было бы разобраться с движением любого куска мела (имеющего порядка 10^{23} частей на молекулярном уровне). Эта сумма \mathbf{F} и будет равнодействующей сил, приложенных к данному телу или системе.

Сложить так удачно уравнения движения частей системы удалось благодаря линейности второго закона Ньютона и существованию третьего. Заметим, что способов выделения частей существует множество, но результат от способа не зависит. Это избавляет нас от кошмара делимости тела на неограниченное и неопределенное число материальных точек с неизвестными взаимодействиями.

Например, для воды, текущей по трубе, вообще непонятно, что такое ускорение, так как оно в каждой точке разное. Но, несомненно, вода действует на трубу и труба – на воду. Найдем изменение импульса определенной массы воды за время Δt (рис. 2.7). Масса воды, входящей в трубу, будет $\rho SV \Delta t$, она приобретет горизонтальный импульс $\rho SV \Delta t \cdot V$, и потеряет такой же вертикальный импульс. Суммарное изменение импульса $\Delta P = \sqrt{2} \cdot \rho SV^2 \Delta t$ направлено «на юго-восток». Сила, действующая на воду, $F = \Delta P / \Delta t = \sqrt{2} \cdot \rho SV^2$. По третьему закону, вода действует на трубу с противоположной силой.

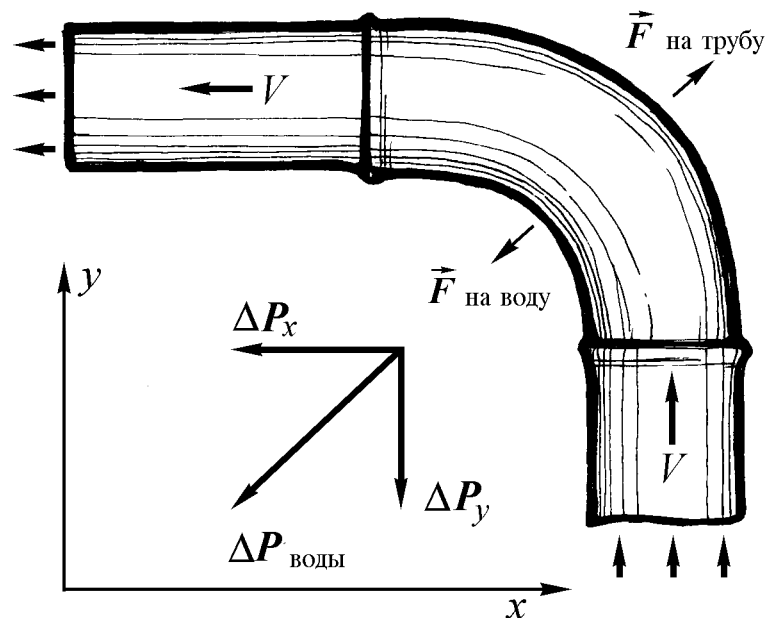


Рис. 2.7.

2.5 Движение центра масс.

Любое тело, которое мы можем видеть, состоит из большого числа частей. Можно ли говорить о координате тела? Редко скорости всех частей одинаковы. Имеет ли смысл понятие скорости тела? Покажем, что на оба вопроса можно ответить положительно.

Что следует подразумевать под координатой тела? Перепишем импульс

$$\mathbf{P} = \sum m_j \mathbf{v}_j = \sum m_j \cdot \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum m_j \mathbf{r}_j \right) = \left(\sum m_j \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_j \mathbf{r}_j}{\sum m_j} \right) = M \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}.$$

Здесь $M = \sum m_j$ обозначает полную массу системы, а вектор $\mathbf{R} = \sum m_j \mathbf{r}_j / \sum m_j$ называется **радиус-вектором центра масс системы**; три его проекции – это координаты центра масс, например $X = \sum m_j x_j / \sum m_j$. Производная $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt = \mathbf{P}/M$, естественно, называется скоростью центра масс.

Примеры.

1. Пусть имеется две массы m_1 и m_2 на расстоянии L . Помещаем начало координат в массу m_1 , тогда координата центра $X = (m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot L) / (m_1 + m_2) = m_2 \cdot L / (m_1 + m_2)$ – довольно очевидный результат. Центр масс ближе к более тяжелой массе.
2. Однородный полушар радиуса R . Кладем его на плоскость и режем на слои толщиной dx на высоте x (переменной). Масса такого блина $dm = \rho \cdot \pi(R^2 - x^2)dx$, высота x , в числителе сумма $x \cdot dm$, а в знаменателе сумма dm , то есть полная масса $\rho 2\pi R^3/3$:

$$X = \frac{\int_0^R \rho \pi (R^2 - x^2) x dx}{\int_0^R \rho \pi (R^2 - x^2) dx} = \frac{(R^2 x^2/2 - x^4/4) \Big|_0^R}{(R^2 x - x^3/3) \Big|_0^R} = \frac{R^4/4}{2R^3/3} = \frac{3R}{8}.$$

Уравнение (2.4) можно записать и так:

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \text{или} \quad M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (2.5)$$

то есть центр масс системы движется под действием одной результирующей силы \mathbf{F} – суммы всех внешних сил, приложенных к системе. Для жесткого тела становится ясно, что подразумевалось неявно под его координатой – это положение центра масс. Если отвлечься от вращения, движение твердого тела сводится к движению материальной точки. При этом результирующая сила вовсе не обязана проходить через центр масс.

Если информации о движении центра масс недостаточно, то реально необходимо разделение системы на малые части. Такой подход с заданием взаимодействия элементарных масс используется в динамике жидкости и газа. Для расчета трехмерной задачи на каждом шаге по времени может понадобиться, например, разбиение на

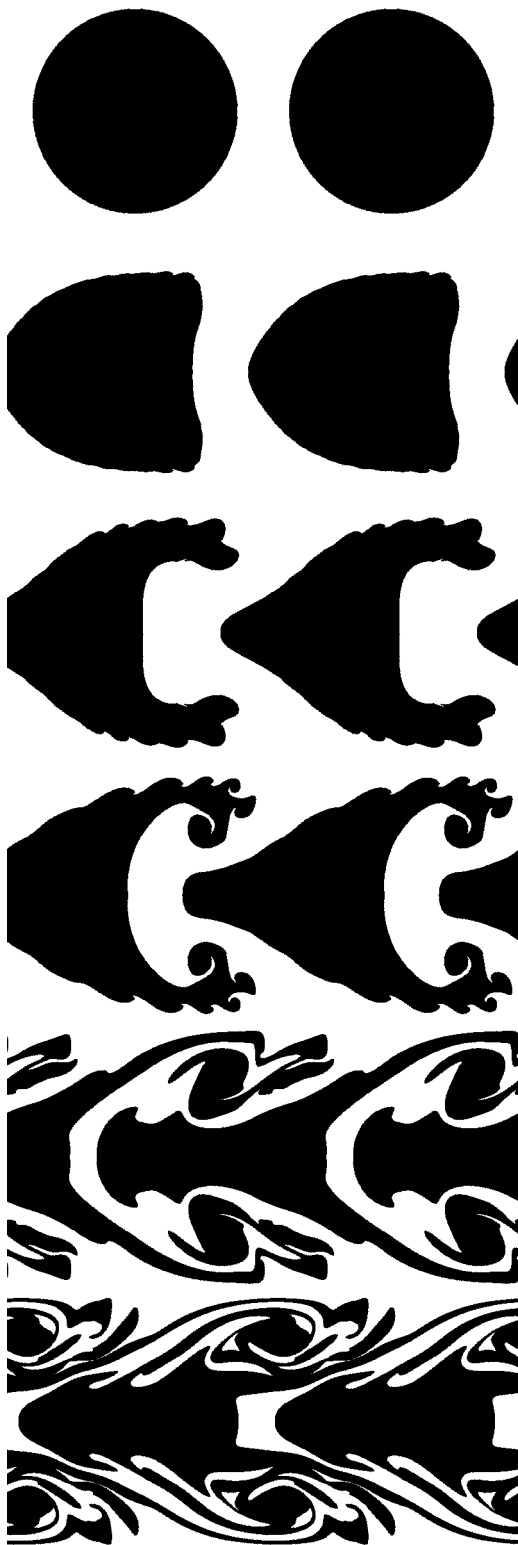


Рис. 2.8.

$N = 100 \times 100 \times 100 = 1000000$ частей. Не считая внешних, внутренних сил между ними будет максимум $N \cdot (N - 1)/2 \approx 5 \cdot 10^{11}$. К счастью, обычно достаточно сил между ближайшими соседями (примерно $3N$).

На рис. 2.8 показан пример расчета движения капель подкрашенной жидкости навстречу потоку окружающей жидкости, имеющей те же свойства. Капли двумерные (т.е. вначале – цилиндрические, видны плоские сечения); расчетная сетка содержала 1600×1600 ячеек, так что капля состоит приблизительно из 800 частиц. Для наглядности показана удвоенная расчетная область. Подразумевается, что вправо и влево картинка неограниченно продолжается (там движется множество еще таких же капель). Сверху вниз показаны конфигурации на моменты времени t : 0; 0,5; 1; 1,5; 3; 4,5; единицей времени служит отношение начального диаметра цилиндра d к начальной относительной скорости V . Видны деформация границ, развитие неустойчивости и перемешивание. Зона существенного смешения выделена черным. Расчет выполнен Д.А. Медведевым.

МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

Глава 3

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

В этой главе вводятся важнейшие понятия механики – работа и энергия – и устанавливаются закономерности, которым они подчиняются.

3.1 Работа силы. Мощность. Кинетическая энергия

В этом курсе мы стараемся иллюстрировать физические проблемы на простых бытовых примерах. Такой подход разумен и на стадии определений физических величин. Принимаясь за изучение очередного раздела физики, всегда полезно задуматься, какие здесь возникают новые понятия, зачем они нужны и, не в последнюю очередь – почему они именно так называются.

Работа – это слово, близкое каждому. В житейском смысле мы понимаем работу как, например, поднятие каких-то тяжестей. Можно представить себе постройку пирамиды Хеопса. Когда потребности в такой деятельности превысили возможности человека, люди начали приручать животных. Сейчас практически всю работу вместо нас выполняют механизмы. Разумеется, физика не могла пройти мимо такой важной стороны человеческой активности.

Перейдем к определениям. Работой силы F на пути L называется произведение

$$A = F \cdot L . \quad (3.1)$$

Это выражение хорошо согласуется с бытовым понятием «физической» работы. Если мы хотим поднять груз на четвертый этаж, работа будет, разумеется, больше, чем при подъеме на второй. Далее, каждый понимает, что более тяжелый груз нести труднее. Разумно платить грузчикам за произведение килограммов (или тонн), на метры подъема. Точнее, размерность работы – ньютон·метр = джоуль (Дж в системе СИ) или дина·см = эрг (СГС).

В то же время субъективное ощущение работы может отклоняться от этого определения. Гораздо легче поднять по лестнице два груза в 40 кг по очереди, чем 80 кг за

один прием. Груз в 160 кг вообще вряд ли кто возьмется носить в одиночку, и только штангисты поднимают такой вес на короткое время. Для человека восприятие затраченной работы нелинейно – как в отношении развиваемой силы, так и пути (усталость). Скорее смысл работы не физиологический, а экономический. Если извлечь из шахты вдвое больше угля, то и получить за него можно вдвое больше. Работа, следовательно, дает некий полезный продукт: его количество просто пропорционально работе.

Если сила на пути L переменная, нужно разделить весь путь на малые участки Δx и просуммировать:

$$A = \sum F_j \cdot \Delta x_j = \int_0^L F \cdot dx . \quad (3.2)$$

Если построить график зависимости силы от координаты, легко видеть, что работа определится, как площадь криволинейной трапеции (рис. 3.1).

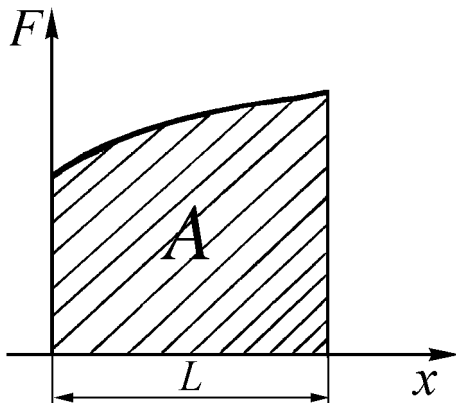


Рис. 3.1.

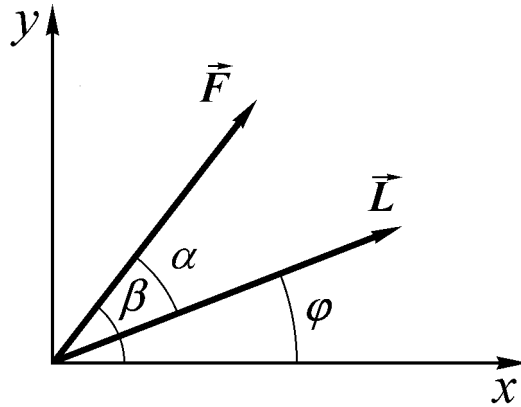


Рис. 3.2.

До сих пор мы считали, что сила F направлена вдоль перемещения L . Очевидно, что переносить тяжелый рюкзак по горизонтальной (особенно по ровной) дороге легче, чем поднимать его на такое же расстояние. Теперь мы можем сказать, что горизонтальное перемещение требует меньшей работы. Но в обоих случаях сила, с которой мы действуем на груз, равна его весу. Отличаются направления перемещений. Разумно допустить, что играет роль в основном проекция силы F_L на направление перемещения:

$$A = F_L \cdot L = FL \cos \alpha , \quad (3.3)$$

где α – угол между F и L . Из второго выражения видим, что работу можно записать и как $F \cdot L_F$, то есть произведение силы на проекцию перемещения на направление силы.

В общем случае, если векторы F и L направлены по-разному, разложим их по осям. Три компоненты силы работают в своих направлениях:

$$A = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y + F_z \cdot \Delta z , \quad (3.4)$$

Можно ось x выбрать вдоль перемещения. Тогда $\Delta y = \Delta z = 0$, $\Delta x = L$ и $A = F_L \cdot L$. Или, выбирая ось x вдоль силы, получим $A = F \cdot L_F$. Мы уже знаем, что два последних выражения одинаковы и равны также $FL \cos \alpha$. Менее очевидно, что при любых направлениях осей (3.4) даст тот же самый результат. Покажем это для векторов, расположенных в плоскости xy (рис. 3.2). Если \mathbf{L} имеет угол φ с осью x , а \mathbf{F} направлена под углом β к этой оси, то из (3.4) получим:

$$A = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y = F \cos \beta \cdot L \cos \varphi + F \sin \beta \cdot L \sin \varphi = FL \cdot \cos(\beta - \varphi).$$

Угол $(\beta - \varphi)$ – это и есть угол α между векторами.

Произведение двух векторов, вычисляемое по правилам (3.3, 3.4), называется их **скалярным произведением**: из двух векторов получается скаляр, т.е. просто число – никуда не направленная работа. Короче ее записывают так:

$$A = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{L}). \quad (3.5)$$

Заметим, что скалярное произведение обозначают, заключая вектора в **круглые скобки**. Квадратные обозначают совсем другое – **векторное** произведение, с которым мы познакомимся позже.

Независимость работы от поворотов системы координат называют короче **инвариантностью** (от латинского *invariantis* – неизменяющийся). Инвариантность – это важное свойство скалярной величины.

Конечно, не любая комбинация компонент двух векторов даст инвариантную величину. Например, выражение:

$$S = F_x \cdot \Delta x^2 + F_y \cdot \Delta y^2 + F_z \cdot \Delta z^2,$$

как легко убедиться, меняется при поворотах системы координат (достаточно взять силу и перемещение, направленные вдоль оси x , а затем рассмотреть повороты осей x, y). В частности, значение S можно обратить в нуль. Величины, которые так легко изменить и даже уничтожить, не могут иметь какого-либо значения. По выражению Э. Шредингера, в такой величине нет ни смысла, ни интереса. Поэтому-то в физике не используются «конструкции», подобные S . А вот работа A при повороте осей не изменяется. Независимость работы от направления осей не только удобна, но и необходима!

Компоненты вектора не инвариантны, и поэтому отдельно взятая компонента не составляет законченной физической величины. При повороте осей все они изменяются, одна или даже две из них могут обратиться в нуль. Но тогда возрастет оставшаяся компонента; вектор в целом никаким поворотом нельзя сделать нулевым. Полностью вектор задается всеми тремя (на плоскости – двумя) компонентами. Заметим, что любому вектору можно сопоставить инвариант – скалярное произведение вектора на себя. Например,

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \equiv F^2.$$

Это попросту квадрат длины вектора (теорема Пифагора), независимость которого от направления осей очевидна.

Правильное физическое уравнение должно иметь в обеих частях величины одной геометрической природы. Например, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ – с этой точки зрения правильное уравнение (вектор равен вектору). При любых изменениях системы координат оно не нарушится. Если же где-то приравниваются компонента вектора и скаляр, допустим $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) = ma_x$, то такое уравнение не может быть верным. Даже если в одной системе координат равенство случайно выполнится, в другой оно непременно нарушится, так как слева стоит инвариант, а справа – нет. Тем более нельзя приравнивать скаляр и вектор – одна величина не может равняться трем.

Из формул (3.4) и (3.5) видно, что работа может быть нулевой при перпендикулярных \mathbf{F} и \mathbf{L} . Если угол между \mathbf{F} и \mathbf{L} тупой, в частности – когда сила направлена против перемещения, то работа будет отрицательной. Положительная работа получается, когда угол между силой и перемещением острый.

Все же человек под грузом устает и на горизонтальной дороге. Секрет здесь в способе передвижения. Пешеход на каждом шаге слегка приподнимает рюкзак (и самого себя) и затрачивает работу. К сожалению, при опускании эта работа не компенсируется организму, хотя в среднем работа силы, с которой мы удерживаем груз, нулевая.

Работа, производимая в единицу времени, называется **мощностью**:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad \text{или} \quad N = \frac{dA}{dt}.$$

Если сила F действует на движущуюся частицу, то $\Delta A = F\Delta x$, $N = \Delta A/\Delta t = F \cdot \Delta x/\Delta t = F \cdot v$. Если векторы \mathbf{F} и \mathbf{v} имеют разные направления, получится скалярное произведение:

$$N = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}).$$

Например, если тело равномерно вращается по окружности на нити, сила натяжения \mathbf{F} перпендикулярна \mathbf{v} , и работа, а с ней и мощность, развиваемая силой натяжения, нулевая.

Размерность мощности в СИ – ватт: $1 \text{ Вт} = \text{Дж/с}$; в СГС – эрг/с.

Что изменяется в окружающем мире от того, что произведена некоторая работа? Сначала разберем простейший вариант. На что расходуется работа в отсутствие всяких других сил, когда только мы прикладываем к телу силу F ? Примерно такой случай будет, если тело толкать по гладкому льду.

Пусть тело массы m разгоняется силой F . Скорость тела

$$v = v_0 + Ft/m, \quad \text{координата } x = v_0 t + Ft^2/2m.$$

Выразим время t через скорость v в этот момент: $t = m(v - v_0)/F$ и подставим в выражение для работы Fx :

$$A = Fx = v_0 m(v - v_0) + \frac{m(v - v_0)^2}{2} = \frac{m(v - v_0)(v + v_0)}{2}.$$

В последнее выражение не входят ни F , ни x . Видим, что если только F и x таковы, что тело разгоняется от v_0 до v , то работа, произведенная над телом,

$$A = \frac{m(v - v_0)(v + v_0)}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Это значит, что ровно на величину произведенной работы возросла величина

$$K = \frac{mv^2}{2}, \quad (3.6)$$

называемая **кинетической энергией** тела. Такое название тоже не взято с потолка. Мы называем энергичным человека, способного преодолевать сопротивление. Точно так же запас кинетической энергии определяет, например, глубину пробивания пули, движущейся в среде с сопротивлением (то есть x при данной F – силе сопротивления). Действительно, приравнивая энергию K работе, которую способно совершить тело, получим:

$$\frac{mv^2}{2} = Fx, \quad x = \frac{mv^2}{2F}.$$

Таким образом, поставленный только что вопрос – «правильный»; на него имеется вполне разумный ответ. Действительно, о работе можно говорить, что она произведена не зря: она расходуется на увеличение энергии (кинетической в данном случае; других видов мы пока не знаем).

Сила F – по существу сумма всех внешних сил. Таким образом, сумма работ сил, действующих на тело, равна изменению кинетической энергии тела.

Заметим, что изменение кинетической энергии **системы** взаимодействующих тел не равно работе внешних сил. Внутренние силы также могут изменять кинетическую энергию системы. Пусть, например, замкнутая система состоит из двух притягивающихся друг к другу тел. Очевидно, оба тела при сближении будут увеличивать свою кинетическую энергию и в отсутствие внешних сил.

Работа силы и кинетическая энергия явно зависят от системы отсчета. Это ведет к парадоксам. Например, человек давит на стенку вагона, равномерно движущегося со скоростью v относительно земли, с силой F . В системе вагона работа нулевая (нет перемещения), а в лабораторной системе человек за время Δt совершает работу $F \cdot v \Delta t$. (Получается, что заработок грузчика должен зависеть от системы отсчета.) В действительности в инерциальной лабораторной системе отсчета человек, действуя на стенку вагона с силой F , не имеет ускорения. Следовательно, сумма сил, действующая на него, равна нулю. То есть, человек, чтобы не оттолкнуться от стенки, должен на что-то опираться. Скажем, сила трения, действующая на подошвы его ботинок, равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой он давит на стенку. Тогда сумма сил, действующая на человека, равна нулю. Значит и полная работа также равна нулю в любой инерциальной системе отсчета.

Другой парадокс: тело вращается на нити по окружности с постоянной скоростью V . Сила натяжения нити перпендикулярна перемещению, и ее работа нулевая. Но в системе, имеющей скорость V в плоскости вращения, кинетическая энергия тела периодически меняется от 0 до $2mV^2$. Как это возможно? Попробуйте разобраться самостоятельно.

3.2 Потенциальная энергия в поле сил

Мы видели, что работа может приносить в виде результата полезные перемещения тел в случае подъема их против силы тяжести. Рассмотрим более общую постановку, когда тело находится в некотором силовом поле.

Под полем сил подразумевается сила, заданная в каждой точке пространства: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ или $F(x)$ при прямолинейном движении. В поле тяжести вблизи земной поверхности $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, то есть сила постоянна. Но, вообще говоря, сила вполне может быть и переменной.

Пусть вместе с силой F , характеризующей поле (короче – просто полем) действует еще внешняя «наша» сила f . Мы уже знаем, что

$$(f + F)\Delta x = \Delta K = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad \text{или} \quad f\Delta x = -F\Delta x + \Delta K .$$

Мы всегда можем подобрать f так, что $\Delta K \approx 0$, то есть кинетическая энергия не меняется (для этого должно быть $f \approx -F$). Куда же в этом случае пойдет работа нашей внешней силы?

Если определить **потенциальную энергию** так, чтобы ее изменение ΔU было равно $\Delta U = -F\Delta x$, то мы сможем сказать, что **наша** работа, то есть работа силы f , не пропала, а перешла в изменение потенциальной энергии:

$$\Delta A = f\Delta x = -F\Delta x = \Delta U .$$

Вместо того, чтобы всякий раз рассуждать о двух силах, почти уравновешивающих друг друга, для краткости используется именно последнее равенство, то есть потенциальная энергия определяется через силу F :

$$\Delta U = -F\Delta x . \tag{3.7}$$

Однако при этом часто забывают, откуда произошел знак минус в (3.7). Он появился именно потому, что потенциальную энергию тела изменяем мы, прилагая силу $\mathbf{f} = -\mathbf{F}$. Допустим, в поле тяжести мы поднимаем тело массы m на высоту h . Мы прикладываем силу $f = mg$, направленную вверх. Затраченная нами работа $fh = mgh$ положительна. Потенциальная энергия возрастает на mgh . Работа же поля будет $-mgh$, так как сила тяжести направлена вниз. Чтобы получить изменение потенциальной энергии, надо брать работу поля с обратным знаком. **Не забывайте знак минус!**

Так же как и кинетическая энергия, потенциальная энергия представляет собой некоторый резерв работы. Поднятое тело, опускаясь, может приводить в движение другие тела и совершать работу.

При переменной силе надо разбить перемещение на малые участки, в пределах которых сила будет практически постоянной:

$$U(x_2) - U(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} F dx . \quad (3.8)$$

Задав значение U в одной точке, можно согласно (3.8) определить потенциальную энергию во всех других. То есть, потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной.

Отсутствие выделенного нуля потенциальной энергии приводит к неоднозначности величины U . Этот произвол может вызвать некоторое беспокойство. Но заметим, что всегда требуются **разности** U в двух точках, не зависящие от выбора начала отсчета U . Рассматривая падение камня на пол, можно его потенциальную энергию измерять от положения на полу, а можно – от потолка или от поверхности Земли. И даже от дна Марианской впадины. Скорость удара камня о пол получится во всех случаях одна и та же. Произвольная постоянная (или локализация нуля потенциальной энергии) выбирается из соображений удобства. Кинетическая же энергия имеет вполне определенный нуль при неподвижном теле.

При несовпадении направлений силы \mathbf{F} и элементарного перемещения в пространстве

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\mathbf{F} d\mathbf{r}) . \quad (3.9)$$

При этом **любой** путь интегрирования должен давать один и тот же результат (рис. 3.3). Поля, в которых это получается, называются **консервативными**, или **потенциальными**. Если же разные пути из одной точки в другую дают разные значения работы силы \mathbf{F} , то понятие потенциальной энергии в таком поле не имеет смысла. Потенциальная энергия должна зависеть только от положения в пространстве. В этом смысле говорят о поле потенциальной энергии (скалярном, в отличие от поля силы).

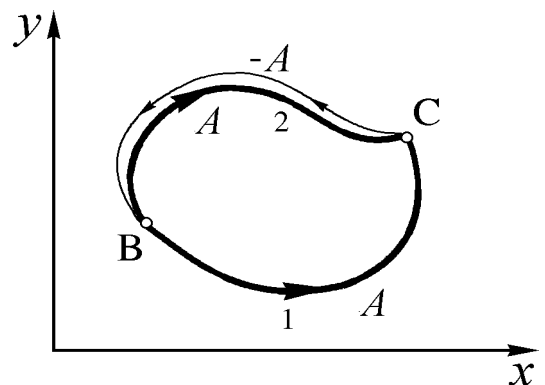


Рис. 3.3.

Если по любому замкнутому контуру работа поля равна нулю, то такое поле потенциально (признак потенциальности поля). Действительно, берем в этом поле два различных пути (1 и 2) из точки В в точку С (рис. 3.3). Если пройти путь 1 из В в С, а

затем вернуться по пути 2 назад, получим замкнутый контур. Полная работа по нему равна разности работ по путям 1 и 2, так как перемещения по 2 изменили знак. Раз работа по замкнутому контуру нулевая, следовательно работы по путям 1 и 2 равны.

Например, сила трения неконсервативна, так как она всегда направлена против перемещения. По замкнутому контуру работа будет ненулевая. «Потенциальной энергии трения» не существует. Сила тяжести консервативна. Можно поднять тело вверх, а затем перенести его в сторону, или наоборот – работа от этого не зависит. Существует потенциальная энергия mgh .

Примеры.

1. При деформации пружины жесткости k на величину x возникает упругая сила, определяющаяся законом Гука: $F = -kx$. При изменении деформации от x_1 до x_2 , изменение потенциальной энергии выразится формулой:

$$U(x_2) - U(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}.$$

Естественно выбрать потенциальную энергию равной нулю при нерастянутой пружине, то есть $U(0) = 0$. Тогда для потенциальной энергии деформированной пружины имеем:

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Это выражение почти всегда наиболее удобное.

2. Ньютоновское поле тяготения. Пусть M – масса Земли. Поместим начало координат в центр Земли. Забегая немного вперед (это будет обсуждаться в гл. 6), примем, что сила, действующая на тело массы m со стороны Земли, определяется формулой:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3} \cdot \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор тела. Введем малое перемещение Δr , направленное вдоль радиуса. (Поперечные перемещения не дают вклада в работу, откуда и следует потенциальность гравитационного поля). Изменение потенциальной энергии при перемещении тела из точки, отстоящей от центра на r_1 , в точку, отстоящую на r_2 , выразится формулой:

$$U(r_2) - U(r_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{GMm}{r^2} \right) dr = -\frac{GMm}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Удобно принять, чтобы на больших расстояниях потенциальная энергия стремилась к нулю: $U(\infty) = 0$. Тогда имеем:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (3.10)$$

Это стандартный выбор нуля потенциальной энергии для задач, связанных с космическими полетами в поле тяготения Земли. Если же рассматривать тело, все время

остающееся вблизи поверхности Земли, разумно договориться, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль на поверхности Земли: $U(R) = 0$, где R – радиус Земли. Это даст другое выражение потенциальной энергии:

$$U(r) = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (3.11)$$

Разумеется, формулы (3.10) и (3.11) применимы только вне Земли, при $r \geq R$. На рис. 3.4 это нижняя и верхняя кривая; они отличаются на постоянную GMm/R . Оба графика, конечно, дадут одинаковые разности $U(r_2) - U(r_1)$ между любыми двумя точками.

Пусть $r = R + h$, где h – высота над поверхностью земли. Из (3.11) имеем:

$$U(h) = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{GMm}{R(R+h)} \cdot h.$$

При малых высотах ($h \ll R$) в знаменателе можно пренебречь h , и тогда $U(h) \approx (GMm/R^2) \cdot h$. Но GMm/R^2 – это просто сила, с которой Земля притягивает тело массы m на поверхности, то есть mg . Окончательно получаем: $U(h) = mgh$, что согласуется с полученным ранее выражением. На рис. 3.4 эта зависимость – прямая, касательная к (3.11) вблизи поверхности Земли.

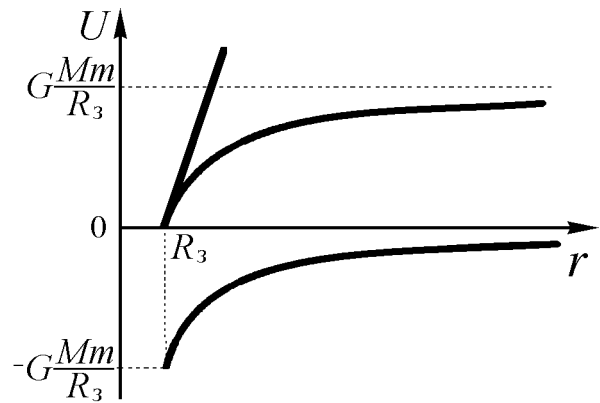


Рис. 3.4.

По третьему закону Ньютона, тело также притягивает Землю. Поэтому не совсем корректно говорить, что mgh или же (3.10) – это энергия тела. Правильнее считать, что она не является собственностью ни тела, ни Земли; это энергия их взаимодействия и принадлежит им совместно. Вообще потенциальная энергия взаимодействия тел не делится между телами, а принадлежит взаимодействующим парам. Например, пусть два тела притягиваются друг к другу с потенциальной энергией взаимодействия U . Помещаем такое же третье тело так, что тела образуют равносторонний треугольник. Всего имеется три пары тел, и энергия станет равной $3U$. Если бы мы считали, что каждое тело имеет $2U$ по числу соседей, то получили бы $6U$ и ошиблись бы в два раза.

Для прямолинейного движения из (3.7) непосредственно следует выражение силы через потенциальную энергию:

$$F = -\frac{dU}{dx}. \quad (3.12)$$

Для того, чтобы получить выражения для компонент вектора силы в пространстве, поступим следующим образом: сдвинемся из точки на Δx , сохраняя y и z постоянными; тогда, в пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ получим для компоненты силы

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (3.13)$$

«Круглая» буква ∂ в (3.13) – знак так называемой **частной** производной, подчеркивающий, что при дифференцировании функции $U(x, y, z)$ по переменной x остальные аргументы (y и z) считаются постоянными.

Аналогично для остальных компонент вектора силы имеем

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} .$$

Тогда полный вектор силы можно записать в виде:

$$\mathbf{F} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right) \equiv -\nabla U . \quad (3.14)$$

Здесь \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные векторы по осям. Значок ∇ (набла) символически обозначает процедуру вычисления, стоящую в скобках. Это же выражение называется «градиент U » и записывается еще одним способом:

$$\text{grad}U \equiv -\nabla U .$$

Для ньютоновского потенциала поля тяготения, рассмотренного выше,

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

Частная производная по x :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -GMm \cdot \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial x} = -GMm \cdot (-1/2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x .$$

Преобразовывая, получим компоненту силы по оси x :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -GMm \cdot \frac{x}{r^3} .$$

Полная сила

$$\mathbf{F} = -GMm \left(\mathbf{i}\frac{x}{r^3} + \mathbf{j}\frac{y}{r^3} + \mathbf{k}\frac{z}{r^3}\right) = -GMm \cdot \frac{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z}{r^3} = -GMm \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} .$$

Мы получили, как и следовало, закон всемирного тяготения.

Потенциальная энергия часто удобнее силы, поскольку функция $U(\mathbf{r})$ – скаляр, и, тем не менее, полностью определяет силовое поле (одна величина вместо трех компонент силы).

В общем случае работа внешних сил изменяет и кинетическую, и потенциальную энергию. Сумма $E = U + K$ называется **полной** энергией (иногда полной механической). Тогда работа внешних сил равна изменению полной энергии:

$$\Delta A = \Delta U + \Delta K = \Delta E . \quad (3.15)$$

Пример. Пусть тело массой $m = 1$ кг поднимают силой $F = 30$ Н на высоту $h = 1$ м. Ускорение силы тяжести g будем считать равным 10 м/с². Работа силы F на пути

h равна $Fh = 30$ Дж. Эта работа идет на увеличение энергии, которая складывается из потенциальной энергии взаимодействия тела с Землей ($mgh - mg \cdot 0 = 10$ Дж) и кинетической энергии $mv^2/2$. Приравнявая работу внешней силы изменению полной механической энергии, получим: $mv^2/2 + mgh = Fh$, откуда $K = mv^2/2 = 20$ Дж. Мы можем теперь найти скорость тела на высоте 1 м: $v = \sqrt{2K/m} = \sqrt{40} \approx 6,3$ м/с. Тело ускоряется, так как сила F больше силы тяжести. То же значение скорости можно получить, найдя ускорение тела $a = (F - mg)/m = 20$ м/с²; тогда $v = \sqrt{2ah}$.

Для любой системы тел полная энергия определяется как сумма видов энергии: надо сложить кинетические энергии всех тел и потенциальные энергии взаимодействия всех пар.

Если работа внешних сил положительна, энергия системы растет. Если же работа отрицательна, энергия уменьшается. В этом случае говорят, что система совершает положительную работу над телами, с которыми она взаимодействует, за счет запасенной в ней энергии.

МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

Глава 4

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Законы сохранения – это в некотором смысле альтернатива динамическому подходу. Конечно, в принципе, динамика Ньютона позволяет решить любую задачу. Но при этом часто возникают препятствия, которые можно разбить на два основных класса:

- Уравнения динамики могут плохо поддаваться решению, особенно для сложных систем. Часто динамическое описание оказывается излишне детализированным. Нам, может быть, ряд тонкостей вообще не интересуют, однако мы вынуждены всякий раз составлять большие системы уравнений и пытаться их решать.
- Динамика требует знания всех важных сил. Между тем ясно, что все существующие в природе силы никогда не будут точно известны. В особенности это касается внутренних взаимодействий в любом реальном теле.

Законы сохранения в ряде случаев позволяют избежать указанных трудностей, и практически во всех случаях – сделать хотя бы качественные, но тем не менее полезные выводы о движении.

4.1 Замкнутые системы. Сохранение импульса

Введем понятие **замкнутой** физической системы. Для начала можно понимать под этим систему, совершенно изолированную (хотя бы путем удаления от всех тел) от любых внешних воздействий. Ясно, что практически такого выполнить нельзя. Хотя бы малые воздействия всегда останутся. Более разумно назвать замкнутой систему, для которой внешние воздействия в каком-то смысле малы. В каком – сейчас выяснится.

Для любой системы полный импульс \mathbf{P} меняется под действием суммы внешних сил \mathbf{F} :

$$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \mathbf{F} \quad \text{или} \quad \Delta \mathbf{P} = \mathbf{F} \Delta t .$$

Если сумма внешних сил \mathbf{F} мала, то незначительным будет и изменение импульса системы $\Delta \mathbf{P}$ за некоторое время Δt . Тогда можно считать, что импульс сохраняется,

то есть, если и изменяется, то пренебрежимо мало:

$$P(t + \Delta t) = P(t) \quad \text{или} \quad P(t_2) = P(t_1).$$

Это и будет **закон сохранения импульса**: конечный импульс системы равен начальному. Разумеется, импульс сохраняется только для замкнутой системы. Видим, что замкнутость – понятие относительное и зависит от внешней силы и времени наблюдения. Так как полного равенства суммы внешних сил \mathbf{F} нулю практически не бывает, важно, чтобы произведение $F\Delta t$ было малым по сравнению с характерными значениями импульсов тел системы. Даже маленькая сила в течение длительного времени может заметно изменить полный импульс. Наоборот, если время Δt мало, то и при значительной внешней силе изменение импульса будет малым, то есть приближенно импульс будет сохраняться. Например, часто закон сохранения импульса применяют в задачах с коротким временем взаимодействия тел (удар, выстрел) даже при наличии внешних сил.

Примеры.

1. Если Земля сталкивается с астероидом, то систему (Земля + астероид) можно считать замкнутой на интервале времени порядка недели, хотя на оба тела с большой силой действует Солнце. Теперь рассмотрим эту же систему на промежутке времени в 3 месяца. За это время импульс системы (в основном, конечно, Земли) повернется на прямой угол и его изменение будет существенным: $\Delta P = P \cdot \sqrt{2}$. Тогда, конечно, систему нельзя считать замкнутой.
2. Пусть охотник, стоя в лодке, стреляет под углом α к горизонту. Какую скорость приобретет лодка в результате отдачи?

Обычно говорят, что в горизонтальном направлении не видно внешних сил, и горизонтальная компонента импульса должна сохраняться. Начальный импульс нулевой, и можно написать равенство импульсов до и после выстрела:

$$P_x(\text{ до }) = 0 = Mu_x + mv \cos \alpha = P_x(\text{ после }),$$

откуда $u_x = -mv \cos \alpha / M$ (M – сумма масс охотника и лодки). Посмотрим, однако, что будет с вертикальной компонентой. Время выстрела Δt порядка L/v , где L – длина ствола. Подставляя $L = 1$ м и $v = 500$ м/с, получаем $\Delta t \approx 2 \cdot 10^{-3}$ с. Характерный импульс по вертикали $P_y = mv \sin \alpha$ при $\alpha = 30^\circ$ равен $0,01 \cdot 5 \cdot 10^2 / 2 = 2,5$ кг·м/с в системе СИ. Чтобы нарушить сохранение вертикального импульса за время выстрела Δt , нужна внешняя сила порядка $P_y / \Delta t = 2,5 / 2 \cdot 10^{-3} \approx 10^3$ Н = 100 кг. Если пренебрегать горизонтальными силами, то с тем же основанием можно пренебречь и вертикальными: вес лодки и охотника вначале компенсирован архимедовой силой. Поэтому лодка приобретет и вертикальную скорость $u_y = mv \sin \alpha / M$, направленную вниз,

а полная скорость лодки будет $u = -mv/M^1$. Затем лодка начнет погружаться, и только через несколько колебаний (т.е. несколько секунд) она полностью потеряет вертикальный импульс (система станет незамкнутой по вертикали). Решение, пренебрегающее вертикальной скоростью, скорее подходит для стрельбы с бронепоезда, опирающегося на жесткие рельсы. Конечно, мы для упрощения предполагали жесткую связь лодки и охотника.

Встречаются случаи, когда система не полностью замкнута, то есть имеется внешняя сила $\mathbf{F} \neq 0$, но все же сохраняется проекция импульса, перпендикулярная \mathbf{F} . Например, при полете тела в поле тяжести сила $m\mathbf{g}$ направлена вертикально, и **горизонтальная** проекция импульса сохраняется (если пренебречь сопротивлением воздуха). При ударе упругого тела о стенку, если нет трения, сохраняется составляющая импульса, параллельная стенке (сила взаимодействия перпендикулярна стенке).

Мы получили закон сохранения импульса из законов Ньютона. Однако в физике часто нельзя однозначно разделить аксиомы и теоремы. Покажем (следуя курсу Р.Фейнмана), что сохранение импульса естественно вытекает из симметрии взаимодействий.

Сначала рассмотрим столкновение двух одинаковых тел с одинаковыми по величине, но противоположно направленными скоростями (рис. 4.1а). Пусть происходит абсолютно неупругий удар, то есть после соударения образуется единое тело. Очевидно из симметрии, что получившееся тело после удара будет неподвижным (в исходной системе отсчета). Тогда имеем равенство

$$mv + m \cdot (-v) = 0.$$

Пока это просто алгебраическое тождество: справа записан результат сложения. Но можно понимать это равенство и как закон сохранения импульса (в данном частном случае). Слева имеем импульс системы до удара, справа – после удара (произведение массы получившегося тела на нулевую скорость).

Рассмотрим то же соударение в системе отсчета, которая связана со вторым телом до удара. Для перехода в эту систему нужно ко всем скоростям прибавить v (рис. 4.1б), и получим тождество:

$$m \cdot 2v + m \cdot 0 = 2m \cdot v.$$

Отсюда видно, что масса суммарного тела должна быть суммой масс «реагентов». Только при этом условии такое равенство выполняется в новой (и несложно показать, что в любой) системе отсчета. Скорость же при столкновении одинаковых тел равна средней арифметической из скоростей до удара.

Теперь пусть сталкивается тело массы $3m$, движущееся со скоростью v , с неподвижным телом m . Представим себе, что тело массы $3m$ составное ($2m + 1m$) и что сначала ударяется передняя масса $1m$. Из предыдущих рассуждений понятно, что получится составное тело массы $2m$, имеющее скорость $v/2$. Теперь пусть налетает со скоростью v оставшаяся масса

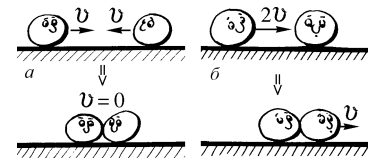


Рис. 4.1.

¹На самом деле лодка толкает окружающую воду. Кроме массы M , двинется примерно такая же масса воды. Поэтому довольно большая импульсная сила реакции воды во время выстрела появится. Из-за нее и горизонтальная, и вертикальная скорость уменьшатся, возможно, в два раза, но не до нуля (это означало бы жесткое закрепление лодки), но все равно u_x и u_y имеют один порядок величины.

$2m$ и образуется тело массы $4m$ имеющее (среднюю арифметическую) скорость $3v/4$. Опять можно записать:

$$3m \cdot v + m \cdot 0 = 4m \cdot \frac{3v}{4}.$$

Снова суммирование масс позволяет одновременно прибавить к каждой скорости одинаковую величину и таким образом рассмотреть столкновение в любой системе отсчета. Подобные же выкладки можно провести для любой комбинации масс. Оказывается, что сумма произведений масс тел на их скорость равна произведению полной массы образовавшегося тела на его скорость. А это и есть закон сохранения импульса.

На первый взгляд, применение составных тел – это «неосторожный» прием. Что если тела сплошные? На самом деле, хотя такие последовательные удары, конечно, частный случай, но реально тела взаимодействуют отнюдь не сразу всей массой. Например, при ударе стержней по ним от места контакта распространяется волна сжатия, и материал вовлекается во взаимодействие хоть и быстро, но постепенно. Значение закона сохранения импульса в том и состоит, что он выполняется абсолютно независимо от деталей взаимодействия, их можно даже не знать. «Доказать» закон, а лучше сказать – угадать его можно только для специальных частных случаев, зная что-то о взаимодействии. Окончательно же убедиться в верности закона сохранения импульса можно только на практике.

Рассматривая **изменение** импульса, например, каждого из соударяющихся тел по отдельности, можно прийти к необходимости введения внешних воздействий. Силу естественно будет определить как

$$F = \frac{dP}{dt}.$$

Это будет второй закон Ньютона. Далее, из закона сохранения импульса видно, что при взаимодействии пары любых тел $F_{12} = -F_{21}$. Тогда изменения импульсов партнеров будут противоположны. А это уже – частный случай третьего закона Ньютона. Конечно, все эти рассуждения требуют обобщения и опытной проверки. Сейчас эту проверку можно считать выполненной. Достаточно представить себе изобилие действующих механизмов. Все они подчиняются механике Ньютона.

4.2 Закон сохранения энергии

Снова рассмотрим замкнутую (или почти замкнутую) систему. Изменение энергии любой системы равно работе внешних сил:

$$\Delta E = \Delta A \quad \text{или} \quad \Delta E = N \Delta t.$$

Замкнутой можно считать систему, для которой в течение заданного промежутка Δt мощность внешних сил N достаточно мала. Работа, производимая внутренними силами, остается в системе: она только приводит к перераспределению между видами энергии. Как и с импульсом, получаем закон сохранения

$$E(t_2) = E(t_1)$$

для замкнутой системы. Например, бросим вверх камень со скоростью V . Замкнутой системой будет (камень+Земля). Энергия этой системы

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh,$$

если не писать собственных энергий Земли и камня, не меняющихся в таком опыте. Кинетической энергией Земли можно пренебречь. Из закона сохранения энергии $mv^2/2 + mgh = mV^2/2$. Можно найти скорость v на любой высоте в одну строчку: $v = \sqrt{V^2 - 2gh}$. Легко находится и максимальная высота подъема: при $v = 0$ будет $h = V^2/2g$. Из динамики полета этот результат получается гораздо сложнее, причем пришлось бы находить ненужные в этой задаче зависимости h, v от времени.

Если учесть спадание силы тяжести, потенциальная энергия взаимодействия тела с Землей $U = -GMm/r$. На бесконечности (реально большом удалении, то есть на много радиусов Земли R) $U = 0$. Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r},$$

где r – текущий радиус, v – скорость тела на этом радиусе (обратите внимание на знаки!) С удалением от Земли потенциальная энергия растет, кинетическая падает. Если v упадет до нуля на бесконечности, то скорость запуска V будет называться **второй космической**: $V_2 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2gR} \approx 11$ км/с. (Первая космическая скорость V_1 – это скорость обращения на низкой орбите, когда центростремительное ускорение $V_1^2/R = g$. Видно, что $V_1 = \sqrt{gR} \approx 8$ км/с). Заметим, что при постоянной силе тяжести улететь на бесконечность нельзя ни при какой скорости: потенциальная яма mgh оказывается бесконечно глубокой. (Подробнее о потенциальных ямах мы поговорим в п. 4.4).

Что будет, когда брошенный вверх камень упадет на Землю? И кинетическая, и потенциальная энергия исчезнут. Можно было бы сказать, что при ударе энергия не сохраняется. Но более плодотворным оказался другой подход. При ударе происходит деформация и нагрев камня и места падения на Земле. Изменению температуры оказалось возможным сопоставить **тепловую энергию**, количество которой строго соответствует рассеявшейся механической. В рамках механики этого доказать нельзя, и мы пока просто примем к сведению существование тепловой энергии. Известно, что возможен и обратный переход, когда тепловая энергия преобразуется в механическую. На этом принципе работают тепловые двигатели, примером которых является паровоз.

Законы сохранения позволяют во многих случаях предсказать результат, не рассматривая сложной динамики. Полезно в любой задаче прежде всего прикинуть, не применимы ли здесь законы сохранения.

Задача. Почему при бросании камня можно не учитывать кинетическую энергию Земли, хотя импульсы Земли и камня по величине одинаковы?

4.3 Соударения тел. Внутренняя энергия системы

Особенно плодотворным оказывается совместное применение законов сохранения энергии и импульса. Часто, не зная деталей процесса, только из этих законов можно сделать важные выводы.

При всякого рода ударах, происходящих за короткое время, лучше всего выполняется условие замкнутости системы. Рассмотрим сначала взаимодействие, при котором кинетическая энергия не уменьшается (то есть не переходит в другие виды). Такое взаимодействие называется **абсолютно упругим**.

Сначала ограничимся случаем «центрального» удара, когда тела все время движутся вдоль одной прямой. Примером может служить лобовое столкновение стальных шаров. Пусть тело массы m_1 налетает на тело массы m_2 . Скорости тел до удара v_1 и v_2 направлены вдоль оси x (рис. 4.2). Скорости после удара обозначим u_1 и u_2 . Поскольку тела образуют замкнутую систему, а удар упругий, сохраняются импульс и энергия:

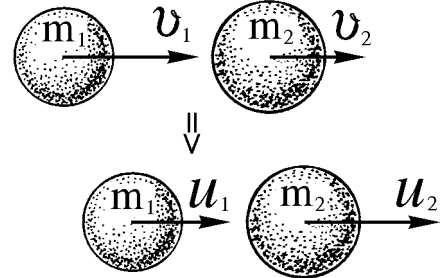


Рис. 4.2.

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 ,$$

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} .$$

Исключая u_2 , можно получить очень громоздкое квадратное уравнение для u_1 . Вместо этого, чтобы упростить вычисления, проведем следующие преобразования. Умножим второе уравнение на 2 и перенесем в левую часть члены, относящиеся к первому телу (с индексом 1), а в правую часть – с индексом 2:

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) ,$$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2) .$$

Поделим нижнее уравнение на верхнее и получим:

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 .$$

Последнее уравнение вместе с законом сохранения импульса образуют систему из двух линейных уравнений. Эта система имеет единственное решение:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} , \quad u_2 = \frac{2m_1v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2} .$$

Выражение для u_2 получается из u_1 заменой индексов 1 на 2 и 2 на 1. Так и должно быть, поскольку исходные уравнения симметричны относительно индексов. Такая проверка на симметрию часто бывает полезна в физике.

Но ведь исходная система сводилась к квадратному уравнению, имеющему два решения! Второе решение мы потеряли при делении уравнений. На нуль делить нельзя, поэтому надо проверить решение

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2.$$

Очевидно, что оно удовлетворяет исходным законам сохранения. Но каков его смысл? Частицы сохранили свои начальные скорости и как будто пролетели, не замечая друг друга.

Из законов сохранения никак не следует, что соударение обязательно произойдет. Законы пишутся точно так же в случае, если скорости направлены вдоль одной оси, но частицы движутся не по одной прямой. Поэтому второе решение можно истолковать как промах. Другое истолкование – это начальное состояние (до соударения), которое обязано удовлетворять законам сохранения. Мы видим, что второе решение, которое часто не замечают, имеет глубокий смысл.

Рассмотрим частные случаи. Может быть, самый интересный из них – когда массы тел равны, $m_1 = m_2$. Тогда после удара имеем

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1.$$

При абсолютно упругом соударении одинаковых тел они просто обмениваются скоростями. В частности, если на неподвижный ($v_2 = 0$) бильярдный шар налетает «в лоб» другой шар, то налетающий останавливается, а покоившийся приобретает его скорость. Такая картина легко воспроизводится в эксперименте, несмотря на некоторую неупругость удара и вращение шаров.

Другой предельный случай – соударение тела с неподвижной стенкой (которую можно понимать как тело бесконечной массы), то есть $v_2 = 0$ и $m_2 = \infty$. После удара $u_1 = -v_1$, $u_2 = 0$. Интересен также обратный случай, когда тяжелая стенка налетает на тело ($m_1 = \infty$, $v_2 = 0$). Тогда получим

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = 2v_1.$$

Легкое тело приобретает после удара тяжелого удвоенную скорость. Этот результат легко получить и из предыдущего, если перейти в систему отсчета, где стенка покоится, а затем вернуться в исходную систему.

Теперь рассмотрим более сложную задачу. Пусть масса m со скоростью V налетает на покоящееся тело массы M . Внутри второго тела есть пружина с коэффициентом упругости k . Если пружина сожмется на величину x , то она зафиксируется защелкой (рис. 4.3). Энергию сжатия пружины $kx^2/2$ для краткости обозначим Q .

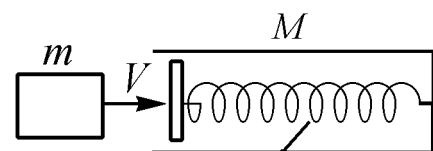


Рис. 4.3.

Такая механическая система моделирует неупругий удар, который может происходить в реальных ситуациях. Запишем законы сохранения:

$$mV + 0 = mu_1 + Mu_2 ,$$

$$\frac{mV^2}{2} + 0 = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} + Q .$$

Можно получить квадратное уравнение, исключив u_1 или u_2 . Но полезнее опять обходной путь. Менее громоздкие формулы получаются в системе центра масс (с.ц.м.).

Скорость этой системы V_c равна отношению полного импульса системы тел к ее полной массе:

$$V_c = \frac{mV}{m + M} .$$

Для перехода в с.ц.м. надо отнять V_c от каждой скорости:

$$v_1 = V - V_c = \frac{MV}{m + M} \quad \text{и} \quad v_2 = -\frac{mV}{m + M} .$$

Полный импульс $mv_1 + Mv_2$ в с.ц.м., разумеется, равен нулю. Импульсы тел до взаимодействия по величине одинаковы и равны

$$\frac{mM}{m + M}V \equiv \mu V .$$

Комбинация масс $\mu = mM/(m + M)$ называется **приведенной массой** системы. Отметим, что эта масса, характеризующая систему как целое, отнюдь не будет суммой масс тел. Приведенная масса меньше наименьшей из масс тел, при одинаковых массах $m = M$ получаем $\mu = m/2$.

Из сохранения импульса как во время удара, так и после импульсы тел всегда будут противоположны: $p_1 + p_2 = 0$. Кинетическую энергию запишем через импульсы:

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2M} \equiv \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) = \frac{p^2}{2\mu} .$$

Опять появилась приведенная масса. Подставляя начальный импульс μV , найдем полную начальную энергию системы в с.ц.м.: $E_0 = \mu V^2/2$. Теперь закон сохранения энергии пишется очень просто:

$$\frac{p^2}{2\mu} + Q = \frac{\mu V^2}{2} .$$

Отсюда находим импульс и скорость каждого тела после взаимодействия:

$$p = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q} ,$$

$$u'_1 = -\frac{\sqrt{2\mu}}{m} \sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q} , \quad u'_2 = \frac{\sqrt{2\mu}}{M} \sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q} .$$

Выбор знаков ясен: направления скоростей меняются на противоположные. Для обратного перехода в лабораторную систему нужно добавить к каждой скорости V_c :

$$u_1 = \frac{m}{m+M}V - \frac{\sqrt{2\mu}}{m} \sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q}, \quad u_2 = \frac{m}{m+M}V + \frac{\sqrt{2\mu}}{M} \sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q}.$$

Теперь рассмотрим частные случаи.

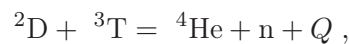
1. $Q = 0$ (упругий удар). Хотя Q и стоит в формулах, ничто не мешает считать его нулевым. Скажем, скорости налетающего тела могло не хватить для продавливания пружины до защелки, и пружина вернулась в исходное состояние. Тогда получаем уже знакомые формулы

$$u_1 = \frac{m-M}{m+M}V, \quad u_2 = \frac{2m}{m+M}V,$$

следующие из решения задачи об упругом ударе при $v_2 = 0$.

2. $Q > 0$ (неупругий удар). Для этого как минимум надо, чтобы начальная кинетическая энергия в с.ц.м. $\mu V^2/2$ превышала Q . (Может показаться, что нужно $mV^2/2 > Q$, но этого недостаточно: часть энергии налетающего тела идет на разгон второго). Если масса M очень мала, потребуется огромная начальная энергия $mV^2/2 \gg Q$. При малом превышении порога, то есть $\sqrt{\mu V^2/2 - Q} \approx 0$, обе скорости равны V_c , а в с.ц.м. тела останавливаются. Такое решение описывает, например, химическую реакцию, требующую затрат внешней энергии.
3. $Q < 0$. Этот случай описывает реакцию с тепловыделением. В этом случае механическим аналогом будет система с уже сжатой пружиной, легкое прикосновение к которой освобождает запасенную энергию. Кинетическая энергия при взаимодействии возрастает.

Например, при термоядерной реакции дейтерия и трития выделяется значительная энергия $|Q| = 17,6$ МэВ (17,6 миллионов электронвольт; электронвольт – удобная для атомной физики единица энергии: $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$). Реакция записывается так:



где D – ядро дейтерия (тяжелый водород с массой ядра 2), T – трития (сверхтяжелый водород, масса 3), He – гелия (масса 4), n – нейтрон (масса 1). Поскольку в реакции ожидается значительное выделение энергии, кинетическими энергиями до удара вообще можно пренебречь (они порядка 10 кэВ). Тогда можно считать, что мы находимся в системе центра масс. Поскольку импульсы противоположны, быстрее летит легкая частица. Кинетические энергии продуктов $p^2/2m$ делятся обратно пропорционально массам – в отношении 4/5 к 1/5. Нейтрон получает основную долю энергии – 14 МэВ, а на долю ядра гелия (α – частицы) остается 3,6 МэВ. Заметим, что только α – частицы нагревают реакционную смесь и способствуют продолжению реакции, а нейтрон

улетает из системы практически без взаимодействия, так как он не заряжен. Нейтроны могут использоваться для производства изотопов в т.н. бланкете (англ.: одеяло) либо в военных целях (нейтронная бомба).

Другой пример процесса с выделением энергии – выстрел из пистолета, пушки и пр. Основная энергия передается легкой пуле, но и оружие испытывает отдачу. Если бы масса пистолета равнялась массе пули, то и стрелку, и его противнику причинялся бы примерно одинаковый ущерб.

Из рассмотренной задачи видно, что не вся кинетическая энергия системы может видоизменяться при взаимодействиях. Для произвольной системы суммарная кинетическая энергия

$$K = \sum \frac{m_j v_j^2}{2}.$$

Скорость центра масс $\mathbf{V} = (\sum m_j \mathbf{v}_j) / (\sum m_j)$. Скорость каждой частицы представим как сумму $\mathbf{V} + \mathbf{u}_j$, где \mathbf{u}_j – скорости в с.ц.м. Получаем:

$$K = \sum \frac{m_j V^2}{2} + \sum \frac{m_j u_j^2}{2} + \sum m_j (\mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_j).$$

Последняя сумма равна нулю (постоянную скорость \mathbf{V} можно вынести за знак суммирования, а оставшийся множитель $\sum m_j \mathbf{u}_j$ – полный импульс, в системе центра масс по определению равный нулю). Поэтому

$$K = \sum \frac{m_j V^2}{2} + \sum \frac{m_j u_j^2}{2}.$$

Первое слагаемое можно истолковать как энергию движения системы как целого со скоростью \mathbf{V} . Эта часть энергии не зависит от взаимодействий внутри системы и не изменяется со временем. Но она зависит от системы отсчета; ее можно сделать равной нулю, перейдя в систему центра масс. Вторая часть называется **внутренней кинетической энергией** системы и может перейти, например, в потенциальную или в тепло. Для рассмотренной выше задачи внутренняя энергия равна $\mu V^2/2$.

Заметим, что такие, вроде бы и примитивные, механические примеры очень способствуют пониманию даже сложных задач. Всегда полезно задачу максимально упростить, чему помогают механические модели.

4.4 Движение в полях. Потенциальные кривые

При заданном силовом поле прямой путь отыскания движения – сначала найти скорость по ускорению, а затем уже координату. Закон сохранения энергии позволяет решить такую задачу «в одно действие», то есть полностью описать движение (а не только найти характерные точки вроде максимальной высоты). Вначале проведем качественный анализ движения в заданном потенциальном поле.

Пусть график $U(x)$ имеет вид, показанный на рисунке 4.4. Закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = E$$

позволяет сразу сделать полезные выводы. Полная энергия E постоянна и задана, а кинетическая энергия положительна. Поэтому движение возможно только при условии $U < E$.

Проведем на рисунке несколько возможных **уровней энергии** E_1, E_2, E_3, \dots . При полной энергии, равной E_1 , график U проходит ниже уровня энергии в довольно ограниченной области. В этой **потенциальной яме** только и возможно движение частицы. С приближением к стенке ямы (где $U = E$) кинетическая энергия и, значит, скорость обращаются в нуль. Частица разворачивается и идет назад; движение имеет колебательный характер.

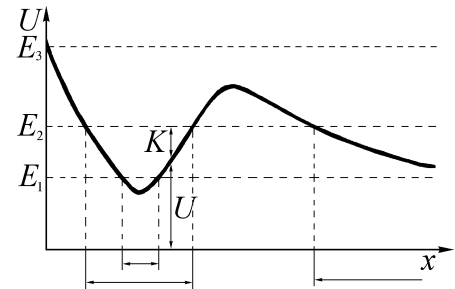


Рис. 4.4.

Если увеличить полную энергию до E_2 , то область движения расширяется. Заметим, что справа появилась еще одна разрешенная область, в которой частица либо сразу движется вправо, либо сначала влево, а после отражения от стенки ямы — вправо. Попасть из одной области в другую частица не может.

Наконец, при энергии E_3 (выше **потенциального барьера**) частица может двигаться во всей изображенной области. Возможно, она уйдет на бесконечность, а может быть, отразится от барьеров, которые на рисунке не поместились.

Очень помогает наглядно представить себе движение такая аналогия. Согнем проволочку точно в виде графика $U(x)$ и поставим вертикально. Тогда потенциальная энергия бусины, надетой на проволочку, mgh , как раз будет иллюстрировать состояние частицы в нашем поле. Уровень энергии задается начальным положением бусины: выше она никак не поднимется. В общем, из состояния покоя потенциальная энергия стремится уменьшиться (бусина соскальзывает ниже). Качественно движение бусины (или шарика в яме такой формы) будет похоже на движение частицы.

Перейдем к полному решению задачи о движении частицы. Из закона сохранения энергии находится скорость в зависимости от координаты:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2(E - U)}{m}}.$$

Поскольку $v = \Delta x / \Delta t$, можно найти интервал времени для прохождения расстояния Δx :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\Delta x}{\sqrt{E - U}} \quad \text{или} \quad dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U}}.$$

Интегрируя, находим движение, правда, в виде обратной функции $t(x)$.

Примеры.

1. Пусть потенциальная энергия постоянна. Без нарушения общности можно считать $U = 0$. Тогда

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2E}} dx, \quad t = \sqrt{\frac{m}{2E}} x, \quad \text{или} \quad x = \sqrt{\frac{2E}{m}} t.$$

Поскольку $E = mv^2/2$, это то же самое, что $x = vt$. Энергетический подход по сравнению со «школьным» в этом простом примере не дает особых преимуществ.

2. Рассмотрим тело массы m , прикрепленное к горизонтально расположенной пружине жесткости k . Тогда потенциальная энергия $U = kx^2/2$. Выражение для приращения времени примет вид:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E-U}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{dx}{\sqrt{2E/k - x^2}}.$$

Для краткости обозначим $2E/k = x_0$ — это максимальное отклонение массы от положения равновесия. Для зависимости $t(x)$ получим:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}.$$

Чтобы найти интеграл (хотя он «табличный»), сделаем замену переменной. Пусть $x = x_0 \sin y$. Тогда имеем:

$$\sqrt{x_0^2 - x^2} = x_0 \cos y; \quad dx = \frac{dx}{dy} \cdot dy = x_0 \cos y \cdot dy.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^y \frac{x_0 \cos y dy}{x_0 \cos y} = \sqrt{\frac{m}{k}} y = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

Теперь можно найти $x(t)$: $x = x_0 \sin(\sqrt{k/m} \cdot t)$. Получили колебательное движение, чего и можно было ожидать сразу.

Значение законов сохранения выходит за пределы физики, распространяясь даже на биологию, экономику, и т.д. Они порождают новый способ мышления, основа которого — не динамика, а ограничения на нее. В физике же законы сохранения настолько важны, что для любой задачи прежде всего стоит подумать, нельзя ли их применить.

МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

Глава 5

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В этой главе рассмотрена динамика вращения систем взаимодействующих частиц и, в частности, твердых тел, а также условия равновесия.

5.1 Уравнение вращательного движения. Момент силы

Вращательное движение имеет свои особенности. Например, открывая дверь, действуют на нее перпендикулярно плоскости. Если давить на дверь вдоль ее плоскости, она просто не сдвинется с места (рис. 5.1). В этой ситуации величина силы не определяет результат однозначно. Конечно, если учесть силы, действующие на дверь со стороны петель, и написать уравнения динамики, можно надеяться полностью решить задачу о движении двери. Но все же кажется, что если явно использовать ограничения, вызываемые неподвижными петлями, которые позволяют двери лишь вращаться, то описание движения заметно упростится.

Рассмотрим более простую задачу. Пусть две точечных массы закреплены на невесомом и жестком стержне, который может вращаться на шарнире (точка O на рисунке 5.2). На тело массы m_1 действует сила F , перпендикулярная стержню. Попробуем описать движение системы.

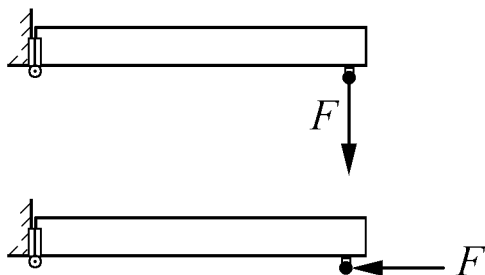


Рис. 5.1.

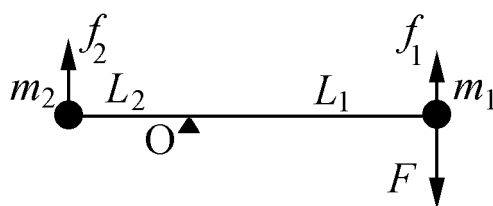


Рис. 5.2.

Для каждой массы напишем второй закон Ньютона:

$$m_1 a_1 = F - f_1, \quad m_2 a_2 = f_2.$$

Здесь $f_{1,2}$ – силы, с которыми стержень действует на соответствующие массы. Обе эти силы, очевидно, направлены вверх (на рисунке), так как составляющей вдоль стержня быть не может, по крайней мере, в первый момент времени: ускорения тел перпендикулярны стержню. При этом ускорение a_1 считаем направленным вниз, (естественно, вдоль силы F), a_2 – вверх. Уравнений для решения задачи не хватает: их всего два, а неизвестных – четыре (f_1, f_2, a_1, a_2).

Для начала немного упростим задачу. Ускорения $a_{1,2}$ явно не независимы. Движения масс – это поворот стержня. Для описания вращения тела линейные координаты, скорости, ускорения неудобны: они разные для разных точек. Лучше будет ввести **угол поворота** φ – он при твердом стержне для всего тела одинаковый. Угол меряется в радианах, то есть просто в единицах (безразмерный).

Вместо скорости тогда вводим **угловую скорость** $\omega = d\varphi/dt$ (размерность $1/c$). Она показывает быстроту вращения тела. Дальше по аналогии **угловое ускорение** $\varepsilon = d\omega/dt$ – это скорость изменения угловой скорости ($1/c^2$). Угловые кинематические величины для твердого тела просто связаны с линейными. Малое перемещение точки на радиусе R от оси вращения равно $\Delta x = R\Delta\varphi$. Отсюда $v = \Delta x/\Delta t = R\Delta\varphi/\Delta t = R\omega$. Аналогично линейное ускорение (тангенциальное) $a = R d\omega/dt = R\varepsilon$.

Используем эти выводы, выразив линейные ускорения через угловые. Получаем

$$a_1 = \varepsilon L_1, \quad a_2 = \varepsilon L_2.$$

Теперь систему уравнений можно переписать в виде:

$$m_1 L_1 \varepsilon = F - f_1, \quad m_2 L_2 \varepsilon = f_2.$$

Число неизвестных уменьшилось до трех, но двух уравнений все еще недостаточно. Необходимое третье уравнение уже нельзя извлечь из кинематики. Теперь, видимо, нужно искать связь между силами f_1 и f_2 , которую определяет стержень.

Есть надежда, что внутренние силы f_1 и f_2 можно найти, рассматривая деформацию стержня. Для этого его надо разбить на малые части и рассмотреть их взаимодействие. Такой путь мало вдохновляет. Хорошо бы вообще избавиться от внутренних сил. Вспомним, что в аналогичной ситуации – при описании поступательного движения центра масс системы – внутренние силы выпадают.

Для исключения внутренних сил используем энергетический подход. Силы, приложенные к концам стержня со стороны тел m_1 и m_2 , согласно третьему закону Ньютона равны по величине и направлены противоположно силам f_1 и f_2 . По отношению к стержню эти силы – внешние. Подсчитаем их работу при повороте стержня на малый угол $\Delta\varphi$ по часовой стрелке:

$$\Delta A = f_1 L_1 \Delta\varphi - f_2 L_2 \Delta\varphi.$$

Заметим, что сила, действующая на стержень со стороны оси, не совершает работу, так как здесь нет перемещения. Работа ΔA должна равняться изменению кинетической энергии стержня. Но для невесомого стержня масса, а с ней и кинетическая энергия, равны нулю. Тогда получаем:

$$\Delta\varphi(f_1L_1 - f_2L_2) = 0 \quad \text{или} \quad f_1L_1 = f_2L_2 .$$

Это и есть недостающее уравнение, замыкающее систему.

Выпишем все уравнения системы по порядку:

$$\begin{aligned} m_1L_1\varepsilon &= f_2 , \\ m_2L_2\varepsilon &= F - f_1 , \\ f_1L_1 &= f_2L_2 . \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на L_1 , второе – на L_2 и сложим почленно. Получим:

$$(m_1L_1^2 + m_2L_2^2)\varepsilon = FL_1 .$$

Отсюда сразу находится угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{FL_1}{m_1L_1^2 + m_2L_2^2}$$

и, следовательно, полностью описывается движение системы.

Энергетический подход, как это часто бывает, не позволяет увидеть многих деталей задачи. В частности, невозможно судить о внутренних силах, не совершающих работы. Полезно рассмотреть систему более детально.

Кажется разумным, что вращение не должно сильно зависеть от устройства стержня, если он достаточно жесткий. Возьмем модель стержня из двух частей (длины их L_1 и L_2), которые могут одним концом поворачиваться в шарнире. Другие концы соединены очень жесткой пружиной (рис. 5.3). Силы реакций со стороны масс f_1 и f_2 слегка изгибают конструкцию. Поскольку модель описывает почти недеформируемый стержень, углы α_1 , α_2 и γ малы и на рисунке сильно преувеличены. Вдоль пружины действует сила ее сжатия T , а вдоль стержней – силы их растяжения G_1 и G_2 . Эти силы действуют именно **вдоль** тел, иначе пружина начнет изгибаться, а легкие стержни начнут вращаться слишком быстро.

Выделим малые участки стержней вблизи прикрепленных тел и запишем для каждого участка (с нулевой массой) второй закон Ньютона. Проектируя на перпендикуляр к пружине, получаем

$$G_1\alpha_1 - f_1 = 0 , \quad G_2\alpha_2 - f_2 = 0 .$$

Считаем синус равным углу, а косинус – единице, так как для почти недеформируемого стержня углы малы. Видно, что силы $G_{1,2}$ в стержне гораздо больше приложенных изгибающих сил $f_{1,2}$. (Известно, что изогнуть и сломать линейку гораздо легче, чем разорвать ее).

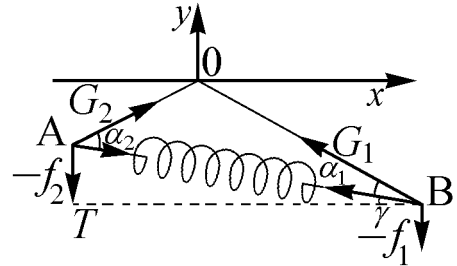


Рис. 5.3.

Тогда, проектируя силы на направление пружины, можно вообще пренебречь проекциями $f_{1,2}$, так что внутренние силы $G_{1,2} = T$: силы растяжения плеч практически равны силе сжатия пружины. Отсюда

$$f_1 = T\alpha_1, \quad f_2 = T\alpha_2.$$

Углы α_1 и α_2 связаны с длинами сторон треугольника теоремой синусов: $\alpha_1/L_2 = \alpha_2/L_1$, откуда имеем уже полученное выше соотношение

$$f_1L_1 = f_2L_2.$$

Разумно ожидать, что и более рафинированные модели жесткого стержня дадут тот же результат. Как всегда, энергетический подход более общий и простой, но зато менее информативный. Из него так и осталось бы неизвестным существование огромных сил, деформирующих стержень.

Вернемся к рассмотренной задаче. Что изменится в решении, если сила F будет направлена не перпендикулярно стержню, а под некоторым углом α ? Разложим вектор F на проекции: F_{\parallel} – параллельную и F_{\perp} – перпендикулярную стержню. Легко понять, что вместо FL_1 в уравнениях везде должно стоять $F_{\perp}L_1$. Продольная составляющая попросту не крутит.

Произведение перпендикулярной составляющей силы на расстояние от оси вращения $M = F_{\perp}r$ называется **моментом силы**. Его можно выразить также через величины векторов и угол между ними: $M = Fr \sin \alpha$. С тем же успехом можно написать $M = F \cdot r_{\perp}$. Проекция r_{\perp} радиуса на перпендикуляр к линии действия силы называется **плечом** силы (рис. 5.4). Если плечо равно нулю, сила ничего вращать не сможет.

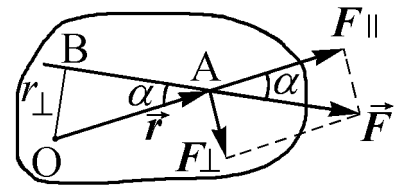


Рис. 5.4.

Если действуют несколько сил F_i , приложенных в различных точках r_i , и тело состоит не из двух, а из любого количества масс m_j на расстояниях L_j от оси вращения, то уравнение, описывающее динамику вращения системы, запишется в виде:

$$I\varepsilon = M,$$

где $I = \sum m_j L_j^2$ – **момент инерции** тела, $M = \sum M_i = \sum F_i r_{i\perp}$ – суммарный момент сил. Момент инерции считается по всем массам, входящим в тело, а в моменте сил учитываются только внешние силы (подробнее об этом см. п. 5.3). Отдельные моменты сил могут быть разных знаков (надо следить, в какую сторону они крутят). Условно можно принять положительным направление против часовой стрелки, т.е. в сторону возрастания угла поворота, определенного стандартным образом. Можно и обратное направление назвать положительным, если это кажется удобнее в конкретной задаче.

5.2 Теорема Штейнера. Вектор момента сил

Момент инерции тела $I = \sum m_j L_j^2$ в уравнении динамики вращения аналогичен массе во втором законе Ньютона. Найдем моменты инерции некоторых тел.

1. Момент инерции тонкого обруча массы m и радиуса R относительно оси, проходящей через центр перпендикулярно его плоскости. При любом разбиении на малые массы m_j , все они отстоят от оси на одинаковом расстоянии R . Тогда $I = \sum m_j R^2 = mR^2$.
2. Сплошной однородный диск (цилиндр); ось та же. Разобьем диск на соосные кольца толщины dr . Масса такого кольца радиуса r :

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr.$$

Здесь $m/\pi R^2$ – масса единицы площади диска, $2\pi r dr$ – площадь кольца. Вклад кольца в момент инерции $dI = r^2 dm = (2m/R^2) \cdot r^3 dr$. Полный момент находится интегрированием;

$$I = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{mR^2}{2}.$$

Как и следовало ожидать, сплошной диск той же массы закрутить легче, чем тонкий обруч. Еще легче, если вся масса в центре: тогда $I = 0$.

3. Стержень длины L , вращающийся вокруг конца:

$$dI = r^2 dm = \frac{m}{L} r^2 dr, \quad I = \frac{m}{L} \int_0^L r^2 dr = \frac{m}{L} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^L = \frac{mL^2}{3}.$$

Если вращать вокруг центра, надо взять две половинки:

$$I = 2(m/2)(L/2)^2/3 = mL^2/12.$$

4. У шара $I = 2mR^2/5$: меньше, чем у цилиндра – масса располагается в среднем ближе к оси. Попробуйте получить I сферы и шара, используя их симметрию. Рассмотрите для этого (одинаковые) моменты инерции вокруг трех взаимно перпендикулярных осей.

Момент инерции для данного тела зависит от положения оси вращения (пример стержня). Обозначим момент относительно оси, проходящей через центр масс, I_0 . Если закрутить тело относительно оси, сдвинутой на вектор \mathbf{b} относительно центра масс, то I изменится:

$$I = \sum m(\mathbf{r}')^2 = \sum m(\mathbf{b} + \mathbf{r})^2 = \sum mr^2 + b^2 \sum m + 2(\mathbf{b} \sum m\mathbf{r}).$$

Здесь \mathbf{r}' – новый радиус-вектор $\mathbf{b} + \mathbf{r}$ к некоторой массе m ; \mathbf{r} – радиус-вектор к той же массе из центра масс. В третьем слагаемом сумма нулевая – она пропорциональна положению центра масс, отмеренному от самого этого центра. Получаем

$$I = I_0 + mb^2 .$$

Это и есть **теорема Штейнера**. Проверяем для стержня: $mL^2/3 = mL^2/12 + m(L/2)^2$. У сплошного диска для оси, проходящей через край, будет $3mR^2/2$.

Аналогия уравнений для вращательного и поступательного движений пока неполна. Второй закон Ньютона связывает векторные величины \mathbf{a} и \mathbf{F} . Не нужны ли вектора при вращении?

Сначала припишем направление кинематическим величинам. Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение обязательно связаны с осью вращения. Вдоль этой оси и определяется направление вектора угла поворота.

В плоскости вращения бессмысленно и пытаться найти направление поворота (хотя свежий человек именно пытается, заявляя, что угловая скорость направлена «по линейной»). Но каждая точка при вращении движется в своем направлении. Выделенного направления в плоскости вращения попросту нет.

Остается еще произвол, какой поворот считать положительным. Принято **правило винта** (буравчика, штопора): поворот направлен туда, куда ввинчивается штопор, если его крутить так же, как вращается тело. Две массы на стержне из п. 5.1 (рис. 5.1) имеют $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, направленные вниз перпендикулярно листу бумаги, что обозначается крестиком в круге \oplus (оперение стрелы, наблюдаемой сзади). Обратное направление обозначают точкой в круге \odot (наконечник стрелы).

Теперь надо направить куда следует (вдоль той же оси) момент сил. Направления двух моментов показаны на рисунке 5.5. Точка O – ось вращения. Заметим, что вектор \mathbf{M} получается из двух векторов \mathbf{r} и \mathbf{F} . В математике для этого случая придумано **векторное произведение** векторов. Для двух векторов \mathbf{r} и \mathbf{F} векторное произведение $[\mathbf{r} \times \mathbf{F}]$ – это вектор, по величине равный $rF \sin \alpha$ и направленный перпендикулярно плоскости, в которой лежат исходные вектора, вдобавок по правилу винта, вращаемого от \mathbf{r} к \mathbf{F} по кратчайшему пути. Тогда короче момент сил запишется как

$$M = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] .$$

Заметим, что менять порядок сомножителей в векторном произведении нельзя – оно изменит знак.

Существует и вращательный аналог импульса. **Моментом импульса** массы m на радиусе \mathbf{r} называется вектор

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] .$$

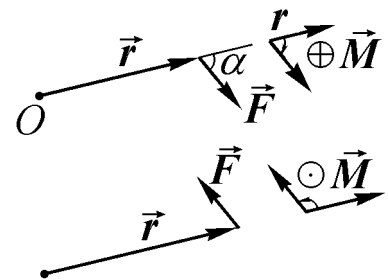


Рис. 5.5.

По величине он равен (импульс-плечо). Найдем скорость изменения \mathbf{L} :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}] + [\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] + [\mathbf{v} \times \mathbf{p}].$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как \mathbf{v} и \mathbf{p} параллельны ($\sin \alpha = 0$). Поэтому, в точном соответствии с законом изменения импульса, скорость изменения \mathbf{L} равна моменту сил:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] = \mathbf{M}.$$

Полезно от векторного произведения уже видна: попробуйте получить последнее уравнение «скалярным» способом. Формальная запись сильно упрощает выкладки, позволяя забыть о синусах и использовать все свойства обычного числового произведения (кроме перестановочности). Для системы \mathbf{L} – сумма $\sum[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ по всем телам системы, а \mathbf{M} будет суммарным моментом внешних сил (почему именно внешних – см. следующий параграф).

Кинетическая энергия вращения твердого тела

$$K = \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{mr_{\perp}^2 \omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}.$$

Опять видим аналогию между поступательным и вращательным движением.

При вращении твердого тела часто можно пользоваться выражением для его момента импульса

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega},$$

аналогичным связи $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ при поступательном движении.

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (для определенности – оси z) с угловой скоростью ω , момент импульса

$$\mathbf{L} = \sum m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \sum m[(\mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{z}) \times \mathbf{v}] = \sum m[\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{v}] + \sum m[\mathbf{z} \times \mathbf{v}].$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор, отмеряемый от какой-либо заданной заранее точки на оси вращения до элемента массы m , \mathbf{v} – скорость этого элемента, \mathbf{z} и \mathbf{r}_{\perp} – составляющие \mathbf{r} вдоль оси вращения и перпендикулярно ей. Учитывая, что скорость \mathbf{v} равна по величине ωr_{\perp} и перпендикулярна \mathbf{r}_{\perp} , можно первую сумму в правой части записать в виде $(\sum mr_{\perp}^2) \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv I\boldsymbol{\omega}$, где I есть момент инерции относительно выбранной оси. Вторая же сумма может быть записана как $\omega \sum m z r_{\perp}$. Получаем

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} + \omega \sum m z r_{\perp},$$

то есть в общем случае момент импульса вращающегося тела не параллелен вектору угловой скорости, а имеет также и перпендикулярную составляющую.

Однако в ряде практически важных случаев это «поперечное» слагаемое обращается в нуль. Например, так бывает при достаточной степени симметрии тела. Если цилиндр вращается вокруг продольной оси, то в каждой плоскости $z = \text{const}$ для любой массы m в положении

r_{\perp} имеется такая же масса в положении $(-r_{\perp})$. Такими ситуациями мы в основном и ограничимся.

При этом связь L и ω наиболее проста:

$$L = I\omega .$$

Примером непараллельности L и ω является вращение стержня, отклоненного от оси (так что стержень описывает коническую поверхность). На рис. 5.6 стрелками показаны моменты импульса верхней и нижней половин. Видно, что перпендикулярная оси вращения составляющая момента импульса поворачивается вместе с движением тела, то есть не является константой. Для изменения L необходим момент силы. Поэтому при таком вращении стержень «сопротивляется», пытаясь вывернуться из креплений. При строго вертикальном либо строго горизонтальном положении стержня направления L и ω совпадают, и тогда вокруг центра масс он может вращаться даже без всяких креплений, по инерции.

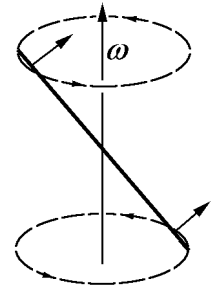


Рис. 5.6.

5.3 Сохранение момента импульса

Подобно импульсу, момент импульса физической системы при определенных условиях сохраняется. Вначале разберем подробнее вопрос о внутренних силах (мы помним, что в случае импульса они выпали в силу третьего закона Ньютона).

Почему внутренние силы не меняют **момента** импульса? Для случая сил, возникающих при соприкосновении тел, это очевидно – они равны по величине и противоположны по направлению, вектор r , проведенный в точку касания, для них один, и их моменты уничтожаются автоматически, при любых направлениях сил.

Но то же верно для **центральных** сил, действующих на расстоянии по линии, соединяющей тела – как сила тяжести или электрическая. Хотя радиус-векторы и будут отличаться, но плечи r_{\perp} взаимных внутренних сил будут одинаковы (рис. 5.7, изображен случай отталкивания).

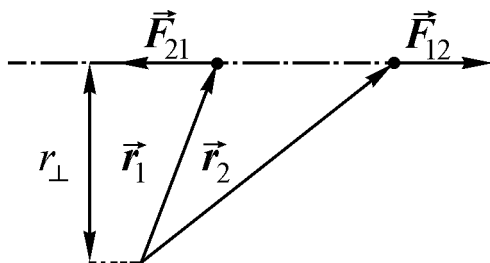


Рис. 5.7.

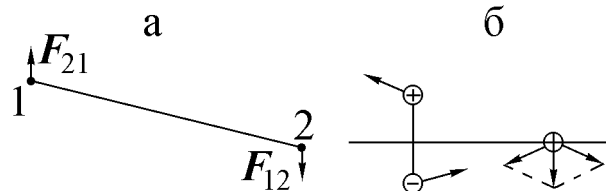


Рис. 5.8.

Ничто не мешает вообразить два тела, взаимодействующих нецентрально. Тогда сумма моментов внутренних сил ненулевая, и тела закрутятся вокруг общего центра

масс (рис. 5.8а). К счастью, в природе пока не найдено такого взаимодействия двух неподвижных отдельно взятых частиц **без внутренней структуры**.

Для частиц со структурой пример построить легко – заряд возле диполя (рис. 5.8б). Диполь – это пара зарядов противоположного знака. Видно, что сумма сил, действующих на заряд со стороны зарядов диполя, при некоторых положениях поперечна линии, соединяющей центр диполя и заряд. Заряд пойдет вниз, а диполь как целое – вверх.

Появится момент импульса, направленный «крестиком» (вращение по часовой стрелке). Но диполь завертится вокруг своего центра в обратную сторону (\odot) и как раз скомпенсирует \oplus – вращение (что и понятно: силы между зарядами центральные).

Два **движущихся** точечных заряда имеют нецентральную магнитную составляющую силы взаимодействия. В этом случае механический момент импульса может меняться (это же относится и к механическому импульсу). Но оказывается, что если учесть момент импульса электромагнитного поля, в сумме будет сохранение. Механическая часть системы «отталкивается» от электромагнитного поля. Это похоже на вращение сегнера колеса – при начальном нулевом моменте импульса колесо начинает вращаться в одну сторону, а вытекающая вода – в другую. Мы пока не умеем учитывать поле. Здесь, как и в случае с тепловой энергией, надо выйти за рамки механики.

Таким образом, **механические** импульс и момент сохраняются лишь приближенно. Но это приближение очень хорошее, пока скорости малы (по сравнению со скоростью света). Поэтому примем, как опытный факт, к тому же подтверждаемый в простых примерах расчетом, что внутренние силы не изменяют момента импульса или, другими словами, не могут вызвать вращения системы в целом:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{\text{внеш}} .$$

Тогда для замкнутой системы сразу получаем **закон сохранения момента импульса**. Для изолированной системы момент внешних сил $\mathbf{M} = 0$, $d\mathbf{L}/dt = 0$, то есть

$$\mathbf{L}(t_2) = \mathbf{L}(t_1) .$$

Момент импульса оказывается постоянным (сохраняется).

Уже неоднократно подчеркивалась аналогия между описаниями поступательного движения материальной точки и вращения твердого тела. Для описания этих движений используются уравнения одинакового вида, лишь для различных переменных.

Заметим (и тут аналогии с поступательным движением уже не будет), что для сохранения момента импульса не обязательна замкнутость системы. Должна равняться нулю сумма моментов внешних сил. При этом сами силы могут присутствовать, имея отличную от нуля результирующую. Этот важный случай подробно рассматривается в следующей главе.

Кроме того, для угловых координат не имеет большого смысла понятие, соответствующее центру масс. Космонавт, находясь в пустоте недалеко от своего корабля,

не может вернуться на него, переместив свой центр масс без «посторонней» помощи – двигателя или каната. Но космонавт **может** изменить пространственную ориентацию, например, повернуться «вниз головой» по отношению к первоначальному положению. Для этого он должен привести во вращение руки; в силу сохранения момента импульса тело начнет вращаться в обратную сторону. Прекратив вращение рук, можно остановиться в желаемом положении. Именно таким образом кошки ухитряются приземлиться на лапы почти из любого положения, падая без всякой опоры. Разница связана с тем, что угловая координата – периодическая. Как и в поступательном случае, можно записать

$$I_{\text{тела}} \cdot \varphi_{\text{тела}} + I_{\text{рук}} \cdot \varphi_{\text{рук}} = 0.$$

Поворот тела на угол π получится при повороте рук, скажем, на 11π , так что суммарный сдвиг «углового центра масс» нулевой. Но угол 11π – это 5 полных оборотов и еще половинка. По отношению к телу как сначала были руки по швам, так и получится после вращения. При поступательном движении такое было бы возможно в мире, где предметы, отодвинутые космонавтом на метр вправо, исчезают и возникают в метре слева.

Рассмотрим примеры, связанные с сохранением момента импульса.

1. Тело m вращается на нити. Нить втягивается через малое отверстие в центре вращения. На тело действует единственная сила – натяжение нити T , и ее момент относительно центра нулевой. Поэтому сохраняется момент импульса $L = mv_{\perp}R = mR^2\omega$. Скорость и угловая скорость с укорачиванием нити возрастают. Энергия тоже растет. При медленном укорачивании нити работа втягивающей силы

$$\Delta A = -T\Delta R = -\frac{mv^2}{R}\Delta R = \frac{m}{2}((v + \Delta v)^2 - v^2) = mv\Delta v.$$

Получаем

$$\Delta v/v + \Delta R/R = 0, \quad \text{или } dv/v + dR/R = 0, \quad \text{или } Rdv + vdR = 0.$$

Последнее равенство – это изменение произведения Rv (поделим на dt и вспомним формулу производной произведения). Мы независимо получили, что в этом процессе сохраняется момент импульса. С уменьшением момента инерции тела его угловая скорость будет возрастать, что часто демонстрируется в фигурном катании. При этом кинетическая энергия растет, и нужно произвести работу (здесь как раз полезна форма $K = L^2/2I$).

2. Нецентральное столкновение шаров. Пусть шар m со скоростью V налетает на такой же шар максимально нецентралью и прилипает. Скорость центра масс будет $V/2$ из сохранения импульса. Считаем начальный момент импульса из центра масс: $L = mVR$. После слипания шары вращаются вокруг центра и тот же L

можно записать как $I\omega = 2 \cdot (7/5) \cdot mR^2\omega$, откуда угловая скорость $\omega = 5V/14R$. Кинетическая энергия центра масс $2m(V/2)^2/2 = (1/2) \cdot mV^2/2$. Энергия вращения $I\omega^2/2 = (5/14) \cdot mV^2/2$. Остаток $(1/7) \cdot mV^2/2$ пойдет в тепло – гораздо меньше, чем при лобовом соударении.

Вообще, если тело одновременно вращается и движется поступательно, его кинетическая энергия распадается на поступательную и вращательную части:

$$K = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где I – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Вращательная часть – частный случай внутренней кинетической энергии.

Момент импульса может зависеть от выбора начала координат, что особенно ясно для одной частицы. Рассмотрим сдвиг системы координат на вектор \mathbf{b} . Новый момент

$$\mathbf{L}' = \sum[\mathbf{r}' \times \mathbf{p}] = \sum[(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \times \mathbf{p}] = \sum[\mathbf{r} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{b} \sum \mathbf{p}].$$

Первое слагаемое – это старый момент импульса. Видим, что \mathbf{L} не зависит от сдвига начала координат, если суммарный импульс равен нулю (т.е. в системе центра масс). Аналогично момент импульса, взятый из центра масс, не зависит от системы отсчета.

5.4 Статика

Часто необходимо определить условия, при которых тела **не** двигаются. Например, это очень важно для зданий, мостов и подобных сооружений. Сюда же примыкают и вопросы прочности. Мы будем рассматривать **статику** – раздел механики, посвященный изучению условий равновесия тел под действием сил – как частный случай динамики. Чтобы тело находилось в покое, должны выполняться очевидные условия:

$$\sum \mathbf{F}_j = 0, \quad \sum \mathbf{M}_j = 0.$$

Рассмотрим примеры.

1. Попробуем поставить однородный стержень длины L в угол комнаты. Пусть стержень составляет угол α с горизонтом и пол гладкий, то есть трения между стержнем и полом нет (рис. 5.9). Возможно ли равновесие? На рисунке изображены силы, которые должны действовать на стержень со стороны Земли (mg), стенки (N_1 и F_1) и пола (N_2). Очевидно, что на ось x имеет отличную от нуля проекцию только сила N_1 . Тогда первое условие равновесия выполняется лишь при $N_1 = 0$. Следовательно, сила трения F_1 также равна нулю, а $N_2 = mg$. Но тогда второе условие равновесия – равенство нулю суммы моментов сил – не выполняется. Выбрав ось вращения, например, проходящей через центр стержня, получим для момента силы N_2 $M = mgL \cos \alpha/2 \neq 0$. Значит, такое равновесие невозможно. Стержень непременно упадет на пол.

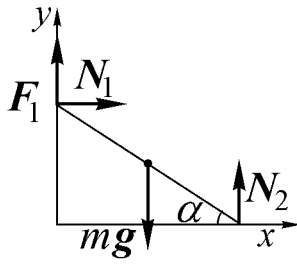


Рис. 5.9.

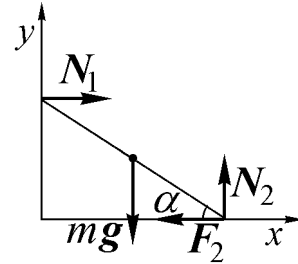


Рис. 5.10.

2. Пусть между стержнем и полом есть трение, а стена гладкая. Возможно ли равновесие теперь? Силы, действующие в этом случае, изображены на рисунке 5.10. Условие сил в проекциях на оси x и y дает:

$$N_2 - mg = 0, \quad N_1 - F_2 = 0.$$

Выберем ось вращения проходящей через нижнюю точку стержня и запишем условие равенства нулю суммы моментов сил:

$$N_1 L \sin \alpha - mg \frac{L}{2} \cos \alpha = 0.$$

Из этих уравнений сразу получаются выражения для всех трех неизвестных сил:

$$N_1 = F_2 = \frac{mg}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad N_2 = mg.$$

Видно, что по этим формулам при малых углах сила трения неограниченно растет. Однако сила трения не может превышать предельного значения $F_2 \leq \mu N_2 = \mu mg$. Значит, полученные значения N_1 , F_2 могут выполняться лишь при углах не меньше некоторого критического α_* . Значение критического угла соответствует случаю, когда сила трения покоя максимальна: $F_2 = \mu N_2$, или $mg/2 \operatorname{tg} \alpha_* = \mu mg$, откуда для критического угла получается соотношение: $\operatorname{tg} \alpha_* = 1/2\mu$. Равновесие возможно лишь при углах больше критического.

Если ставить стержень с меньшим углом (более горизонтально), то формально равновесие возможно только при $F_2 > \mu mg$. Этого можно добиться, только удерживая стержень в нижней точке дополнительной внешней силой. Одно же трение будет неспособно обеспечить устойчивость, и стержень упадет.

Для записи равенства нулю полного момента сил можно было выбрать и любую другую ось. Так, для оси, проходящей через угловую точку O , получим: $N_1 L \sin \alpha - N_2 L \cos \alpha + mgL \cos \alpha/2 = 0$. Убедитесь, что ответ при этом не изменится.

Вообще, если известен момент сил M относительно некоторой оси, момент M' относительно новой оси, сдвинутой параллельно относительно первой на вектор \mathbf{b} , легко

найти:

$$\mathbf{M}' = \sum [\mathbf{r}' \times \mathbf{F}] = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] + \sum [\mathbf{b} \times \mathbf{F}] = \mathbf{M} + [\mathbf{b} \times (\sum \mathbf{F})].$$

Но в статике $\sum \mathbf{F} = 0$, и второе слагаемое обращается в нуль. Момент оказывается инвариантным! Если тело не вращается, то оно не вращается относительно любой неподвижной оси. В силу этого разумно выбирать ось так, чтобы уравнение моментов было максимально простым. В последнем примере, выбрав ось, проходящую через нижнюю точку опоры, мы автоматически обратили моменты двух из четырех сил в нуль, так как плечи сил N_2 и F_2 равны нулю.

Объединим две предыдущих задачи. Пусть коэффициент трения между стержнем и стеной равен μ_1 , а между стержнем и полом μ_2 . Найдем сначала критический угол α_* . Выберем ось вращения, проходящую через нижнюю точку стержня. Условия равновесия дают первые три уравнения, а условия проскальзывания – остальные два:

$$\begin{aligned} N_1 - F_2 &= 0, & N_2 - mg + F_1 &= 0, \\ N_1 L \sin \alpha_* + F_1 L \cos \alpha_* - \frac{mgL \cos \alpha_*}{2} &= 0, \\ F_1 &= \mu_1 N_1, & F_2 &= \mu_2 N_2. \end{aligned}$$

Решая систему из пяти уравнений, получаем критический угол:

$$\operatorname{tg} \alpha_* = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2\mu_2}.$$

При меньших углах стержень упадет. Из ответа при $\mu_1 \mu_2 > 1$ получается (бессмысленный) отрицательный угол; это означает, что при больших коэффициентах трения проскальзывание невозможно.

Пусть теперь заранее известно, что угол больше критического и стержень заведомо находится в равновесии. Попробуем определить все силы, на него действующие. Из пяти уравнений, написанных выше, остаются в силе лишь первые три. Два последних нужно заменить на неравенства: $F_1 < \mu_1 N_1$, $F_2 < \mu_2 N_2$.

Трех уравнений для определения четырех неизвестных недостаточно. Это не случайность. Опыт показывает, что в этом случае появляется неоднозначность: возможно равновесие при **различных** значениях сил трения и реакции. В каждом конкретном случае силы определяются соотношениями между малыми деформациями стержня, стены и пола. Если поднять стержень и поставить его снова под тем же углом, величины сил не воспроизведутся. Достаточно чуть сильнее нажать на стержень при установке, и деформации увеличатся (оставаясь малыми), следовательно, увеличатся силы. Более наглядно эта же неоднозначность проявляется при установке стержня в острый угол или в зазор между параллельными стенками.

Этот дефект имеют большинство задач статики – не решаются школьными методами. Такие задачи, не совсем точно, называют **статически неопределенными**.

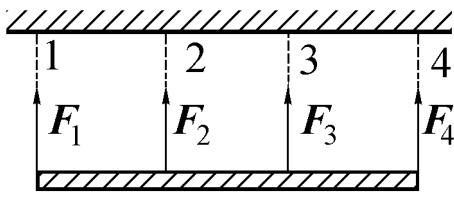


Рис. 5.11.

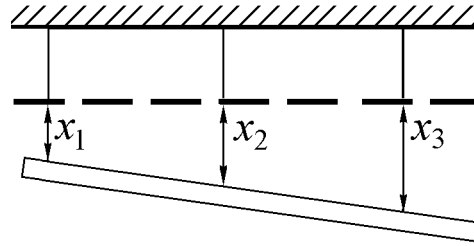


Рис. 5.12.

Пример – задача, некогда примененная на вступительных экзаменах в НГУ. Жесткий стержень (рельс) висит на четырех канатах (рис. 5.11). Кажется бы, все просто: натяжения канатов все равны $mg/4$. Но попробуем перерезать один из крайних канатов, конкретно правый. Для трех неизвестных $F_{1,2,3}$ имеем два уравнения:

$$F_1 + F_2 + F_3 = mg ,$$

$$\frac{F_1 L}{2} + \frac{F_2 L}{6} - \frac{F_3 L}{6} = 0 .$$

Уравнение моментов записано из центра. Система имеет бесконечно много решений. Смысл неоднозначности – в том, что веревки можно регулировать. Например, подвесить стержень только на средних веревках, отпустив левую. Или на левой и правой. Отсюда ясно, что нужна еще деформация веревок и их точные длины в нерастянутом состоянии. Обычно принимают закон Гука: сила пропорциональна растяжению. Предположим, что длины нерастянутых веревок **точно** равны, и при горизонтальном стержне все силы одинаковы. Это не будет равновесие – второе уравнение не выполнится. Стержень чуть перекосятся правым концом вниз. Тогда, считая его недеформируемым, имеем из геометрических соображений (рис. 5.12)

$$F_3 - F_2 = F_2 - F_1$$

(такое же уравнение, как для длин растянутых стержней). Теперь уравнений хватает, и легко найти решение:

$$F_1 = \frac{mg}{12} , \quad F_2 = \frac{4mg}{12} , \quad F_3 = \frac{7mg}{12} .$$

На F_3 приходится больше половины веса. Если обрезать еще левую веревку, то получится статически определенная задача. Тогда из симметрии $F_3 = F_2 = mg/2$, то есть угроза разрыва веревки 3 и падения всего рельса, как ни странно, уменьшается!

Во избежание недоразумений заметим, что отнюдь не всегда на практике будет получаться именно такие численные значения. Для этого надо выполнить условие равенства начальных длин и натяжений, что не так просто. Чем больше жесткость нитей, тем точнее надо отмерять их исходную длину, чтобы выполнялись условия задачи. Например, если рельс длиной 10 м (вес 300 кГ = 3000 Н) висит на стальных стержнях сечением по 1 см² и длиной (начальной) 1 м, то эта длина растянется на $\approx 0,01$ см – толщину бритвенного лезвия. Если подвеска контролируется с меньшей точностью, то результаты будут другие. Но неравномерность нагрузки – это общее свойство системы. Когда левая веревка длиннее других (провисает), то две средних растянуты одинаково, каждая сила равна половине веса. Но если подтянуть левую веревку,

неизбежно возрастет нагрузка на правую, чтобы уравновесить моменты (до $3mg/4$ в момент провисания средней).

Можно подвешивать рельс на жестких стержнях, которые способны и сжиматься (например, стальных уголках). Тогда сила F_1 может оказаться отрицательной (левый стержень толкает вниз), и раньше других порвется средняя тяга.

В исходном состоянии, если нитей четыре и даже три, то, как правило, их натяжения не равны. С этим и связана «неопределенность». Табуретка на трех ногах статически определена, а не четырех – нет, что часто и наблюдается.

Самое широкое поле для статически неопределенных задач – строительство. Достаточно представить себе фундамент дома, опирающийся местами на мягкую глину, а местами на твердые камни. Это вносит большую неуверенность в расчет здания и вынуждает делать огромные запасы прочности. Например, при равномерной нагрузке давление в фундаменте Новосибирского университета не должно превышать $\rho gh \approx 3000 \cdot 10 \cdot 20 = 6 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, то есть примерно 6 кГ/см², или 6 атм. Цемент же распространен марок 300 ÷ 500, то есть куб застывшего бетона должен не ломаться под давлением 300 ÷ 500 кГ/см². Мосты стараются конструировать из жестких треугольных ферм, чтобы сделать конструкцию статически определенной и поддающейся более или менее простому расчету. В обычном школьном курсе о статически неопределенных задачах умалчивается, хотя они практически наиболее распространены. Статически определенные же задачи, наоборот, представляют собой редкий частный случай.

МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

ДВИЖЕНИЕ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

Он умер, да! Но он не мог упасть,
Войдя в круги планетного движенья.
Бездонная внизу зияла пасть,
Но были слабы силы притяженья.

Глава 6

ДВИЖЕНИЕ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Еще у греков (Птолемей, Гиппарх) существовали кинематические теории движения планет. По современным представлениям, это было описание движения из земной системы отсчета, в виде суммы равномерных вращений по специально подобранным кругам. После многих усовершенствований получилась довольно точная теория.

Коперник предложил систему отсчета Солнца, как более выделенного центра (сейчас можно сказать – более инерциальную). Планеты летали с постоянной скоростью по кругам, как наиболее совершенным фигурам. Теория получилась проще, но хуже по точности, так как не было подгоночных параметров (на самом деле орбиты не круговые).

Тихо Браге провел наиболее точные измерения, а впоследствии Кеплер описал их тремя законами, которые излагаются ниже.

Наконец, более 300 лет назад Ньютон впервые смог объяснить движение планет. Люди впервые поняли устройство мироздания. Вся современная наука началась с небесной механики.

6.1 Гравитационная сила. Третий закон Кеплера

Считается, что однажды, около 1667 г, на Ньютона в его саду упало яблоко. Ньютон задумался над вопросом, почему все падает на Землю. Было очевидно существование притягивающей силы. Но вопрос, далеко ли она действует. На вершинах гор притяжение сохраняется. Может ли оно доставать до Луны?

Ньютон же, как открыватель механики, рассмотрел движение спутника по круговой орбите. Круговая скорость вблизи поверхности Земли $V_1 = \sqrt{g_0 R_\oplus} = 8$ км/с соответствует периоду обращения $T_0 = 2\pi R_\oplus / V_1 = 6,28 \cdot 6400 / 8 \approx 5000$ с (84 мин = 1,4 час).

Как же меняется сила тяготения с удалением от Земли? К счастью для науки, у Земли имеется естественный спутник – Луна. Радиус ее орбиты $R = 384000$ км в 60 раз

превышает радиус Земли. Естественно попытаться оценить ускорение силы тяжести на орбите Луны. Вряд ли можно сомневаться, что именно притяжение Земли заставляет Луну обращаться по орбите.

Период обращения Луны вокруг Земли – приблизительно 1 месяц:

$$T \approx 30 \cdot 24 = 720 \text{ ч} = 2,6 \cdot 10^6 \text{ с} .$$

Скорость Луны на орбите $V_{\text{Л}} = 2\pi R/T = 6,28 \cdot 3,8 \cdot 10^8 / 2,6 \cdot 10^6 \approx 1000 \text{ м/с}$. Ускорение Луны $a_{\text{Л}} = V_{\text{Л}}^2/R$ сравним с g . Скорость приблизительно в 8 раз меньше, чем у низко летящего спутника, а радиус обращения в 60 раз больше. Следовательно, ускорение Луны

$$a_{\text{Л}} \approx g/(60)^2 .$$

Точные вычисления дают именно 60^2 , а не $60 \cdot 64$ (надо учесть, что первая космическая скорость на самом деле $7,9 \text{ км/с}$, а период обращения Луны, наблюдаемый с Земли ($29,5 \text{ сут}$), больше «настоящего» периода в инерциальной системе, связанной с Солнцем ($27,3 \text{ сут}$), из-за годового вращения Земли по орбите).

Итак, при увеличении расстояния в 60 раз ускорение, а значит, и вызывающая его сила тяготения Земли уменьшается в $3600 = 60^2$ раз. Ньютон сделал вывод, что земное тяготение спадает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли.

В буквах: $T = 2\pi R/V$, $V = \sqrt{gR} = V_1 \sqrt{(g_0 R_{\oplus}^2/R^2)R} \sim R^{-1/2}$, $T \sim R^{3/2}$. Ньютону был известен **третий закон Кеплера**: квадраты времен обращения относятся как кубы больших полуосей орбит. Для круговых орбит полуось – это радиус, и мы видим, что такой закон получается при силе притяжения, спадающей обратно пропорционально квадрату расстояния. Радиус орбиты Луны при Ньютоне уточнялся, и он не публиковал расчет около 20 лет, пока не получил совпадение с точностью 2%. Попутно оказалось, что такая же сила объясняет движение планет вокруг Солнца, спутников Юпитера и т.д.

Далее, тяжесть пропорциональна массе тела (еще Галилей показал, что все тела падают с одним ускорением). Но раз тела притягиваются взаимно, должна входить и масса второго тела:

$$F = G \cdot \frac{Mm}{R^2}$$

(закон всемирного тяготения). Постоянная G , по измерениям Кавендиша и др., равна $6,67 \cdot 10^{-8}$ в системе СГС ($\text{см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$). При движении вокруг заданного тела M мы чувствуем только произведение GM . Зная G , можно найти M («взвесить Землю»), например из равенства $GMm/R_{\oplus}^2 = mg_0$. Отметим, что всегда входит произведение GM , поэтому не обязательно запоминать по отдельности G и массы различных небесных тел. Проще помнить, скажем, размеры орбит и скорости планет/спутников или периоды обращения. Векторный вид закона тяготения:

$$\mathbf{F} = -G \cdot \frac{Mm}{R^2} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Минус означает притяжение (против \mathbf{R}). Можно показать, что сфера и шар заданной массы притягивают малое тело, находящееся снаружи, как если бы их масса была помещена в центр. На тело, находящееся внутри, сфера не действует совсем, а у шара «работают» только внутренние слои (которые ближе к центру).

6.2 Момент импульса и второй закон Кеплера

Гравитационная сила центральная, и у каждой планеты должен сохраняться момент импульса, посчитанный из Солнца:

$$L = mV_{\perp}R = \text{const}.$$

Здесь V_{\perp} – поперечная скорость (перпендикулярная к радиусу). Произведение $V_{\perp}R\Delta t$ – это удвоенная площадь малого треугольника, заметаемого планетой за время Δt (рис. 6.1). **Второй закон Кеплера** как раз и утверждает, что за равные промежутки времени данная планета замечает равные площади. (Разумеется, другая планета заметет другое). Чем ближе к Солнцу, тем больше поперечная скорость планеты.

Ситуация аналогична примеру 1 из п. 5.3. Заметим, что сохраняется не поперечная скорость (хотя сила ей перпендикулярна), а произведение поперечной скорости на радиус. Рекомендуется обдумать этот парадокс.

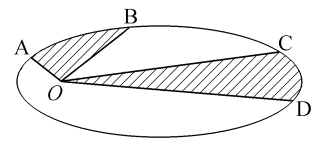


Рис. 6.1.

Кроме Солнца, есть сила со стороны других планет. Рассмотрим взаимодействие примерно одинаковых планет, как Земля и Венера. Момент силы со стороны второй планеты $M \sim (Gm^2/R^2) \cdot R$. Время, за которое такой момент силы способен заметно изменить момент импульса, будет порядка $L/M = mVR/(Gm^2/R)$. То же можно написать как $mV/(Gm^2/R^2)$, то есть импульс/силу, или $V/(Gm/R^2)$: скорость/ускорение. Если бы в силе стояло произведение масс Солнца и планеты, как раз бы вышло время порядка года – периода обращения. Теперь же получится характерное время, большее в отношении масс Солнца и планеты, то есть $2 \cdot 10^{33}/6 \cdot 10^{27} \sim 10^6$ лет. Астрономически это время пустяковое.

Казалось бы, планетные системы из-за взаимного влияния должны быть крайне неустойчивы. Однако сейчас считается, что Солнечная система существует стабильно уже несколько миллиардов лет. Реально за много оборотов планеты момент силы от других планет часто меняет знак и в среднем практически нулевой, что частично объясняет устойчивость планетных орбит. Но верно и то, что не всякая орбита стабильна. Естественно, что каждая планета создает вокруг себя «окно» пустоты, откуда весь материал захватывается или выбрасывается. Более того, зона влияния планеты не ограничена орбитами соседок – гравитационная сила далекодействующая. Например,

если периоды кратные, или отношение их близко к отношению небольших целых чисел, возможны резонансы. При формировании Солнечной системы наверняка повсюду возникали сгустки вещества, но выжили среди них только те, которые «договорились» между собой, то есть имели устойчивые орбиты. Устойчивость Солнечной системы исследуется до сих пор. Из-за большого времени ее существования и сложности задачи (взаимодействуют 9 больших планет) численные расчеты только в последние годы стали давать сколько-нибудь определенные результаты, для чего были построены специальные компьютеры.

6.3 Эффективная потенциальная энергия

Запишем закон сохранения энергии для планеты:

$$\frac{mV_R^2}{2} + \frac{mV_{\perp}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = E.$$

Потенциальная энергия выбрана нулевой на бесконечности. Скорость разложена на две перпендикулярные составляющие: V_R вдоль радиуса и поперечную V_{\perp} . Из сохранения момента импульса $mV_{\perp}R = L$. Выражаем V_{\perp} и подставляем:

$$\frac{mV_R^2}{2} + \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R} = E.$$

Если ввести функцию $U_{eff}(R) = L^2/2mR^2 - GMm/R$, то получаем закон сохранения энергии для одномерного движения, но с другой потенциальной энергией U_{eff} вместо настоящей $U = -GMm/R$:

$$\frac{mV_R^2}{2} + U_{eff}(R) = E.$$

U_{eff} называют **эффективной потенциальной энергией**. Планета движется по радиусу так, как если бы происходило одномерное движение в поле с потенциальной энергией U_{eff} .

График $U_{eff}(R)$ показан на рис. 6.2. При малых R эффективная потенциальная энергия положительна и велика (преобладает первое слагаемое). При $R = R_1 = L^2/(2GMm^2)$ U_{eff} обращается в нуль, а при больших R отрицательна, имея минимум при $R_2 = 2R_1$ и далее возрастая до нуля. Отсюда видно, что движение качественно разное при положительной и при отрицательной полной энергии E .

При $E < 0$ планета колеблется (по радиусу) в потенциальной яме. Минимально возможная E отвечает минимуму U_{eff} .

Тогда на радиусе доступна одна точка, то есть планета вращается по кругу, при этом $E = -mV^2/2 = -GMm/2R_2$. С повышением E разрешенная область колебаний по радиусу растет. Как это делалось в п. 4.4, можно вычислить период колебаний (проведя

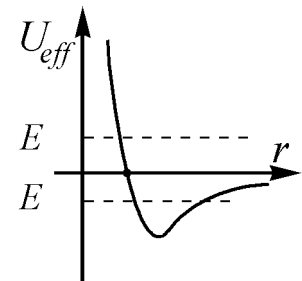


Рис. 6.2.

громоздкое интегрирование). Увеличение E до нуля расширяет границы движения от R_1 до бесконечности и увеличивает, также до бесконечности, период.

При положительной полной энергии частица отражается от потенциального барьера при $R < R_1$, то есть радиус проходит через минимум и затем растет до бесконечности. Значит, в системе двух тел невозможен гравитационный захват, который требовал бы перехода от положительной полной энергии к отрицательной. Отталкивающий барьер возникает из-за первого слагаемого $L^2/(2mR^2)$ в эффективной энергии и называется **центробежным**. Как ни странно, при ненулевом моменте импульса L (когда есть хоть малая поперечная скорость) нельзя добраться до центра притягивающего поля. Из-за сохранения L поперечная скорость с уменьшением радиуса растет, и на продольную нехватает энергии. Поэтому не наблюдается падение на Солнце комет (хотя они ежегодно «пытаются») и почти невозможно попасть в Солнце ракетой. Для космонавта реальнее опасность погибнуть от недостатка воздуха на орбите, если нет топлива для торможения (уменьшения момента импульса), чем опасность упасть с орбиты. Само по себе притяжение к центру такой опасности не создает, а основная причина падения – сопротивление атмосферы – может сказаться после месяцев полета¹.

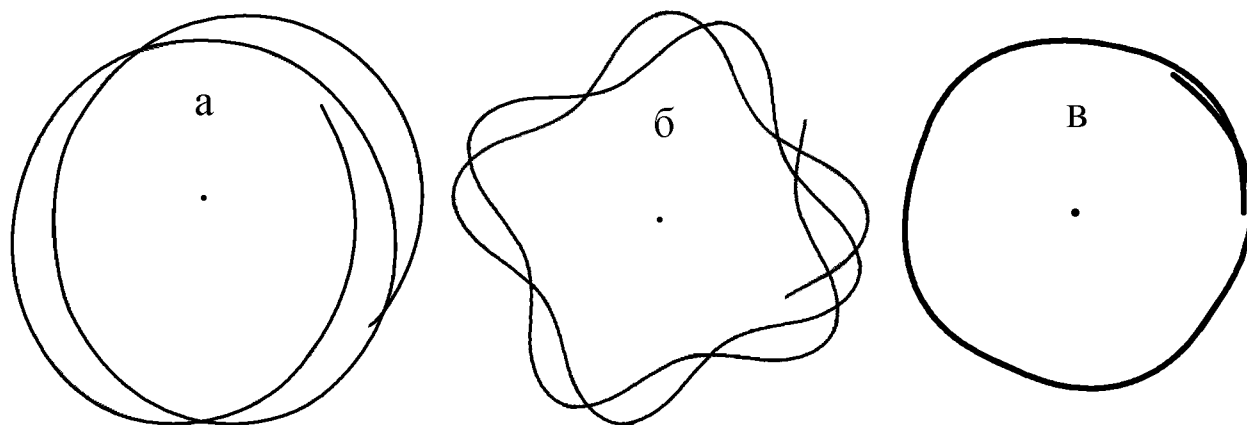


Рис. 6.3.

Кроме движения по радиусу, планета еще вращается вокруг Солнца, то есть движется и «по углу». Поскольку момент импульса сохраняется, $L = mRV_{\perp} = mR^2\omega = mR^2d\varphi/dt$, угол φ изменяется монотонно (все время растет), хотя и неравномерно. Наложение колебаний по радиусу и вращения может давать различные (вообще говоря, незамкнутые) траектории в зависимости от соотношения между временем оборота T_{φ} и периодом колебания по радиусу T_R (рис. 6.3). Для варианта а) T_{φ} слегка больше T_R , а для вариантов б), в) $5T_R > T_{\varphi} > 4T_R$. Варианты б) и в) отличаются амплитудой

¹Упасть на Солнце или планету все же можно, поскольку это не точки, а довольно большие шары. С 16 по 22 июля 1994 года на Юпитер падали обломки кометы SL9 (размерами в несколько километров, со скоростью около 60 км/с). На Землю постоянно падают метеориты. Однако «прицелиться» в мишень, несмотря на ее притяжение, надо очень точно.

колебания по радиусу. В случае б) часть траектории «выпукла внутрь». Центробежное ускорение направлено в таких местах наружу. В ньютоновском поле такая траектория невозможна: Солнце всегда притягивает планету к себе, а для траектории б) в местах наибольшего сближения центр явно отталкивает «планету». Однако в поле притяжения возможны траектории типа а) и в), в любой точке выпуклые наружу.

Уникальность ньютоновского закона тяготения, оказывается, состоит в том, что для любой финитной (т.е. не уходящей на бесконечность) орбиты $T_\varphi = T_R!$ Это значит, что орбита **замкнута**. Повернувшись на угол 2π , планета приходит в ту же точку с той же скоростью. Как выяснил еще Кеплер,

планеты движутся по эллипсам, причем Солнце находится в одном из фокусов.

Траектории же более общего вида, типа показанных на рис. 6.3, возможны в полях, отличающихся от ньютоновского (например, если показатель степени в формуле для силы не равен (-2)).

6.4 Первый и третий законы Кеплера*

Найдем уравнение траектории. Чтобы доказать, что планета обращается по эллипсу, прежде надо как минимум понять, что такое эллипс. По необходимости вывод получится довольно длинным.

Используем как исходную точку круговое движение, в котором мы уже неплохо разбираемся. Пусть спутник обращается вокруг притягивающего центра O по круговой орбите радиуса R . На него действует сила \mathbf{F} , все время направленная к центру. Поскольку сила в каждой точке орбиты перпендикулярна перемещению, она не меняет величины скорости v , а только поворачивает вектор \mathbf{v} , так что он остается перпендикулярным радиусу. Сам вектор \mathbf{v} , конечно, не будет постоянным. За малое время Δt сила производит изменение $\Delta \mathbf{v}$, по величине равное $F\Delta t/m$, а направленное перпендикулярно \mathbf{v} , т.е. к центру, отчего скорость и поворачивается.

Переведем спутник на некруговую орбиту, придав ему в «верхней» точке орбиты A дополнительную скорость \mathbf{u} , направленную вдоль радиуса. Результирующая скорость в точке A уже не перпендикулярна радиусу, и новая орбита заведомо не будет круговой. По крайней мере, вначале спутник будет удаляться от центра (рис. 6.4). Нам нужно доказать, что новая орбита – это эллипс с фокусом в точке O .

Заметим, что на новой орбите спутник имеет тот же самый момент импульса, что был у него на круговой. Действительно, в точке A добавка скорости \mathbf{u} точно радиальна, а момент импульса определяется поперечной скоростью. (Если бы мы толкнули спутник не по радиусу, момент импульса стал бы, конечно, другим.) При последующем движении по орбите момент импульса тоже не меняется как сохраняющаяся величина. Другими словами, за время Δt радиус-вектор на новой орбите заметет такую же площадь, какую замел бы за этот же промежуток Δt на старой круговой (см. рис. 6.4).

Отсюда ясно, что за **равные** промежутки времени на круговой и на новой орбите радиус-вектор спутника поворачивается на **различные** углы. Для малого угла поворота φ площадь

сектора круга будет приблизительно $R^2 \sin \varphi/2 \approx R^2 \varphi/2$. Для сектора новой орбиты площадь будет $r^2 \varphi_1/2$ (так как угол φ_1 мал, начальный и конечный радиусы практически одинаковы). Если эти площади равны, то угол φ_1 явно меньше φ на начальном участке траектории, где $r > R$.

Нам будет удобнее, сравнивая две орбиты, брать **разные** промежутки времени, причем такие, чтобы **одинаковым** был **угол** поворота радиус-вектора. Поскольку за небольшие интервалы движение можно считать равномерным, углы φ и φ_1 пропорциональны интервалам времени. Если за время Δt мы имели на круге φ , а на новой орбите за то же время выйдет угол $\varphi_1 = (R^2/r^2)\varphi$, то его надо увеличить в r^2/R^2 раз, для чего потребуется время

$$\Delta t_1 = (r^2/R^2)\Delta t .$$

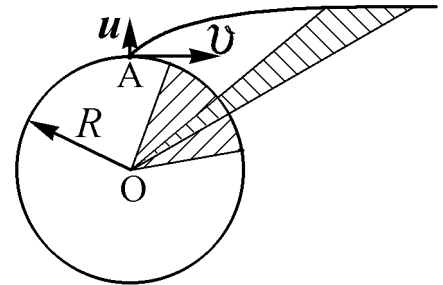


Рис. 6.4.

При $r > R$ радиус-вектор вращается медленнее, требуется большее время для поворота на тот же угол.

Полученная формула следует только из сохранения равенства заметаемых площадей для двух орбит, т.е. из центральности силы. Теперь используем ньютоновскую зависимость силы от расстояния. Сначала запишем изменение вектора импульса $m\Delta v$ за время Δt для круговой орбиты:

$$m\Delta v = F\Delta t .$$

На новой же орбите за время Δt_1 изменение импульса происходит под действием изменившейся силы $F \cdot R^2/r^2$:

$$m\Delta v_1 = F \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot \Delta t_1 = F \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \Delta t = F\Delta t .$$

Получается удивительно простой результат: для наших двух орбит

при повороте радиус-вектора на одинаковый угол изменения вектора скорости точно одинаковы!

Но если это выполняется для каждого малого поворота, то и для любых углов как суммы малых поворотов получаем то же самое.

Теперь мы можем легко найти скорость в любой точке новой траектории. Проведем в эту точку (Т на рис. 6.5) радиус-вектор. Он пересечет в некоторой точке Т' исходную окружность. На пути от А до Т' по окружности вектор скорости изменился: из горизонтального v_0 получился v , перпендикулярный ОТ. Но **таким же** будет изменение вектора скорости при движении по новой траектории. В точке А скорость была $v_0 + u$, значит, в точке Т будет $v + u$!

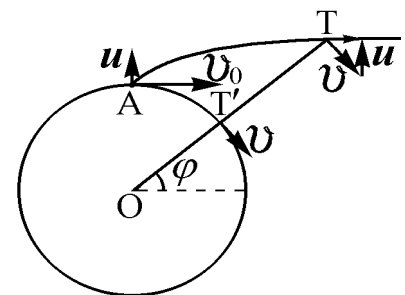


Рис. 6.5.

Нам удалось выяснить важную вещь. Достаточно провести в любую точку орбиты радиус-вектор, отложить перпендикулярно ему (постоянный по величине) вектор круговой скорости v и прибавить (постоянный по величине и направлению) вектор u , и мы получим полный вектор скорости в этой точке.

Вооружившись новыми сведениями, мы можем получить и аналитическое уравнение орбиты. Запишем постоянный момент импульса в виде

$$L = mvR = m(v - u \cdot \cos \varphi) \cdot r$$

(слева – исходное значение, справа – значение в произвольной точке, $v - u \cdot \cos \varphi$ – это поперечная скорость). Имеем

$$r = \frac{R}{1 - (u/v) \cdot \cos \varphi}. \quad (6.1)$$

Это и будет уравнением орбиты в полярных координатах, при условии $u < v$ – уравнением эллипса.

Но точно ли это эллипс? Ясно, что зависимость периодическая с периодом 2π , т.е. через полный оборот значения радиуса повторяются. Значит, орбита **замкнута**. Нетрудно показать, что круг, даже эксцентрично расположенный, не подходит под уравнение (6.1). Но может быть, это всего лишь какой-то овал?

Эллипсом называется кривая, у которой сумма расстояний до двух данных точек, называемых **фокусами**, постоянна. Обозначим постоянную $2a$ и запишем это условие (рис. 6.6):

$$r + \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cdot \cos \varphi} = 2a.$$

Здесь $2c$ – расстояние между фокусами. Освобождаясь от корня, получаем уравнение точно в такой форме, как (6.1):

$$r = \frac{(a^2 - c^2)/a}{1 - (c/a) \cdot \cos \varphi}. \quad (6.2)$$

Длина a есть **большая полуось** эллипса, отношение c/a называется **эксцентриситетом** и обозначается ε , комбинация $p = (a^2 - c^2)/a = a(1 - \varepsilon^2)$ – это **параметр** эллипса (для нашего построения параметром эллипса является радиус R исходной круговой орбиты). Значит, мы наконец доказали, что

планеты обращаются по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

(Быть может, не помешает отметить, что в другом фокусе ничего замечательного не имеется.)

При другой зависимости силы от расстояния, отличающейся от закона обратных квадратов, замкнутой фигуры, вообще говоря, не будет (период колебаний по радиусу не равен периоду обращения). То, что в ньютоновском поле получаются стабильные замкнутые орбиты, служит для весьма точного подтверждения степени 2 в законе тяготения.

Полезно выразить элементы орбиты не через параметры u , v , R , которые возникли несколько искусственным образом, а через сохраняющиеся величины – энергию и момент импульса. На исходной круговой орбите

$$mv^2/R = GMm/R^2, \quad v = \sqrt{GM/R},$$

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} \equiv -\frac{mv^2}{2} \equiv -\frac{GMm}{2R}, \quad L = mvR = m\sqrt{GMR}.$$

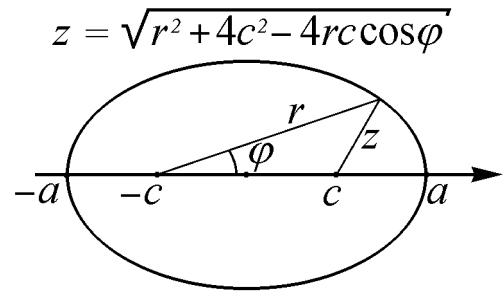


Рис. 6.6.

На новой орбите момент импульса тот же, откуда сразу получаем

$$R = \frac{L^2}{GMm^2}.$$

После толчка, переводящего на эллиптическую орбиту, энергия увеличивается:

$$E = E_0 + mu^2/2 = -mv^2/2 + mu^2/2, \quad u = \sqrt{v^2 + 2E/m}.$$

Нам нужно отношение $u/v = \sqrt{1 + 2E/mv^2} = \sqrt{1 + 2ER/GMm}$. Подставляя в него найденное выше R , имеем

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi}, \quad (6.3)$$

где

$$p = L^2/(GMm^2), \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}. \quad (6.4)$$

При отрицательной энергии (ограниченное движение) $\varepsilon < 1$. Тогда знаменатель в (6.3) всегда положителен. Радиус r меняется в пределах от $p/(1 + \varepsilon)$ до $p/(1 - \varepsilon)$. Для окружности эксцентриситет $\varepsilon = 0$, а у вытянутого эллипса эксцентриситет близок к 1. Другими словами, если тело вращалось по кругу со скоростью v и мы добавим скорость вдоль радиуса $u \leq v$, энергия останется отрицательной и тело не уйдет на бесконечность.

При положительной энергии $\varepsilon > 1$ и знаменатель $(1 - \varepsilon \cos \varphi)$ обращается в нуль при $\cos \varphi = 1/\varepsilon$ (например, для $\varepsilon = 2$ при углах $\pm 60^\circ$). Радиус при этом обращается в бесконечность. Такая кривая называется **гиперболой** (в рамках нашего вывода гипербола получается при $u > v$). По гиперболам летят метеориты и кометы, приходящие из других звездных систем – на бесконечности они имеют, само собой, положительную кинетическую энергию. При нулевой энергии $\varepsilon = 1$ и траектория – **парабола**, для которой $u = v$, т.е. полная скорость $\sqrt{u^2 + v^2}$ в $\sqrt{2}$ раз больше круговой v ; это как бы вторая космическая скорость для данного расстояния R от центра). Виды кривых при $\varepsilon = 0,5$ (эллипс), $\varepsilon = 1$ (парабола) и $\varepsilon = 2$ (гипербола) приведены на рис. 6.7,а–в.

Интересно, что все три кривые получаются при сечении конуса плоскостью (конические сечения, рассмотренные Аполлонием еще в III веке до н.э.). Ясно, как получить таким образом круг, а эллипс получится, если косо разрезать цилиндр; поскольку же конус отличается от цилиндра, то интуиция не приветствует возможность получить эллипс сечением конуса. Тем не менее эллипс выходит, причем два шара, «зажатых» между поверхностью конуса и секущей плоскостью, касаются последней именно в фокусах эллипса (теорема Адамара, попробуйте ее доказать). Что будет со вписанными шарами в случаях параболы и гиперболы?

С древности орбиты светил пытались свести к «идеальным» кривым. Еще Коперник заставлял планеты летать по кругам как наиболее совершенным фигурам. Кеплер установил, что планеты движутся по эллипсам (которые тоже «совершенны», хотя, конечно, не в такой степени, как круги), и считал этот результат окончательным. Если бы данные Тихо Браге были точнее раз в десять, Кеплер заметил бы малые отклонения от эллиптичности, т.е. – крушение всех его надежд. В такой ситуации впору возвращаться к поправкам типа Птолемеевых. Изобретательности Кеплеру было не занимать: представление об этом дают его идеи, согласно которым планетные орбиты таковы, что в них должны поочередно вписываться правильные

многогранники. Но, конечно, какого-либо совершенства подправленным орбитам приписывать уже нельзя.

С позиций же динамики эллипс – это только первое приближение, и с учетом взаимного влияния планет нет никаких оснований ожидать какого-либо «совершенства» орбиты. Гармонию следует искать в другом месте – в замечательной простоте закона тяготения. Планеты не обязаны ходить по предустановленным орбитам, но их движение можно предсказать, зная силы и начальные условия.

Заметим, что закон всемирного тяготения и вся механика Ньютона «произошли» из исследования планетных орбит. Книга Ньютона «Математические начала натуральной философии», содержащая его основные результаты в механике, в том числе и закон всемирного тяготения, вышла в 1687 г. Ньютон написал эту книгу благодаря настойчивости Эдмунда Галлея (1656–1742), известного астронома.

Описанный выше вывод закона Кеплера позволяет очень просто найти траекторию планеты графически. Зная скорость, строим перемещение за небольшой интервал Δt и получаем новую точку траектории. Проводим в эту точку радиус-вектор и строим новое перемещение. Как мы выяснили, вектор скорости меняется так же, как на круговой орбите, т.е. всякий раз складывается из перпендикулярной радиусу круговой скорости v и постоянной скорости u . Поэтому всякий раз надо откладывать одно и то же перемещение $v\Delta t$ перпендикулярно радиусу, а затем $u\Delta t$ вверх. Повторяя эту процедуру, получаем всю орбиту.

Задача.

а). Имеется исходная круговая орбита. Изображенная в определенном масштабе на миллиметровке, она имеет радиус 5 см. Пусть круговая скорость равна 2, а интервал $\Delta t = 1$, что соответствует перемещению 2 см за каждый шаг. Скорость u , которую спутнику придали, чтобы сбить с круговой орбиты, пусть будет вдвое меньше. На рис. 6.8, а показаны несколько первых шагов; каждый раз отмеряем 2 см перпендикулярно текущему радиусу и 1 см вверх. Построить на миллиметровой бумаге полную траекторию, пользуясь чертежным треугольником для построения перпендикуляра к радиусу и линейкой либо циркулем отмеряя расстояния.

б). Простейший метод построения, описанный выше, далек от совершенства. Например, при нулевой добавке u вместо круга выйдет разворачивающаяся спираль. Чтобы получить сколь угодно хорошую орбиту, потребуются очень малые шаги и, значит, большие затраты времени. На рис. 6.8, б показаны два уточненных варианта, которые учитывают небольшой поворот скорости v в пределах шага: 2 см надо откладывать перпендикулярно не начальному, а некоторому среднему положению радиус-вектора. Постройте траекторию, пользуясь одним из уточненных

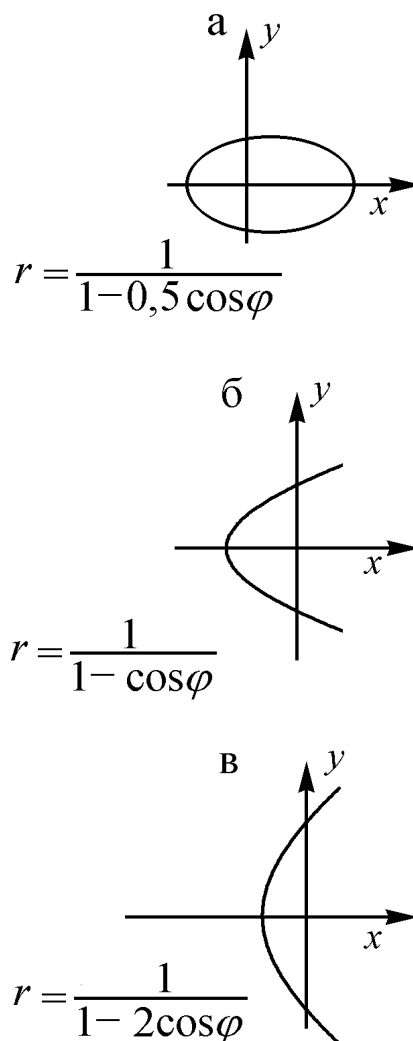


Рис. 6.7.

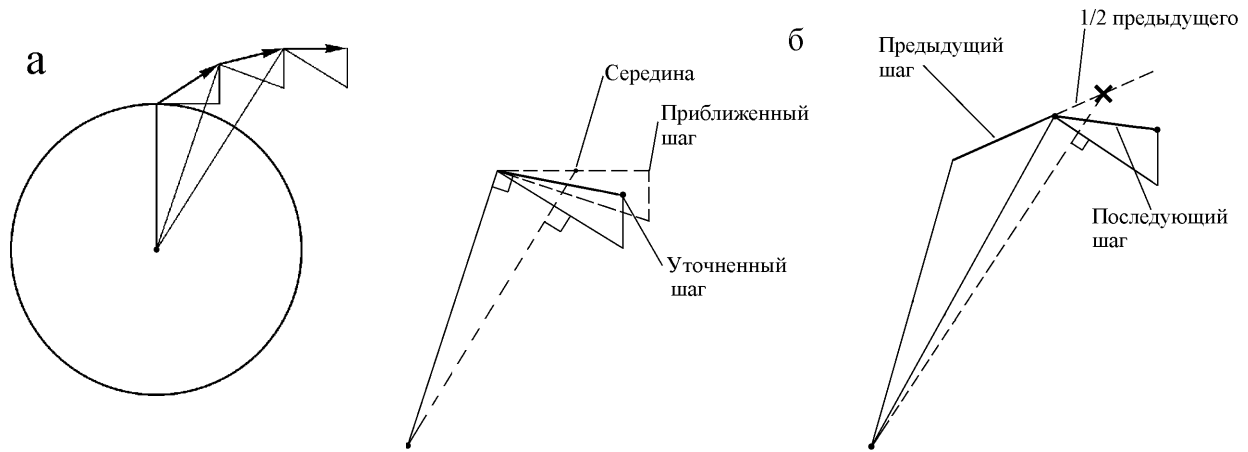


Рис. 6.8.

методов. Найдите положение второго фокуса. Проверьте экспериментально постоянство суммы расстояний.

Теперь легко разобраться и с третьим законом Кеплера. Период обращения можно найти, поделив площадь эллипса на заметаемую в единицу времени площадь. Эллипс – это сплюснутый круг: его площадь равна $S = \pi ab$, где b – малая полуось. Из рис. 6.6 видно, что

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \equiv a\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

«Скорость заметания» та же, что на исходной круговой орбите, и равна $vR/2$. Период обращения

$$T = \frac{\pi ab}{vR/2} \equiv \frac{2\pi Rab}{vR^2} = \frac{2\pi R}{v} \cdot \frac{a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{R^2}.$$

Первый множитель – это период T_0 обращения по кругу радиуса R . Как показано при выводе (6.2), $1 - \varepsilon^2 = R/a$. Заменяя $\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ на $\sqrt{R/a}$, получаем

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{a}{R}\right)^{3/2},$$

что и требовалось: квадраты периодов относятся как кубы больших полуосей. Это установлено для данного круга и любого эллипса, который из него получается способом, показанным на рис. 6.5. Для произвольного эллипса подходящий круг (с радиусом, равным параметру эллипса) всегда можно построить. Для любых же двух круговых орбит третий закон Кеплера однозначно связан с законом тяготения (см. п. 6.1). Следовательно, третий закон Кеплера доказан для произвольных орбит.

Согласно (6.3), большая полуось a равна $(p/(1 + \varepsilon) + p/(1 - \varepsilon))/2 = p/(1 - \varepsilon^2)$. Подставим из (6.4) p и ε и получим $a = -GMm/2E$ (напомним, что энергия отрицательна). Для круговой орбиты $E = -GMm/2R$ и как раз получается $a = R$. По третьему закону Кеплера, $T^2 \sim a^3 \sim |E|^{-3}$. Следовательно, от момента импульса при данной энергии период обращения не зависит. Допустим, если запустить со скоростью 9 км/с два снаряда, один вертикально вверх, а другой горизонтально, в точку запуска они вернуться практически одновременно (первый чуть раньше, так как часть его траектории проходит «под землей»).

6.5 Реактивное движение. Траектории космических полетов

Артиллерия и подобные способы не позволяют разогнать тела заметных размеров до космических скоростей. Для этого служит реактивный принцип.

Представим себе тележку массы M_f , нагруженную N снарядами массы m каждый. Снаряды выбрасываются устройством (масса которого включена в M_f) со скоростью u **относительно тележки**. Из-за отдачи тележка разгоняется. Как выгоднее бросать снаряды – сразу или по очереди – для достижения максимальной скорости тележки V ?

Рассмотрим выбрасывание первого снаряда, который полетит со скоростью v_1 . Тележка приобретет скорость ΔV_1 :

$$mv_1 + (M_f + (N - 1)m)\Delta V_1 = 0, \quad v_1 - \Delta V_1 = u$$

(сохранение импульса и кинематика). Исключая v_1 , находим приращение скорости тележки:

$$\Delta V_1 = \frac{mu}{M_f + Nm}.$$

Словами: отброшенная масса умножается на относительную скорость и делится на суммарную массу до выброса. Аналогично находим следующее приращение скорости:

$$\Delta V_2 = \frac{mu}{M_f + (N - 1)m}.$$

После выброса всех снарядов

$$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots = u \left(\frac{m}{M_f + Nm} + \frac{m}{M_f + (N - 1)m} + \dots + \frac{m}{M_f + 1 \cdot m} \right).$$

Всего в скобке N слагаемых. Если все снаряды выбросить сразу,

$$V = \frac{Nmu}{M_f + Nm} = u \left(\frac{m}{M_f + Nm} + \frac{m}{M_f + Nm} + \frac{m}{M_f + Nm} \right).$$

Все слагаемые, кроме первого, в последнем варианте меньше. Оказывается, что по очереди выбрасывать лишние вещи выгоднее.

Заметим, что при одновременном выбросе всегда $V < u$. Поэтому для достижения больших скоростей тележкой нужна по крайней мере такая же скорость выброса. Но тогда лучше разгонять не тележку, а снаряд. При поочередном же выбросе знаменатели дробей уменьшаются, и есть надежда получить конечную скорость больше u . На самом деле выбрасываются из ракеты не «снаряды», а горячие газы. Вместо m правильнее обозначить выброшенную массу через ΔM (M уменьшается), а сумму $M_f + km$ обозначаем текущей массой M (переменная величина). Тогда

$$V = u \cdot \sum \frac{\Delta M}{M} = u \cdot \int_{M_f}^{M_i} \frac{dM}{M} = u \cdot \ln(M) \Big|_{M_f}^{M_i} = u \cdot \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right).$$

Математическое дополнение

Логарифмы. У нас появилось новое обозначение: \ln . Вместо того, чтобы гадать, отчего это такой интеграл будет именно **натуральным логарифмом** (так называется эта функция), примем **определение**:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Геометрически логарифм – площадь под кривой $y = 1/x$ (рис. 6.9). Из определения ясно, что $\ln 1 = 0$ (интеграл от 1 до 1 – нулевая площадь). Найдем $\ln 2$; это площадь, явно меньшая 1, но большая 0,5. Разбиваем промежуток от 1 до 2 на 10 частей:

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1,1} \right) \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} \right) \cdot 0,1 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1,9} + \frac{1}{2} \right) \cdot 0,1 = \\ &= 0,1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \dots + \frac{1}{1,9} + \frac{1}{4} \right) = 0,6938 \end{aligned}$$

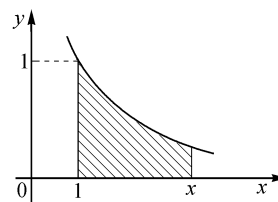


Рис. 6.9.

(проверьте на калькуляторе). Более точно $\ln 2 = 0,6931$. Так можно получить **таблицу логарифмов**:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln x$	0	0,69	1,1	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,2	2,3

При просмотре таблицы можно заметить такие совпадения: $\ln 4 = \ln 2 + \ln 2$, $\ln 6 = \ln 3 + \ln 2$, и т.д. Случайно ли это? Пусть известен $\ln x$. Найдем $\ln 2x$:

$$\ln 2x = \int_1^{2x} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{2x} \frac{dt}{t}.$$

В последнем интеграле обозначим $t = x \cdot u$, где u – новая переменная интегрирования. Тогда

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln 2 !$$

Геометрически равенство $\int_x^{2x} dt/t = \int_1^2 du/u$ совершенно понятно: высота первой фигуры в x раз меньше, а горизонтальный размер – во столько же раз больше. Мы получили равенство $\ln 2x = \ln 2 + \ln x$. Разумеется, то же самое будет для любого произведения:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

Словами: **Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.** До эпохи калькуляторов таблицы логарифмов широко использовались в расчетах, позволяя заменить умножение сложением: числа перемножаются, а их степени складываются (наглядно этот процесс виден на логарифмической линейке). Сами же таблицы

вычислены без всяких компьютеров очень остроумными способами (представление о которых дается в курсе Р.Фейнмана).

Где-то между 2 и 3 (ближе к последнему) должно быть такое число e , у которого логарифм равен 1: $\int_1^e (dt/t) = 1$. Легко оценить это число, которое называют **основанием натуральных логарифмов**:

$$1,1 = \ln 3 = \int_1^3 \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{dt}{t} + \int_e^3 \frac{dt}{t} \approx 1 + \frac{3-e}{3} \Rightarrow e \approx 2,7.$$

Теперь запишем очевидные равенства:

$$\ln e = 1, \quad \ln e^2 = 2, \quad \ln e^3 = 3, \quad \dots \ln e^n = n, \quad \text{и вообще } \ln e^x = x.$$

Оказывается, логарифм числа y можно понимать и как **степень**, в которую надо возвести число e , чтобы получить y . Обычно так и **определяют** логарифм.

График логарифмической функции изображен на рис. 6.10. Логарифм числа, меньшего 1, отрицателен, например, $\ln 0,1 = -2,3026$. Полезно также запомнить, что **логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя**. Вблизи пересечения с горизонтальной осью $\ln(1+x) \approx x$, пока $x \ll 1$. При больших x логарифм растет крайне медленно ($\ln 10^2 = 4,6$, $\ln 10^3 = 6,9$, $\ln 10^4 = 9,2$, $\ln 10^6 = 13,8$).

Логарифм \ln возник у нас естественным (натуральным) образом, отчего и называется **натуральным**. Применяются и другие логарифмы, взятые по другому основанию, например, десятичный ($\lg 10 = 1$, $\lg 10^2 = 2$, ... т.е. $10^{\lg x} = x$). Десятичный логарифм меньше натурального в $2,3026 = \ln 10$ раз: $10^x = e^{x \ln 10}$.

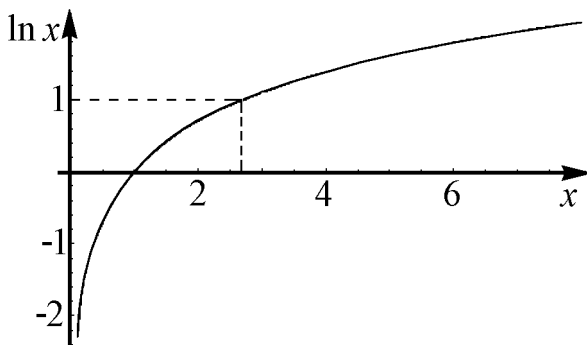


Рис. 6.10.

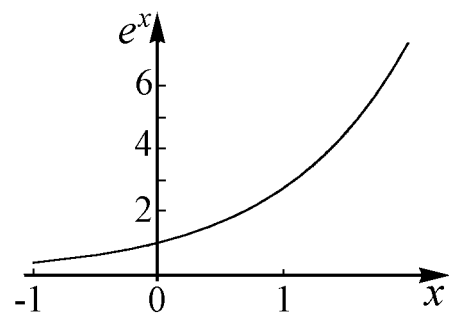


Рис. 6.11.

Экспонента. Экспонента, или экспоненциальная функция $e^x \equiv \exp(x)$ – это попросту функция, обратная логарифму:

$$e^{\ln x} = x, \quad \ln(e^x) = x.$$

Она тоже удобнее (натуральнее), чем более общая **показательная** функция (10^x и т.д.). Замечательно, что производная от экспоненты равна той же самой экспоненте.

Действительно, найдем, как производную от сложной функции,

$$\frac{d(\ln e^x)}{dx} = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{d(e^x)}{dx} = 1, \quad \Rightarrow \frac{d(e^x)}{dx} = e^x,$$

поскольку $\ln e^x = x$. В физике чаще в показателе имеется еще коэффициент: $d(e^{kx})/dx = k \cdot e^{kx}$.

В противоположность логарифму, экспонента – очень быстро растущая функция:

x	0	1	2	3	4	10
$\exp(x)$	1	2,72	7,34	20,1	54,6	$2,2 \cdot 10^4$

Для отрицательных x $e^x < 1$. С ростом абсолютного значения отрицательного аргумента экспонента очень быстро спадает (например, $e^{-10} = 1/e^{10}$). Вблизи нуля $e^x \approx 1 + x$. График экспоненты изображен на рис. 6.11. Как и полагается для обратных функций, графики логарифма и экспоненты зеркально симметричны относительно прямой $y = x$.

Логарифм и экспоненту можно увязать еще одним поучительным способом. Вспомним наше определение логарифма через интеграл. Но ведь это интеграл от степенной функции, казалось бы, элементарный: $\int t^n dt = t^{n+1}/(n+1)$. Не тут-то было: в нашем случае $n+1 = 0$! Чтобы не делить на ноль, найдем почти такой же интеграл

$$\int_1^x t^\alpha \frac{dt}{t} = \int_1^x t^{\alpha-1} dt = \frac{t^\alpha}{\alpha} \Big|_1^x = \frac{x^\alpha - 1}{\alpha}.$$

Пусть $\alpha \rightarrow 0$, так что дополнительный множитель $t^\alpha \approx 1$, и значение интеграла практически равно логарифму:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} = \ln x,$$

так как $x^\alpha \equiv \exp(\alpha \ln x) \approx 1 + \alpha \ln x$ при малых α . Вот откуда вылезает этот логарифм при интегрировании степени. Кстати, теперь видно, почему не страшно делить на ноль: в числителе тоже ноль. Проверьте этот предел на калькуляторе.

Пусть теперь $x = e$. Тогда $(e^\alpha - 1)/\alpha \approx 1$, и мы получили представление числа e в виде **замечательного предела**:

$$e = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha}.$$

Например,

$$1,1^{10} = 2,594, \quad 1,01^{100} = 2,705, \quad 1,001^{1000} = 2,7169, \quad 1,0001^{10000} = 2,71814.$$

Снова п. 6.5

M_i – это начальная масса «заряженной» ракеты. Видно, что скорость в принципе не ограничена, если масса топлива заметно больше, чем скорость пустой ракеты. Обычно масса M_f задана (приборы или боезаряд, корпус). Тогда легко найти начальную массу, необходимую для достижения конечной скорости V :

$$M_i = M_f \cdot \exp(V/u) .$$

Последнюю формулу называют **формулой Циолковского**. Наш довольно длинный вывод, конечно, необязателен. Можно сразу написать закон сохранения импульса:

$$udM = MdV , \quad \text{или} \quad \frac{dM}{M} = \frac{dV}{u} ,$$

из которого интегрированием получается та же формула.

Ракета «Союз» с начальной массой 310 т выводит на орбиту 7 т. Отношение масс примерно 44, конечная скорость – 8 км/с. Можно оценить скорость истечения $u \approx 8/\ln(44) = 8/3,8 = 2,1$ км/с. На самом деле скорость истечения 2,5 ÷ 3 км/с, но конечная скорость получается меньше, а расход топлива больше из-за влияния веса конструкции (баки, двигатели): сухая масса ракеты 30 т. По дороге лишние детали сбрасываются, как только отпадет в них надобность (многоступенчатая конструкция). Для ракеты «Протон» отношение масс 670 т/20 т = 33,5 и $u \approx 8/\ln(33,5) = 8/3,5 = 2,3$ км/с. Можно считать, что это «эффективная» скорость истечения, учитывающая потери из-за неидеальной конструкции.

Считая, что скорость истечения для отечественных ракет 2,2 км/с, оценим стартовую массу для достижения второй космической скорости: $M_i = M_f \cdot \exp(11/2,2) = M_f \cdot \exp(5) = 7,3 \cdot 20 \cdot M_f = 150M_f$. (Полезно помнить, что $\exp(3) = 20$ и $\exp(2) = 7,3$). Чтобы отправить одну тонну на бесконечность, надо сжечь 150 тонн. Если мы хотим слетать на Марс за неделю, понадобится скорость порядка $50 \cdot 10^6 / (7 \cdot 24 \cdot 3600) = 80$ км/с, и для разгона понадобится $\exp(35) = 10^{15}$ тонн на каждую тонну веса. Ясно, что такие скорости недостижимы для химических двигателей. Ядерный реактор, нагревающий водород, позволил бы поднять u до 9 км/с, и понадобилось бы «всего» 10^5 тонн (показатель уменьшится втрое). Технический же предел массы ракеты – тысячи тонн. Конечно, хорошо бы иметь фотонные двигатели. Пока их нет, реактивный принцип неэффективен, однако остальные еще хуже.

Поэтому космические полеты требуют минимальных приращений скорости. Рассмотрим запуск за пределы Солнечной системы. При скорости запуска V_3 вдали от Земли аппарат будет иметь относительно нее скорость V_{rel} :

$$\frac{mV_{rel}^2}{2} = \frac{mV_3^2}{2} - \frac{GmM_{\oplus}}{R_{\oplus}} = \frac{mV_3^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2} ,$$

где V_2 – вторая космическая скорость. С учетом движения Земли по орбите со скоростью $V_E = 30$ км/с аппарат в системе Солнца имеет максимум $V_E + V_{rel}$, если запущен по полету Земли. Скорость V_E – это вроде первой космической (точнее, круговой) на орбите Земли; если ее умножить на $\sqrt{2}$, получится аналог второй космической, достаточной, чтобы покинуть Солнечную систему. Имеем $V_{rel} = 30 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 12$ км/с, тогда третья космическая скорость $V_3 = \sqrt{11^2 + 12^2} \cong 16$ км/с. При этом орбита – парабола, касающаяся орбиты Земли.

Чтобы попасть на Солнце, нужна $V_{rel} \approx 30$ км/с назад по движению; тогда в системе Солнца аппарат остановится (момент импульса $L = 0$). При запуске надо развить $\sqrt{11^2 + 30^2} \approx 31,5$ км/с. Если учесть размер Солнца, надо чуть поменьше, но все равно много и практически недостижимо.

Полет к Юпитеру требует несколько меньших затрат, чем к звездам. Минимальным приращение скорости будет для **гомановской** траектории – половинки эллипса, касающегося орбит Земли и Юпитера (рис. 6.12). Пример расчета: обозначаем скорость в системе Солнца, набранную после старта с Земли, V_s . В полете сохраняются момент импульса и энергия:

$$V_s R_E = V_f R_J, \quad \frac{V_s^2}{2} - \frac{GM_\odot}{R_E} = \frac{V_f^2}{2} - \frac{GM_\odot}{R_J}.$$

Здесь R_E и R_J – радиусы орбит Земли и Юпитера, V_f – скорость аппарата на подлете к Юпитеру. После отрыва от Земли движемся уже в поле тяготения Солнца (входит M_\odot). Получаем

$$V_s = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R_E}} \cdot \sqrt{\frac{2R_J}{R_E + R_J}} = 30 \sqrt{\frac{2 \cdot 5,2}{1 + 5,2}} = 30 \cdot 1,25 = 30 + 7,5 \text{ км/с.}$$

Заметим, что при вычислениях лучше не подставлять G и M , а заменять их на простые комбинации типа круговой скорости $\sqrt{GM/R}$, и использовать относительные радиусы.

Скорость V_{rel} относительно Земли будет 7,5 км/с, и требуемое приращение скорости $\Delta V = \sqrt{11^2 + 7,5^2} = 13,3$ км/с. Видно, что в основном трудно оторваться от Земли, а дальше уже легче. Ракета с начальной массой 1000 т может послать к Юпитеру $1000 \cdot \exp(-6) \approx 2,5$ т. Космонавтика – дорогое удовольствие. Отметим еще, что полет продолжается $((1 + 5,2)/2)^{3/2} \cdot 0,5 = 2,3$ года (3 закон Кеплера). Надо попасть в «окно» запуска, чтобы через это время Юпитер был не где попало на своей орбите, а как раз в нужном месте. Такие окна длительностью около 2 недель повторяются в случае с Юпитером раз в ≈ 11 месяцев. Если запускать в случайное время, расход топлива растет катастрофически.

Откуда следует оптимальность выбранной траектории? Мы уже видели, что большая полуось орбиты определяется только энергией. Направляя приращение скорости ΔV вдоль уже имеющегося движения со скоростью V_{orb} , мы получим максимально возможное при данном ΔV приращение энергии:

$$\Delta E = \frac{m(V_{orb} + \Delta V)^2}{2} - \frac{mV_{orb}^2}{2} = mV_{orb}\Delta V + \frac{m\Delta V^2}{2}.$$

Энергия (вспомним, что она отрицательна) возрастет на ΔE , а по абсолютной величине – уменьшится. Поскольку $a \sim 1/|E|$, максимальной ΔE соответствует максимальная большая полуось a , то есть орбита «достает» дальше от Солнца². При путешествиях к внутренним

²Эти соображения не вполне строгие. Может случиться, что при некоторой радиальной компоненте скорости за счет уменьшения расстояния в перигелии максимальное удаление от Солнца получится при несколько меньшей полуоси. Более аккуратное доказательство приводится на следующей странице.

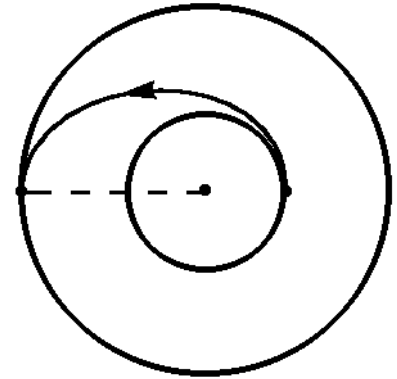


Рис. 6.12.

планетам необходимо, наоборот, уменьшить полуось. При заданном ΔV надо увеличить $|E|$, то есть уменьшить E . Тогда надо направить ΔV назад по движению:

$$\Delta E = \frac{m(V_{orb} - \Delta V)^2}{2} - \frac{mV_{orb}^2}{2} = -mV_{orb}\Delta V + \frac{m\Delta V^2}{2} \approx -mV_{orb}\Delta V,$$

так как обычно $\Delta V \ll V_{orb}$.

На подлете к Юпитеру скорость $V_f = \sqrt{GM_\odot/R_J} \cdot \sqrt{2R_J/(R_E + R_J)}$. Первый множитель – скорость Юпитера по орбите (≈ 13 км/с), второй равен примерно 0,56. Юпитер будет догонять КА со скоростью ≈ 6 км/с. Эту скорость при желании высадиться можно погасить об атмосферу. А можно использовать скорость встречи: облететь вокруг догоняющего Юпитера, причем относительная скорость не изменится. В системе же Солнца «пинок» может составлять максимум двойную относительную скорость (как при упругом лобовом ударе). КА будет уже обгонять Юпитер на 6 км/с, чего хватит для вылета из Солнечной системы. Полет «Вояджеров» (1979 – ...) как раз использовал такие гравитационные маневры. Подходящее расположение планет для такого рейса повторяется довольно редко. Удалось не только сэкономить топливо, но и сократить время полета в несколько раз (полет до Нептуна по классической траектории занимает 30 лет).

Еще интересен полет на Луну. Поскольку Луна далека от Земли ($\gg R_\oplus$), нужно сначала развить практически вторую космическую скорость, обычно в два приема. Ракета «Сатурн-5» с начальной массой 3000 т выводит на низкую орбиту 135 т. Эффективная скорость истечения $8/\ln(3000/135) = 2,58$ км/с выше, чем у советских ракет, так как на второй ступени используется водородно-кислородное топливо. Остается для разгона к Луне $11-8 = 3$ км/с, после разгона уцелеет примерно $e^{-3/2,58} \approx e^{-1,1} = 1/3$, то есть 45 т. Вторая космическая скорость у Луны $\sim \sqrt{gR} = \sqrt{1/6 \cdot 1/3} \approx 1/4$ земной, то есть 2,5 км/с. С учетом разности скоростей КА и Луны по орбите берем примерно 3 км/с, и после посадки масса уменьшается еще втрое (15 т). Для старта с Луны и полета к Земле надо еще 3 км/с, и до Земли долетит 5 т. К счастью, на Земле тормозиться можно бесплатно (об атмосферу), но зато нужна теплзащита. Полное приращение скорости получается $11+3+3 = 17$ км/с (по справочнику – 18), заметно больше, чем для полета (в один конец) к Юпитеру.

Предприятие выглядит рискованным (нет никакого запаса). Заметный выигрыш дала идея отдельного лунного модуля (15 т начинает посадку с орбиты спутника Луны, 5 т – взлетная ступень – стартует с Луны). Общая же масса на орбите вокруг Луны включала еще основной блок (23,3 т, в том числе 18,5 т топлива + командный отсек 5,6 т, который потом летит к Земле). Видно хорошее совпадение оценок с «экспериментом».

Дополнение. Оптимальность траектории Гомана. Пусть в точке старта поперечная компонента скорости v , радиальная u . На финише есть только поперечная w . Законы сохранения:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{w^2}{2} - \frac{GM}{R}, \quad vr = wR.$$

Введем круговую скорость $V_c = GM/r$ и исключим конечную скорость w :

$$\frac{v^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = V_c^2 \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) - \frac{u^2}{2}.$$

Требуется доказать, что приращение скорости больше, чем для траектории Гомана: $\Delta v^2 \equiv (v - V_c)^2 + u^2 > V_c^2 \cdot (\sqrt{2R/(R+r)} - 1)^2$. Для краткости обозначаем $V = v/V_c$, $U = u/V_c$, $x = r/R$:

$$V^2 = \frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2}; \quad \Delta V^2 \equiv \left(\sqrt{\frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2}} - 1 \right)^2 + U^2 > \left(\sqrt{\frac{2}{1+x}} - 1 \right)^2.$$

В неравенстве U^2 не то уменьшает левую часть (входит под корнем с минусом), не то увеличивает, прибавляясь в конце. Попробуем изолировать U . Раскрываем квадраты скобок:

$$\frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2}} + U^2 > \frac{2}{1+x} + 1 - 2\sqrt{\frac{2}{1+x}}, \quad \text{или}$$

$$2\sqrt{\frac{2}{1+x} - \frac{U^2 x^2}{1-x^2}} > 2\sqrt{\frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2}}.$$

Возводим в квадрат:

$$\frac{8}{1+x} + \frac{U^4 x^4}{(1-x^2)^2} - 4\sqrt{\frac{2}{1+x} \frac{U^2 x^2}{1-x^2}} > \frac{8}{1+x} - 4\frac{U^2}{1-x^2}.$$

Убираем одинаковые слагаемые и сокращаем на U^2 и на $1-x^2$ (предполагая $r < R \Leftrightarrow x < 1$, то есть запуск на внешнюю орбиту, например, на Юпитер):

$$\frac{U^2 x^4}{1-x^2} > 4 \left(x^2 \sqrt{\frac{2}{1+x}} - 1 \right).$$

При $x < 1$ левая часть положительна, и легко убедиться, что правая отрицательна. Этим неравенство доказано для $x < 1$. Если же $x > 1$ (полет на внутреннюю орбиту, например, на Меркурий), то при сокращении на $1-x^2$ поменяется знак неравенства, и опять получится искомый результат. Итак, при **однократном** импульсе тяги минимальное приращение скорости достигается для траектории Гомана.

Если допускается **несколько** включений двигателя, можно и еще сэкономить топливо. Например, хотим попасть на Солнце. Сначала запускаем аппарат с орбиты Земли почти на бесконечность, для чего требуется $\Delta v \approx 12$ км/с. В апогелии этого очень длинного эллипса скорость мала, и там нужно лишь слегка притормозить, чтобы момент импульса стал нулевым. Дальше корабль сам упадет на Солнце. Всего требуется около 12 км/с, а при старте с Земли – только третья космическая скорость, т.е. гораздо меньше 30 км/с, необходимых на простейшей гомановской траектории. Зато и путешествие продолжается гораздо дольше.

Можно сначала долететь до Юпитера ($\Delta v = 7,5$ км/с вначале и $0,56 \cdot 13 = 7,3$ км/с на орбите Юпитера), всего 14,8 км/с. Время полета 2,3 года туда плюс 2,1 года падения с орбиты Юпитера сравните со временем падения с земной орбиты (65 суток). Практически долгий полет накладывает серьезные ограничения на полезную нагрузку (падает надежность аппаратуры), почему и стараются придерживаться классических траекторий Гомана.

МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

КОЛЕБАНИЯ

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

Глава 7

КОЛЕБАНИЯ

Колебания – это один из самых важных разделов физики. Хотя механические колебания, которыми мы сейчас займемся, кажутся довольно частным случаем движения, но применяемые методы и многие эффекты те же самые в других разделах физики.

7.1 Уравнение колебаний. Частота и период, амплитуда и фаза

Простейший случай колебательной системы – масса m на пружине, имеющей коэффициент упругости k . Уравнение движения:

$$m \frac{dv}{dt} = -kx, \quad \text{или} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -kx. \quad (7.1)$$

Это – **дифференциальное** уравнение. Из опыта видно, что движение тела периодически повторяется. Поэтому, чтобы решить уравнение, попробуем периодическую функцию, хотя бы $x = A \cos(\omega t)$. Тогда

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t), \quad \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t).$$

Уравнение выполняется, если $\omega^2 = k/m$ при любом A . Величина ω называется частотой колебаний (иногда круговой частотой).

Другой пример – математический маятник, то есть тело на нити длины L (рис. 7.1). При отклонении на малый угол $\varphi = x/L$ натяжение $T \approx mg$, возвращающая сила $F = -T\varphi = -mgx/L$. Получаем уравнение

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{L} \cdot x.$$

Оно походит на уравнение для пружины с заменой k на mg/L . Подойдет такое же решение, частота $\omega = \sqrt{g/L}$. Вообще уравнение вида

$$\mu\ddot{x} = -\xi \cdot x$$

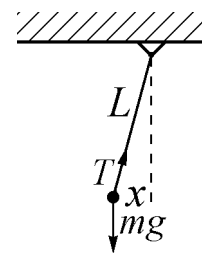


Рис. 7.1

с постоянными ξ и μ или эквивалентное ему

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x, \quad (7.2)$$

где $\omega^2 = \xi/\mu$, называется **уравнением колебаний**. Если удалось получить уравнение колебаний, значит, уже найдена частота.

Не обязательно удобна линейная координата x . Для физического маятника (рис. 7.2) с моментом инерции I относительно точки подвеса и с центром масс на расстоянии L от этой точки

$$I\epsilon = I\ddot{\varphi} = -mgL \cdot \varphi,$$

и частота $\omega = \sqrt{mgL/I}$. **Период колебаний** T находится из условия $\omega T = 2\pi$, $T = 2\pi/\omega$. Иногда частотой (но не круговой) называют $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ (число колебаний в секунду).

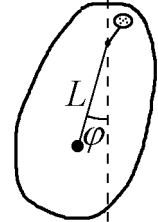


Рис. 7.2.

С тем же успехом к уравнению (7.2) подойдет решение $B \sin(\omega t)$, а также любая сумма $x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. Постоянные A и B определяются начальными условиями (например, координатой и скоростью массы m). При $t = 0$ $x(0) = A$, скорость $\dot{x}(0) = -B\omega$. Если оттянуть пружину и в момент $t = 0$ отпустить груз, будет чистый косинус, а при коротком толчке из положения равновесия – чистый синус. Возможна другая запись: $x = H \cos(\omega t - \varphi)$. При этом H называют **амплитудой**, φ – **фазой** колебаний. Перевод в первую форму:

$$H \cos(\omega t - \varphi) = H \cos(\omega t) \cos \varphi + H \sin(\omega t) \sin \varphi,$$

так что $A = H \cos \varphi$, $B = H \sin \varphi$. Обратный перевод:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega t) \right),$$

откуда $H = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos \varphi = A/\sqrt{A^2 + B^2}$, $\sin \varphi = B/\sqrt{A^2 + B^2}$. Поскольку квадраты полученных $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ в сумме дают 1, такой угол φ действительно существует. Короче, $\operatorname{tg} \varphi = B/A$.

Если вспомнить пример 1.6 из п. 1.6 (стр. 26), видно, что вращение по окружности можно представить, как два колебания $x = R \cos(\omega t)$, $y = R \sin(\omega t)$. Так как центростремительное ускорение пропорционально радиус-вектору и направлено противоположно, для x и y получится уравнение колебаний – составляющая возвращающей силы пропорциональна смещению. Если сразу не догадаться до решения уравнения колебаний, можно было использовать эти соображения.

7.2 Уравнение энергии для колебаний. Затухание

Для массы на пружине закон сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E = \text{const}. \quad (7.3)$$

Аналогично для физического маятника

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgL\varphi^2}{2} = E = \text{const} .$$

(Потенциальная энергия – упрощенное выражение $mgL(1 - \cos \varphi)$ для малых углов). Вообще, иногда удобнее писать вместо уравнения колебаний $\mu\ddot{x} = -\xi x$ уравнение энергии:

$$\frac{\mu\dot{x}^2}{2} + \frac{\xi x^2}{2} = E . \quad (7.4)$$

Из него также сразу находится частота: $\omega^2 = \xi/\mu$.

Пример: Бусинка скользит по проволоке, изогнутой в виде синусоиды $y = -Y \cos(kx)$. При малых x потенциальная энергия $U = mgy = -mgY + mgYk^2x^2/2$, кинетическая $m\dot{x}^2/2$. Первое слагаемое в потенциальной энергии постоянно и несущественно, так что $m\dot{x}^2/2 + mgYk^2x^2/2 = E$ и частота $\omega = \sqrt{gkY}$.

Некоторых смущает, что E неизвестна. Она и не нужна для нахождения частоты. Для **гармонических** колебаний, то есть для таких, которые описываются линейным уравнением движения (7.1,7.2) или законом сохранения энергии типа (7.3,7.4), частота ω **не зависит** от энергии (то есть амплитуды). На этом и основано применение маятника и других колебательных систем в часах.

Средняя кинетическая энергия $\langle m\dot{x}^2/2 \rangle = m\omega^2 A^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle / 2$, потенциальная $\langle kx^2/2 \rangle = kA^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle / 2$. Ясно, что $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$. Поэтому средние кинетическая и потенциальная энергия при гармонических колебаниях равны (и обе равны $E/2$).

Колебания тела на пружине постепенно затухают. Почему это происходит? В уравнении колебаний учтем силу трения:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 .$$

b называется коэффициентом (вязкого) трения, $\gamma = b/2m$ – коэффициентом затухания. Конечно, бывают и другие законы трения, но пока ограничимся этим.

Пусть трение мало, так что колебания затухают медленно. Энергия будет медленно уменьшаться (переходить в тепло):

$$\Delta E = - \int b\dot{x} dx = - \int bv \frac{dx}{dt} dt = -b \int v^2 dt = -\frac{2b}{m} \int \frac{mv^2}{2} dt .$$

При малом трении можно взять много периодов колебаний, в каждом из которых кинетическая энергия колеблется вокруг половины полной энергии E , так что $\int (mv^2/2) dt \approx \langle mv^2/2 \rangle \int dt = (E/2)\Delta t$. Тогда

$$\frac{\Delta E}{E} = -2\gamma\Delta t , \quad \text{или} \quad \frac{dE}{E} = -2\gamma dt , \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{E}{E_0} \right) = -2\gamma t , \quad E = E_0 e^{-2\gamma t} .$$

Энергия колебаний затухает экспоненциально. Амплитуды скорости и смещения пропорциональны \sqrt{E} , так что

$$V_{max} = V_0 e^{-\gamma t}, \quad x_{max} = x_0 e^{-\gamma t}.$$

К таким же выводам приводит очень простая **модель** слабого трения. Пусть масса на пружинке, проходя положение равновесия, где скорость V максимальна, всякий раз упруго ударяет малый грузик Δm . Грузик отлетает с удвоенной скоростью $2V$ и уносит часть импульса: $\Delta p = 2V\Delta m$; средняя сила за период $F \approx 2V\Delta m/T$ как раз пропорциональна V , причем $b = 2\Delta m/T$.

Скорость тела после первого удара $V_1 = V_0 - 2V_0\Delta m/m = V_0(1 - 2\Delta m/m)$. После второго будет $V_2 = V_1(1 - 2\Delta m/m) = V_0(1 - 2\Delta m/m)^2$, а после n ударов (периодов) $V_n = V_0(1 - 2\Delta m/m)^n$. Мы уже знаем, как возводить число, близкое к 1 ($\Delta m \ll m$) в большую степень. Бином Ньютона здесь не годится, так как при $n > 2m/\Delta m$ получится отрицательное число. Перепишем выражение в виде

$$V_n = V_0 \left[\left(1 - \frac{2\Delta m}{m} \right)^{-m/2\Delta m} \right]^{-(2\Delta m/m) \cdot n}.$$

В квадратной скобке получается число e (замечательный предел). Поэтому $V_n = V_0 \exp(-2\Delta mn/m)$ или, если выразить Δm и $n = t/T$,

$$V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{bt}{m}\right).$$

Показатель из-за грубости модели здесь вдвое больше, чем мы получили, усредняя потери энергии, но зависимость аналогичная.

Мы нашли, как изменяется амплитуда скорости. Теперь можно угадать решение уравнения колебаний с трением. Попробуем попросту колебание с убывающей амплитудой:

$$x = A \sin(\Omega t) e^{-kt},$$

где Ω и k надо определить так, чтобы это решение удовлетворяло уравнению. Вычисляем производные:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\Omega \cos(\Omega t) e^{-kt} - Ak \sin(\Omega t) e^{-kt}, \\ \ddot{x} &= -A\Omega^2 \sin(\Omega t) e^{-kt} - 2A\Omega k \cos(\Omega t) e^{-kt} + Ak^2 \sin(\Omega t) e^{-kt}. \end{aligned}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} -A\Omega^2 \sin(\Omega t) e^{-kt} - 2A\Omega k \cos(\Omega t) e^{-kt} + Ak^2 \sin(\Omega t) e^{-kt} \\ + 2\gamma(A\Omega \cos(\Omega t) e^{-kt} - Ak \sin(\Omega t) e^{-kt}) \\ + \omega^2 A \sin(\Omega t) e^{-kt} = 0 \end{aligned}$$

Сокращаем на A и на e^{-kt} :

$$(-\Omega^2 + k^2 - 2\gamma k + \omega^2) \sin(\Omega t) + (-2\Omega k + 2\gamma \Omega) \cos(\Omega t) = 0.$$

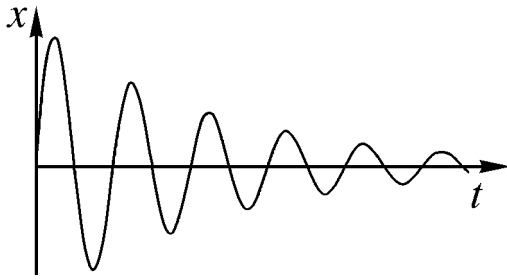


Рис. 7.3.

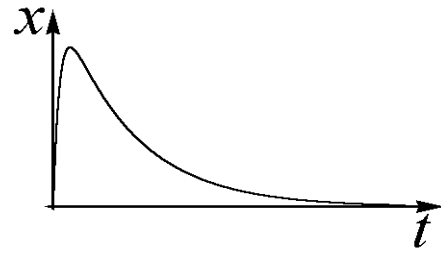


Рис. 7.4.

Должны зануляться скобки при \sin и \cos отдельно, иначе выйдет не нуль, а функция времени. Отсюда $k = \gamma$, $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, и полное решение:

$$x = A \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \cdot t) e^{-\gamma t}.$$

За время $\tau = 1/\gamma$, называемое **временем жизни колебаний**, амплитуда уменьшается в e раз (до 36%). Такое решение будет при резком толчке ($x(0) = 0$, рис. 7.3).

Если трение велико, $\gamma > \omega$, получается мнимое Ω (корень из отрицательного числа). Физически можно ожидать исчезновения колебаний (представим себе маятник в киселе). Попробуем просто $x = Ae^{-kt}$:

$$(k^2 - 2k\gamma + \omega^2)Ae^{-kt} = 0.$$

Находим $k = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$. Имеется, значит, два решения:

$$x = Ae^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} \text{ и } x = Be^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t}.$$

Поскольку уравнение линейное, сумма решений тоже будет решением. Для начального условия $x(0) = 0$ можно написать

$$x = A \left(\frac{e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t}}{2} \right) e^{-\gamma t} = A \operatorname{sh} \left(\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t \right) e^{-\gamma t}.$$

с произвольной амплитудой A (рис. 7.4). Функция $\operatorname{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ называется гиперболическим синусом. Заметим, что из известной формулы Эйлера $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ получается $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ и решение при $\gamma > \omega$ формально следует из колебательного.

7.3 Вынужденные колебания. Резонанс

Свободные колебания затухают. Чтобы колебания продолжались неопределенное время, нужна вынуждающая сила. Особый интерес представляет сила, тоже имеющая колебательный характер. Сначала пусть затухания нет:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t).$$

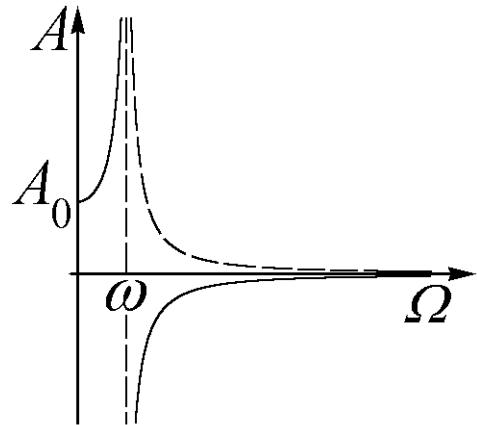
Решение естественно попробовать в виде $x = A \cos(\Omega t)$ – с частотой вынуждающей силы. Подставляем:

$$(-\Omega^2 + \omega^2)A \cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

и амплитуда $A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$. Зависимость $A(\Omega)$ показана на рис. 7.5 (сплошная кривая, состоящая из двух ветвей). Если вынуждающая частота меньше собственной ω , направление смещения и вынуждающей силы совпадают. Если же $\Omega > \omega$, то x изменяется в противофазе с F . Но ведь из состояния покоя тело должно двинуться в направлении F !

Этот парадокс решается учетом начальных условий. К полученному решению, совсем не зависящему от этих условий, можно добавить произвольное решение, описывающее свободные колебания (с частотой ω). Эту-то добавку и надо подобрать, чтобы начальные условия выполнились. Реально есть малое затухание, и собственные колебания через несколько времен жизни затухнут. К сожалению, это рассуждение не демонстрирует наглядно смены направления колебаний при увеличении частоты вынуждающей силы, а скорее разрешает такую возможность. Зато легко убедиться в такой смене знака экспериментально, раскачивая маятник за точку подвеса быстро либо медленно.

Как правило, нас не интересует знак амплитуды колебаний. На рис. 7.5 пунктиром показана абсолютная величина амплитуды при $\Omega > \omega$. Видим, что при Ω , близкой к собственной частоте ω , амплитуда колебаний очень велика. Это явление называется **резонансом**. Малая сила способна в резонансе раскачать любую систему. Можно, например, поднять груз любого веса, подвесив его на веревке и действуя в такт собственным колебаниям.



Теперь учтем затухание:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) .$$

Рис. 7.5.

Если бы слагаемое $2\gamma\dot{x}$ доминировало, координата была бы $\sim \sin(\Omega t)$, то есть сдвинулась на $\pi/2$ по фазе. Если затухание не столь велико, наверно, и сдвиг будет меньше: $x = A \cos(\Omega t - \varphi)$. Подставляем, используя секретное преобразование $\cos(\Omega t) = \cos(\Omega t - \varphi + \varphi)$:

$$\begin{aligned} A(-\Omega^2 + \omega^2) \cos(\Omega t - \varphi) - A2\gamma\Omega \sin(\Omega t - \varphi) = \\ \frac{F_0}{m} \cos \varphi \cos(\Omega t - \varphi) - \frac{F_0}{m} \sin \varphi \sin(\Omega t - \varphi) \end{aligned}$$

Опять отдельно надо уравновесить $\cos(\Omega t - \varphi)$ и $\sin(\Omega t - \varphi)$:

$$A(-\Omega^2 + \omega^2) = \frac{F_0}{m} \cos \varphi , \quad 2A\gamma\Omega = \frac{F_0}{m} \sin \varphi .$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}.$$

При малом γ – самый интересный случай – второе слагаемое под корнем несущественно, если только ω и Ω не сравниваются. Зато при резонансе именно трение ограничивает амплитуду; при $\Omega = \omega$ $A = F_0/2m\gamma\omega$. График $A(\Omega)$ называется **резонансной кривой** (рис. 7.6). Она имеет узкий резонансный пик; ширина его $\Delta\Omega$ определяется обычно из условия, что слагаемые под корнем одинаковы (уровень $0.707 = 1/\sqrt{2}$):

$$\omega^2 - \Omega^2 \approx 2\Omega\Delta\Omega = 2\gamma\Omega, \quad \Delta\Omega = \gamma.$$

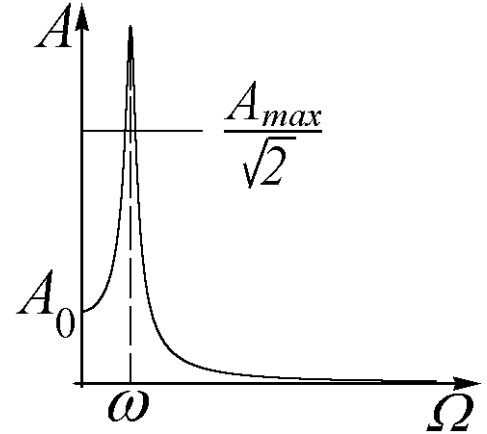


Рис. 7.6.

В этой же резонансной области резко меняется фазовый сдвиг. Когда Ω заметно меньше собственной частоты (на несколько γ), то $\varphi \ll 1$, при точном резонансе $\varphi = \pi/2$, а при $\Omega > \omega$ быстро приближается к π . Таким образом, трение следует учитывать только вблизи резонанса. Вдали же колебания будут либо в фазе, либо в противофазе с вынуждающей силой, как мы уже отмечали. Амплитуда тоже перестает зависеть от γ : сравните рис. 7.6 и рис. 7.5 для модуля $|A|$. Затухание попросту ограничивает бесконечный пик рис. 7.5.

Резонанс бывает полезен (музыкальные инструменты, радиосвязь) и нежелателен (строения во время землетрясения).

7.4 Ангармонические колебания*

Если увеличить амплитуду колебаний, полученные зависимости могут нарушаться. Вспомним, как решается задача для малых колебаний. Например, возьмем два заряда q , причем нижний закреплен, а верхний может двигаться по вертикали (рис. 7.7). На верхний действует сила $F = -mg + q^2/x^2$. Имеется положение равновесия $x_0 = q/\sqrt{mg}$. Запишем силу вблизи положения равновесия – при $x = x_0 + y$, причем y мало:

$$F = -mg + \frac{q^2}{(x_0 + y)^2} = -mg + \frac{q^2}{x_0^2} \left(1 + \frac{y}{x_0}\right)^{-2} \approx -mg + \frac{q^2}{x_0^2} - 2\frac{q^2}{x_0^3} \cdot y.$$

Первые два слагаемых автоматически уничтожатся – это сила в положении равновесия, разумеется, нулевая. Получаем уравнение движения:

$$m\ddot{y} = -2\frac{q^2}{x_0^3} \cdot y,$$

то есть уравнение колебаний с частотой $\omega^2 = q^2/(mx_0^3)$.

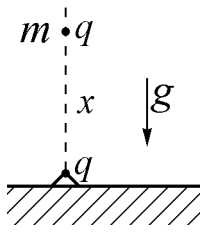


Рис. 7.7.

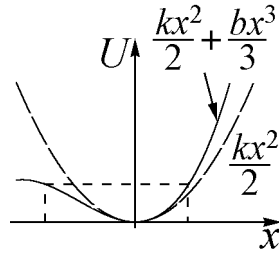


Рис. 7.8.

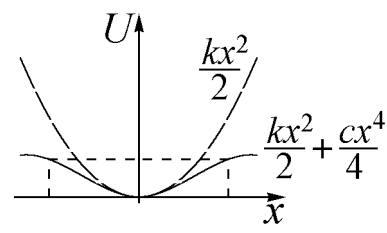


Рис. 7.9.

Вообще, если в точке x_0 функция $F(x)$ обращается в нуль, то вблизи этой точки $F \approx (x - x_0) \cdot (dF/dx)|_{x_0}$. Но это – только первое приближение. Известно, что достаточно хорошие функции разлагаются в **ряд Тейлора**:

$$F(x) = F(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1} \cdot \frac{dF}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 F}{dx^2} \Big|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 F}{dx^3} \Big|_{x_0} + \dots$$

Значит, следующие приближения для силы содержат слагаемые $\sim (x - x_0)^2$, за ними $(x - x_0)^3$, и т. д. Соответственно потенциальная энергия будет содержать поправки $\sim (x - x_0)^3$ и $(x - x_0)^4$.

Сначала выясним (качественно), что дает первая поправка. Уравнение движения запишем, отмеряя x от равновесия:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + bx^2 = 0.$$

Потенциальная яма становится несимметричной, $U \sim \omega^2 x^2/2 + bx^3/3$ (рис. 7.8). Из-за этого перекоса появляется ненулевое среднее значение x . Усредняем уравнение, считая, что координата – сумма постоянной величины и синусоиды: $x = \delta + A \cos(\omega t)$. Получаем

$$\omega^2 \delta + b \frac{A^2}{2} = 0, \quad \text{и смещение} \quad \delta = -b \frac{A^2}{2\omega^2}.$$

Такая ситуация будет для наших зарядов при учете поправок к силе. При заметной амплитуде заряд в среднем будет болтаться выше. С этой же поправкой связано явление теплового расширения. При тепловых колебаниях каждый атом смещается. Сумма всех смещений дает расширение образца, пропорциональное длине и квадрату амплитуды колебаний, то есть энергии (температуре). При гармонических колебаниях всего-навсего шевелились бы бока образца на одну амплитуду A , которая никак не больше межатомного расстояния, т.е. эффект был бы незаметен.

Рассмотрим следующую поправку, которая важна в симметричных потенциальных ямах. Например, для маятника возвращающий момент $M \sim \sin \varphi \approx \varphi - \varphi^3/6$, потенциальная энергия $U \sim (1 - \cos \varphi) \approx \varphi^2/2 - \varphi^4/24$ (рис. 7.9). Соответствующий коэффициент упругости вроде как умножается на $(1 - \varphi^2/6)$, если выбрать первое выражение. Среднее значение этого множителя будет $(1 - \varphi_0^2/12)$. Частота пропорциональна корню из упругости, $\omega = \omega_0(1 - \varphi_0^2/24)$. Период $T = T_0(1 + \varphi_0^2/24)$. Это, конечно, оценка. Точная поправка: $T = T_0(1 + \varphi_0^2/16)$ ¹.

¹Вроде не видно, где мы ошиблись. На самом деле не только меняется частота, но и к основному колебанию в том же приближении добавляются еще более быстрые, с частотой, в данном случае, 3ω . Поэтому неточность не удивительна.

Период секундного маятника с амплитудой $6^\circ \approx 0,1$ изменится на $0,01/16 = 6 \cdot 10^{-4}$, за сутки ошибка будет ≈ 50 с. Конечно, можно эту ошибку скомпенсировать длиной нити, но она зависит от амплитуды. Кроме того, на точность хода влияет тепловое расширение (длина маятника) и изменения g при движении часов.

С развитием мореплавания появилась проблема «перевозки времени». Часы с точностью 10^{-5} уходят на 1 с в сутки, за 3 месяца – на 90 с = 1,5 мин. При астрономическом определении места будет ошибка в $360 \cdot 1,5/(60 \cdot 24) = 3/8$ градуса широты, или $40000 \cdot 1,5/(60 \cdot 24) \approx 40$ км. Как раз можно налететь на какие-нибудь скалы, думая, что до них еще далеко. Маятниковые часы в плавании не годятся; применялись хронометры с крутильным маятником, нечувствительные к ускорениям. Тепловое расширение, в принципе, компенсируется. Теперь такой проблемы нет, любые часы можно проверить по радиосигналам.

Интересна задача о **брахистохроне** – кривой, по которой в поле тяжести колебания происходят с точно постоянным периодом, независимо от амплитуды. Тогда в уравнении колебаний или энергии не должно быть никаких поправок. Эта кривая – не парабола. Хотя на параболе потенциальная энергия $U \sim x^2$, но кинетическая не точно пропорциональна \dot{x}^2 , так как есть еще вертикальная скорость. На этой задаче Д. Бернулли продемонстрировал пользу методов Ньютона.

Для кривой $y = y(x)$ потенциальная энергия $U = mgy$. Введем длину вдоль кривой s , тогда кинетическая энергия $m\dot{s}^2/2$ точно. Требуется, чтобы выполнялась пропорциональность $y \sim s^2$. Поскольку окружность и парабола не годятся, попробуем циклоиду. В параметрической форме

$$\begin{aligned} y &= R(1 - \cos \varphi) && (\text{одновременно это } 2R \sin^2(\varphi/2)) \\ x &= R(\varphi + \sin \varphi) \end{aligned}$$

Нижняя точка $\varphi = 0$; $dx = R(1 + \cos \varphi)d\varphi$, $dy = R \sin \varphi d\varphi$. Считаем элемент длины дуги:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\sqrt{2(1 + \cos \varphi)}d\varphi = 2R \cos(\varphi/2)d\varphi.$$

Длина $s = \int ds = \int 2R \cos(\varphi/2)d\varphi = 4R \sin(\varphi/2)$. Действительно, получается $y = s^2/(8R)$. Уравнение энергии

$$\frac{m\dot{s}^2}{2} + \frac{mgs^2}{8R} = E$$

точное при $|s| < 4R$. Частота колебаний $\omega = \sqrt{g/4R}$, период $T = 4\pi\sqrt{R/g}$, время соскальзывания в нижнюю точку $T/2 = 2\pi\sqrt{R/g}$ **с любой высоты**. Такую кривую опишет груз на невесомом обруче, «катающемся» по потолку (рис. 7.10).

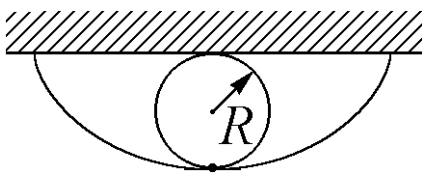


Рис. 7.10.

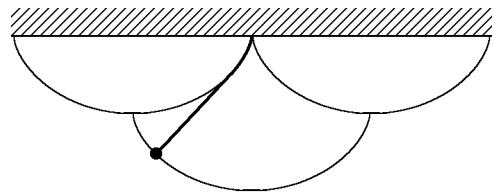


Рис. 7.11.

Первым маятниковые часы построил Х. Гюйгенс (1629–1695) около 1657 г. Он же открыл замечательное свойство изохронности циклоидального маятника и предложил конструкцию, в которой эта идея осуществляется (рис. 7.11). Между двумя «бревнами», сечения которых обработаны в форме циклоид высоты $2R$, помещается точка подвеса маятника, длина нити которого равна $4R$. Оказывается (попробуйте доказать самостоятельно), что при этом колеблющийся груз движется по циклоиде точно такой же формы! Следовательно, период колебаний такого маятника в точности один и тот же при любой (а не только малой) амплитуде².

7.5 Неустойчивость*

Колебания, как мы видели, происходят вокруг положения устойчивого равновесия. Но бывают равновесия и неустойчивые, из которых система выходит самопроизвольно. Что можно сказать о движении при такой ситуации?

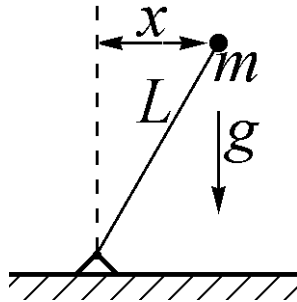


Рис. 7.12.

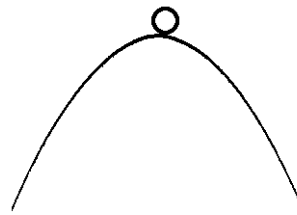


Рис. 7.13.

Простейший пример неустойчивости – маятник вверх головой (рис. 7.12). Нить, конечно, не годится; масса m укреплена на стержне, который может вращаться вокруг нижней точки. Уравнение движения массы m при малом отклонении от вертикали:

$$m\ddot{x} = \frac{mg}{L}x \quad \text{или} \quad \ddot{x} = \frac{g}{L}x \equiv \gamma^2 x .$$

Уравнение похоже на уравнение колебаний, но знак в правой части другой – сила не возвращает, а уводит массу из положения равновесия. Можно использовать и энергетический подход. Например, пусть имеется тело на гладкой возвышенности, форма которой задается уравнением $y = -(k/mg) \cdot (x^2/2)$ (рис. 7.13). Форма коэффициента выбрана так, чтобы потенциальная энергия выражалась попроще: $U = mgy = -kx^2/2$. Здесь k имеет размерность коэффициента упругости и описывает кривизну горы в верхней точке. Для перевернутого маятника при малом отклонении x смещение по вертикали $y = x^2/(2L)$, и эквивалентное значение $k = mg/L$. Тогда при малых отклонениях

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = E = \text{const} .$$

²На практике циклоидальный маятник не нашел широкого применения. Другие пути повышения точности часов оказались более удобными.

Опять, за исключением знака, похоже на уравнение энергии для колебаний, но пружина как будто имеет отрицательную жесткость.

Похоже, что два колебательных решения – \sin и \cos – не подойдут. Из небогатого набора известных нам функций нетрудно извлечь такую, у которой производная пропорциональна самой функции. Это, конечно, экспонента. Пробуем $x = Ae^{bt}$, где b пока неизвестно. Подставляем в уравнение:

$$b^2 Ae^{bt} = \gamma^2 Ae^{bt},$$

откуда $b = \pm\gamma$. Амплитуда A сократилась и, значит, может быть любая – можно терять равновесие быстрее или медленнее. Коэффициент γ размерности $1/c$ (как и у частоты колебаний ω), называется **инкрементом** неустойчивости.

Как и для колебаний, есть два решения: $Be^{-\gamma t}$ и $Ae^{\gamma t}$. Это оттого, что уравнение второго порядка (входит вторая производная). Постоянные B и A находятся из начальных условий. В отличие от случая колебаний, эти два решения совсем непохожи: одно растет со временем, другое убывает. Практически невероятно, чтобы при ненулевых начальных условиях получилось $A = 0$. Поэтому неустойчивость, в общем, возрастает со временем.

Это возрастание быстрое. Через характерное время $\tau = 1/\gamma$ начальная амплитуда возрастет в $e = 2,71828\dots$ раз, через 2τ в $e^2 \approx 7,3$ раза, через 3τ – примерно в 20 раз, и т.д. Пусть мы хотим поставить карандаш на острый конец. Для него время $\tau \sim \sqrt{L/g} \cong 0,1$ с. Если ставить очень аккуратно, можно выдержать вертикаль с точностью до 0,05 мм. Такого порядка будет амплитуда A – при $B = 0$ это попросту начальное отклонение. Будем считать, что карандаш упал, если отклонение верхнего конца достигло 5 см, то есть возросло в 1000 раз. Тогда $e^{t/\tau} = 10^3$, $t = \tau \cdot 3 \ln(10) = \tau \cdot 3 \cdot 2,3 = 7\tau$. Теперь с помощью различных дорогих приборов установим карандаш еще точнее – в 10 раз. Время падения увеличится всего на $2,3\tau$. Даже если можно добиться точности порядка атомных размеров – $0,5 \cdot 10^{-8}$ см, что вообще-то сомнительно, получится всего $\tau \cdot 9 \ln(10) \approx 20\tau$. Значит, карандаш никогда в жизни не продержится дольше двух секунд. При этом его вовсе не надо кому-то толкать; он прекрасно упадет сам. А если его выставить «идеально», то его выведет из равновесия любое дуновение воздуха.

В общем можно сказать, что время развития неустойчивости всегда порядка **нескольких** характерных времен $\tau = 1/\gamma$. Экспоненциальный рост очень быстрый, и для достижения заданного уровня отклонения от равновесия нужно время, почти не зависящее от этого уровня.

Рост населения Земли – тоже своеобразная неустойчивость. Если оно удваивается, скажем, за 25 лет, то за 50 учетверится, а за 100 – возрастет в 16 раз. Время удвоения для уравнения, описывающего неустойчивость, равно $\ln 2/\gamma \approx 0,7/\gamma$. В действительности в настоящее время рост населения Земли происходит еще быстрее. Это можно объяснить тем, что со временем возрастает доля быстро размножающихся групп. В результате коэффициент γ растет со временем. Каждое последующее удвоение требует меньше времени.

Экспоненциально развивающийся процесс вскоре приобретает характер взрыва. Это иллюстрируется известной индийской легендой об изобретателе шахмат. Мудрец в качестве награды попросил положить на одну клетку доски зерно, на вторую – два, на третью – четыре, и т.д. Всего понадобится $2^{64} - 1 \approx 10^{19}$ зерен, или порядка $3 \cdot 10^{11}$ тонн. Даже сейчас на Земле

годовой сбор зерна меньше примерно в 300 раз.

То же самое получим, найдя время достижения данного уровня:

$$t = \tau \cdot \ln(x/x_0) .$$

При большом отношении x/x_0 время почти не зависит от этого отношения. Например, при $x/x_0 = 10^6$ получим $\approx 14\tau$, а при росте аргумента еще в 100 раз будет $\approx 18,4\tau$ – всего на 30% больше. Логарифм и должен меняться слабо, как обратная функция к быстро меняющейся экспоненте. У физиков даже есть поговорка: «Логарифм – это не функция». Часто появляются логарифмические расходимости, но их никто уже не пугается, так как всегда можно ограничить аргумент, причем не очень важно, на каком уровне: достаточно оценки. Возвращаясь к экологии, отметим, что при экспоненциальном росте экономики (на α процентов в год: $e^{0,01\alpha t}$) время исчерпания природных ресурсов равно нескольким характерным временам $100/\alpha$ **независимо** от количества этих ресурсов.

Сходство уравнения неустойчивости с уравнением колебаний заслуживает отдельного обсуждения. Мы можем заменить в γ^2 на $-(i\gamma)^2$, где i – это мнимая единица. Тогда получается колебательное уравнение, но с мнимой частотой $\omega = i\gamma$. Формально можно использовать «колебательные» решения типа $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$. Поскольку, например, $\cos(\omega t) = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$, то при мнимой частоте как раз получатся действительные экспоненты. Обратно, колебания можно рассматривать как «неустойчивость» с мнимым инкрементом. В общем случае уравнение может содержать «частоту», имеющую как действительную, так и мнимую часть, как было для затухающих колебаний. Действительная обеспечивает колебания, мнимая в зависимости от знака – затухание или рост неустойчивости.

Разумеется, никакая неустойчивость не может развиваться экспоненциально долгое время. Например, падающий карандаш не может иметь ускорение больше g . При не малом угле наклона линейное уравнение перестанет выполняться. Всякая неустойчивость в свое время переходит в нелинейную стадию. Обычно при этом экспоненциальный рост сменяется более медленным степенным, хотя бывают обратные примеры – самоускоряющиеся процессы типа теплового взрыва или гравитационного коллапса.

МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

А. П. Ершов

12 февраля 2007 г.

Глава 8

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

До сих пор мы придерживались инерциальных систем отсчета. Иногда все же удобнее **неинерциальные**, но в них есть свои хитрости.

8.1 Фиктивная сила при прямолинейном движении

Простейший случай неинерциальной системы – движение по прямой с ускорением \mathbf{A} , скажем, вагона. Сидя в таком вагоне, мы чувствуем «перегрузки». Из инерциальной системы мы рассуждаем так: если мы ускоряемся вместе с вагоном, то на нас действует сила $\mathbf{F} = m\mathbf{A}$, хотя бы из-за деформации спинки кресла. В системе вагона такая сила тоже есть – деформация не исчезла, однако никакого ускорения не имеем. Есть две возможности: либо согласиться, что в ускоренной системе не действует второй закон Ньютона, либо попытаться его модифицировать. Мы примем второй вариант, желая иногда все же пользоваться неинерциальными системами. Тогда силу реакции спинки надо чем-то компенсировать. Это делается введением **фиктивной** (ненастоящей) силы $\mathbf{f} = -m\mathbf{A}$, так что

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{f} = \mathbf{F} - m\mathbf{A} = 0$$

для нашего примера. Следовательно, динамическая задача в инерциальной системе свелась к статике в неинерциальной. Гораздо проще рассмотреть в системе вагона равновесие некоторого ящика, чем его ускорение в системе рельсов.

Для тела, движущегося относительно вагона с ненулевым ускорением \mathbf{a}' , ускорение в инерциальной системе будет $\mathbf{a}' + \mathbf{A}$. Значит, (в инерциальной же системе) на него действует суммарная сила \mathbf{F} , равная $m(\mathbf{a}' + \mathbf{A})$. Это – сумма каких-то настоящих сил (упругости, тяжести и т.п.). В системе вагона наблюдается только ускорение \mathbf{a}' , то есть, кроме настоящих сил, следует добавить еще фиктивную $\mathbf{f} = -m\mathbf{A}$. Естественно, она действует и на подвижные относительно вагона предметы. С учетом фиктивной силы второй закон Ньютона в системе вагона будет иметь вид

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{f} = \mathbf{F} - m\mathbf{A} .$$

При этом подходе \mathbf{A} – это константа, которую можно определить для данной неинерциальной системы отсчета раз и навсегда из одного опыта для одного тела, например, подвесив его на пружинке или наблюдая за его свободным движением. Итак, имеем рецепт исправления уравнения движения: в неинерциальной системе отсчета надо учесть, кроме «нормальных» сил, вызванных взаимодействием тел, еще фиктивную силу. Она пропорциональна массе тела и ускорению системы отсчета \mathbf{A} (но имеет обратный знак).

Если посмотреть в окно вагона, окружающие предметы (деревья, здания) имеют ускорение $-\mathbf{A}$. Значит, на них тоже действуют такие же фиктивные силы (настоящие силы для неподвижных в инерциальной системе тел компенсированы). Ускоряются в том числе и предметы, которых мы не видим, и те, о которых мы даже не знаем – короче, вся Вселенная.

Важно понять два обстоятельства:

- Фиктивная сила не вызвана взаимодействием с каким – либо телом.
- Фиктивная сила действует на все тела, в том числе и не находящиеся внутри вагона (на африканских слонов, планету Венера, туманность Андромеды).

Пропорциональность фиктивной силы массе тела напоминает поле тяжести. Действительно, по Эйнштейну, однородное поле тяжести неотлично от ускоренной системы отсчета. Падая в лифте, мы испытываем невесомость, хотя Земля по-прежнему нас притягивает: в системе лифта фиктивная сила компенсирует тяжесть. То же самое наблюдается в полете по орбите, и по той же причине мы не чувствуем притяжения бесконечных масс Вселенной, падая вместе с Солнцем и системой ближайших галактик. Поэтому иногда говорят, что фиктивная сила – это взаимодействие со всей остальной Вселенной.

8.2 Центробежная и кориолисова силы

Рассмотрим **вращающиеся** системы отсчета. Пусть тело вращается на веревке радиуса R с угловой скоростью $\Omega = V/R$. Тогда его ускорение в инерциальной системе (центростремительное) равно $\Omega^2 R$ и сила натяжения веревки будет $T = m\Omega^2 R$.

Если же смотреть на это тело, стоя на вращающемся с той же угловой скоростью диске, то тело будет неподвижно, хотя натяжение, конечно, не исчезнет. Опять в неинерциальной системе не выполняется закон Ньютона: на неподвижное тело действует нескомпенсированная сила. Попробуем опять ввести фиктивную силу. Она должна компенсировать натяжение и равна $\mathbf{f}_{cen} = m\Omega^2 \mathbf{R}$ (направлена наружу). Теперь все в порядке: для тел, неподвижных во вращающейся системе, $m\mathbf{a}' = 0 = \mathbf{F} + \mathbf{f}_{cen}$.

Сила \mathbf{f}_{cen} называется **центробежной**. Это тоже фиктивная сила, не вызванная какими-либо телами и применяемая во вращающейся системе отсчета для «исправ-

ления» второго закона Ньютона. Если в инерциальной системе тела, срывающиеся со вращающегося диска, просто летят по касательной, то в системе диска они разгоняются центробежной силой по радиусу. Из-за этой же силы Земля слегка сплюснута: экваториальные области «растаскиваются» наружу. Поверхность воды во вращающемся вокруг продольной оси стакане имеет форму параболы: центробежная сила расталкивает воду от оси.

Центробежная сила определяется константой Ω , одинаковой для всех тел. Физически это, разумеется, угловая скорость вращения системы отсчета. Но важно, что Ω и положение оси, от которой отмеряется R , можно определить опять-таки в небольшом числе опытов, произведенных **не выходя** из вращающейся системы. (Надо измерять сумму реальных сил, приложенных к пробному неподвижному телу, и приравнять ее $m\Omega^2 R$).

Однако центробежная сила не объясняет других явлений. Как фиктивная сила, введенная в неинерциальной системе, она обязана действовать на все подряд. Но попробуйте завертеться вокруг своей оси. Почему предметы обстановки не срываются с мест центробежной силой?

Тем, кто считает, что эти предметы «не находятся» в неинерциальной системе, рекомендуется перечитать предыдущий параграф. В системе отсчета находится все, что угодно: ваш родной город, звезда Сириус, кит в океане. Это просто система координат, привязанная к телу, в данном случае вашему. Получится нехорошо, если на одни тела f_{cen} действовать будет, а на другие – нет. Сейчас мы увидим, что она именно действует. Другой вопрос – почему многие предметы движутся не так, как должны бы под ее действием?

Рассмотрим пример. Пусть над краем диска радиуса R , равномерно вращающегося с угловой скоростью Ω вокруг своей оси, располагается тело массы m , которое вращается с угловой скоростью $\omega \neq \Omega$ вокруг той же оси (рис. 8.1). Обеспечить такое движение можно, например, привязав к оси диска и телу жесткую нить. Тогда в неподвижной системе отсчета сила натяжения нити будет обеспечивать необходимое центростремительное ускорение:

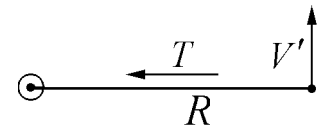


Рис. 8.1.

$$T = m\omega^2 R. \quad (8.1)$$

Во вращающейся системе отсчета, связанной с диском, тело будет иметь линейную скорость

$$V' = (\omega - \Omega)R. \quad (8.2)$$

Из уравнений (8.1) и (8.2) определим силу натяжения нити:

$$T = m\omega^2 R = m(\Omega + V'/R)^2 R = m\Omega^2 R + 2m\Omega V' + mV'^2/R. \quad (8.3)$$

Относительно диска тело имеет центростремительное ускорение

$$a' = V'^2/R.$$

Перепишем выражение (8.3) в виде

$$T - m\Omega^2 R - 2m\Omega V' = mV'^2/R. \quad (8.4)$$

Уравнение (8.4) очень похоже на второй закон Ньютона: справа стоит произведение массы тела на его ускорение, слева – сумма трех слагаемых. Первое из них – сила натяжения, второе – центробежная сила. Но есть еще третья! Видим, что для «сохранения формы» второго закона Ньютона нужно ввести еще одну «фиктивную» силу:

$$f_{\text{кор}} = -2m\Omega V'; \quad \text{в векторном виде } \mathbf{f}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{V}' \times \boldsymbol{\Omega}]. \quad (8.5)$$

Эта сила называется силой **Кориолиса**, или **кориолисовой силой**, по имени французского физика Г. Кориолиса (1792 – 1843), который ввел ее в обращение. Она действует на тела, движущиеся во вращающейся системе отсчета (у которых $V' \neq 0$).

Потому все вокруг и не падает, если мы закрутимся вокруг оси. При вращении, допустим, против часовой стрелки вектор $\boldsymbol{\Omega}$ направлен вверх. Предметы обстановки для нас летают по круговым орбитам по часовой стрелке; для них произведение $[\mathbf{V}' \times \boldsymbol{\Omega}]$ будет направлено к центру. По величине (для инерциально неподвижных предметов) $V = \Omega R$, и кориолисова сила будет $2m\Omega^2 R$ – вдвое больше центробежной. Получается в результате $1 \cdot m\Omega^2 R = mV'^2/R$ по направлению к центру. Это как раз и надо, чтобы «заставить» тела вращаться вокруг вас с центростремительным ускорением V'^2/R . (Возможно, стоит отметить, что кориолисова сила отнюдь не всегда равна удвоенной центробежной, как некоторые выводят под впечатлением этого примера).

Вопрос. Почему, если кошка бежит вокруг ведра с водой, центробежная сила в ее системе отсчета не может сделать из ровной поверхности параболическую?

Осталось рассмотреть радиальное движение. Возьмем тело, имеющее постоянную скорость в инерциальной системе и, значит, свободное от настоящих сил (точка А на рис. 8.2). Пусть в начальный момент ($t = 0$) это тело имеет скорость точно ΩR поперек радиуса (значит, нулевую во вращающейся системе) и произвольную V' вдоль радиуса (одинаковую в обеих системах). Через малое время t тело сдвинется по радиусу на $V't$ и поперек радиуса на $y = \Omega R t$ в новое положение В.

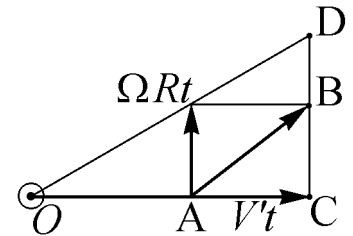


Рис. 8.2.

Точка С, отмеченная на вращающемся диске на новом радиусе $(R + V't)$, сдвинулась бы в поперечном направлении на расстояние $z = \Omega(R + V't)t$ в точку D. Поэтому во вращающейся системе тело сдвинется не только вдоль радиуса, но и поперек – на разность $DB = z - y = \Omega V't^2$ (вниз на рисунке, то есть отстанет от диска). Это тоже объясняется действием кориолисовой силы $2m[\mathbf{V}' \times \boldsymbol{\Omega}]$. Поперечное смещение из-за нее $2mV'\Omega t^2/2$ точно такое, как надо.

Таким образом, во вращающейся системе нужны **две** фиктивные силы: центробежная и кориолисова. Полное уравнение движения

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{f}_{\text{cen}} + \mathbf{f}_{\text{кор}} = \mathbf{F} + m\Omega^2 \mathbf{R} + 2m[\mathbf{V}' \times \boldsymbol{\Omega}],$$

где \mathbf{F} – настоящая сила.

Кориолисова сила заставляет реки северного полушария подмывать правый берег (в южном наоборот). Она же закручивает циклоны – тропические ураганы. Для урагана необходима жаркая погода, вызывающая сильное испарение и поднятие нагретого воздуха, и сила

Кориолиса, которая закручивает сходящиеся к освободившемуся месту потоки воздуха. Сила Кориолиса в южном полушарии закручивает ураган по часовой стрелке, а в северном – против (отклоняет потоки вправо). На экваторе ее влияние нулевое (возможна только вертикальная составляющая), и поэтому ураганы возникают в сороковых («ревущих») широтах, где еще достаточно жарко.

Теперь мы можем квалифицированно ответить на вопрос, «есть ли центробежная сила». Получается, что центробежная сила, как и другие фиктивные силы, существует **в неинерциальных системах отсчета**, то есть совсем в другом смысле, чем настоящие силы, вызванные взаимодействием тел. Как ни расценивать фиктивные силы – как результат «плохой» кинематики, перехода в систему отсчета, или как воздействие удаленных галактик – природа их совершенно другая, чем каких-нибудь сил упругости.

В принципе, любая задача решается как в инерциальной системе (с учетом только настоящих сил), так и в неинерциальной (с добавлением еще и фиктивных). Представим себе маятник Фуко на полюсе. В системе Земли он поворачивает плоскость своих колебаний под действием кориолисовой силы, а в инерциальной системе просто сохраняет эту плоскость, а вращается, наоборот, Земля. Надо выбирать систему из соображений удобства. Допустим, в средних широтах этот маятник удобнее рассмотреть в неинерциальной системе, где все-таки будет фиксировано направление вертикали.